Exercícios Resolvidos Extra de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - CDI-I -, 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 4. Primitivas

1. Usando o método de primitivação por partes ($\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$). Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $x\cos x$,
b) $x\ln x$,
c) $x^2 \operatorname{sen} x$,
d) $\ln(1+x)$,
e) $\cos^2 x$,
f) $\operatorname{sen}^3 x$,
g) $\operatorname{arcsen} x$,
h) $x \operatorname{arctg} x$,
i) $\ln^3 x$,
j) $\operatorname{sen} x \ln(1+\operatorname{sen} x)$,
k) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,
l) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
m) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

RESOLUÇÃO

a) Com $f' = \cos x \implies f = \operatorname{sen} x$ e $g = x \implies g' = 1$, temos

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x.$$

b) Com $f' = x \implies f = x^2/2$ e $g = \ln x \implies g' = 1/x$, temos

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

c) Com $f' = \operatorname{sen} x \implies f = -\cos x$ e $g = x^2 \implies g' = 2x$, temos (usando a))

$$\int x^2\operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x.$$

d) Com $f' = 1 \implies f = x$ e $g = \ln(1+x) \implies g' = \frac{1}{1+x}$, temos

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x)\,dx &= x\ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\,dx\\ &= x\ln(1+x) - \int 1 - \frac{1}{1+x}\,dx\\ &= (x+1)\ln(1+x) - x.\end{aligned}$$

(NOTA: Também podíamos ter feito feito $f' = 1 \implies f = x+1$, donde

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x)\,dx &= (x+1)\ln(1+x) - \int 1\,dx\\ &= (x+1)\ln(1+x) - x)\end{aligned}$$

e) Com $f' = \cos x \implies f = \operatorname{sen} x$ e $g = \cos x \implies g' = -\operatorname{sen} x$, temos

$$\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int 1 - \cos^2 x\, dx$$
$$= \operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx,$$

logo,

$$2\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x \iff \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cos x + x).$$

(NOTA: Uma forma alternativa e direta de fazer o exercício era recordar a seguinte identidade, que devem memorizar:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2};$$

daqui segue que

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4},$$

que coincide com o resultado anterior [porquê?]).

f) Com $f' = \operatorname{sen} x \implies f = -\cos x$ e $g = \operatorname{sen}^2 x \implies g' = 2\operatorname{sen} x \cos x$, temos

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^2 x + \int 2\operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^2 x - \frac{2}{3}\cos^3 x.$$

(NOTA: Uma outra forma de fazer o exercício passa pelo uso da identidade $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x)\, dx$$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3},$$

que coincide com o resultado anterior [porquê?].)

g) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2},$

h) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\, dx$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(-x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x\right),$$

i) Primitivando por partes 3 vezes, fazendo sempre $f' = 1 \implies f = x$, e escolhendo primeiro $g = \ln^3$ (e depois $g = \ln^2$, e $g = \ln x$):

$$\int \ln^3 x\,dx = x\ln^3 x - \int 3\ln^2 x\,dx \;=\; x(\ln^3 x - 3\ln^2 x) + \int 6\ln x)$$

$$= x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x) - \int 6) \;=\; x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6).$$

j) Fazendo $f' = \operatorname{sen} x \implies f = -\cos x$ e $g = \ln(1+\operatorname{sen} x) \implies g' = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$ temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \ln(1+\operatorname{sen} x)\,dx &= -\cos x\ln(1+\operatorname{sen} x) + \int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx \\ &= -\cos x\ln(1+\operatorname{sen} x) + \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx \\ &= -\cos x\ln(1+\operatorname{sen} x) + \int 1 - \operatorname{sen} x\,dx \\ &= -\cos x\ln(1+\operatorname{sen} x) + x + \cos x.\end{aligned}$$

k) Com $f' = \sqrt{x} = x^{1/2} \implies f = \frac{2}{3}x^{3/2}$ e $g = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \implies g' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx &= \frac{2}{3}x^{3/2}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}(x - \ln(1+x))\end{aligned}$$

(note que $x > 0$ no domínio da função).

l) Com $f' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-1/2} \implies f = \sqrt{1+x^2}$ e $g = x^2 \implies g' = 2x$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= x^2\sqrt{1+x^2} - \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

(OU, fazendo primeiro a substituição $y = x^2$, vem $dy = 2xdx$ e temos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{y}{2\sqrt{1+y}}\,dy,$$

depois primitivamos por partes e por fim retornamos à variável x.)

m) Com $v' = \frac{x^3}{(1-x^4)^2} \implies v = \frac{1}{4(1-x^4)}$ e $u = x^4 \implies u' = 4x^3$, temos

$$\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}\,dx = \int x^4\frac{x^3}{(1-x^4)^2}\,dx \;=\; x^4\frac{1}{4(1-x^4)} - \int 4x^3\frac{1}{4(1-x^4)}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4}\ln(1-x^4).$$

(OU, em alternativa, fazendo primeiro a substituição $y = x^4$.)

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples adequada:

$$\text{a) } \frac{1}{x^2+x}, \qquad \text{b) } \frac{x+1}{x(x-1)^2}, \qquad \text{c) } \frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}, \qquad \text{d) } \frac{x+3}{x^4-x^2}$$

RESOLUÇÃO:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$. Usando a decomposição em fracções simples, sabemos que existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Temos

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

logo $A + B = 0$ e $A = 1$, ou seja, $A = 1$ e $B = -1$. Portanto

$$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

b) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + A}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

logo $A + B = 0$, $-2A - B + C = 1$, $A = 1$, ou seja, $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$. Temos então

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}.$$

c) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\\ &= \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+4)}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + 4A + Cx}{x(x^2+4)}\end{aligned}$$

logo $A+B=1$, $C=1$ e $4A=-4$, ou seja, $A=-1$, $B=2$, $C=1$. Temos então

$$\int \frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}\,dx = \int -\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+4}\,dx = -\ln|x|+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^4-x^2}\,dx = \int \frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)}\,dx$, para $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Usando a decomposição em fracções simples

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

tem-se $A=-1$, $B=-3$, $C=2$, $D=-1$ (verifique). Logo,

$$\int \frac{x+3}{x^4-x^2}\,dx = -\ln|x|+\frac{3}{x}+2\ln|x-1|-\ln|x+1| = \frac{3}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x(x+1)|}.$$

3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$ c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$, e) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, f) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$,

g) $\dfrac{2\ln x-1}{x\ln x(\ln x-1)^2}$, h) $\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}$, i) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$,

RESOLUÇAO:

a) Fazendo a substituição $\sqrt{x}=t \Leftrightarrow x=t^2$, com $x>0$, $x\neq 16$, e $t>0$, $t\neq 4$, temos (note-se que $dx=2tdt$):

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\,dx \Rightarrow \int \frac{1+t}{t^2(4-t)}\,2t\,dt = 2\int \frac{1+t}{t(4-t)}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2+2t}{t(4-t)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{4-t}$$

temos $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{2}$, logo

$$2\int \frac{1+t}{t(4-t)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}+\frac{5}{4-t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{(4-t)^5}\right|$$

e assim, retornando à variável original (x),

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}\right|.$$

b) Fazendo a substituição $\sqrt[3]{x} = t \Leftrightarrow x = t^3$ (donde $dx = 3t^2 dt$), temos (verifique)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}\,dx = \int \frac{3t}{1+t^4}\,dt = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2}.$$

c) Fazendo a substituição $\sqrt{x-1} = t \Leftrightarrow x = t^2+1$, com $x > 1$ e $t > 0$ temos (verifique)

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\sqrt{x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$$

d) Fazendo a substituição $e^{2x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln t$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, temos

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx \ \Rightarrow \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2t}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)t}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

temos $A = -1$, $B = 1$, logo

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|$$

e assim, com $t = e^{2x} > 0$,

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right).$$

(OU $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int 1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx = x - \ln(1+e^{2x})$.)

e) Fazendo a substituição $e^{2x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln t$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, temos (verifique)

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\,dx \ \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{t}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

f) Fazendo a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, com $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $t > 0$, $t \neq 1$, temos

$$\int \frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\,dx \ \Rightarrow \int \frac{t^3}{(1+t^2)(t-1)^2}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = D = \frac{1}{2}$, logo

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\,dt =& \frac{1}{2}\int -\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\,dt \\ =& -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\end{aligned}$$

e assim

$$\int \frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\ln(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x-1}.$$

g) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, e\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, temos

$$\int \frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\,dx \Rightarrow \int \frac{2t-1}{e^t t(t-1)^2}\,e^t\,dt = \int \frac{2t-1}{t(t-1)^2}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2t-1}{t(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}$$

temos $A = -1$, $B = C = 1$, logo

$$\int \frac{2t-1}{t(t-1)^2}\,dt = \int -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\,dt = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - \frac{1}{t-1}$$

e assim

$$\int \frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x-1)^2}\,dx = \ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

h) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, temos

$$\int \frac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}\,dx \Rightarrow \int \frac{t}{(t-1)^2}\,dt = \ln|\ln x - 1| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

i) Fazendo a substituição $\tan x = t \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} t$, com $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x \neq -\frac{\pi}{4}$ e $t \neq -1$, temos (verifique)

$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx \Rightarrow \int \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt = \ln|\cos x| + \ln|\tan x + 1|.$$

NOTA: Esta substituição é invertível para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, mas como a função $\tan x$ é periódica de período π, o resultado é válido no domínio de $\tan x$.

4. Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, $x > 16$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

RESOLUÇÃO

a) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c$, com $c \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8} + c$, logo $c = -\frac{\pi^2}{8}$.

b) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}\right| + c$, para $x > 16$ (Ex. 3.a)); $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, logo não existe f nas condições do enunciado.

c) Temos $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) + 1$ (ver 3.d))

5. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, $1+x = t^4$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1+e^x$

c) $\dfrac{1}{x(4-\ln^2(x))}$, $t = \ln x$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x) + 3(\cos x - 1)}$, $t = \cos x$

e) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}$, $t = \operatorname{sen}(x)$

f) $\sqrt{1-x^2}$, $x = \operatorname{sen} t$.

RESOLUÇÃO

a) Fazendo a substituição $\sqrt[4]{1+x} = t \Leftrightarrow x = t^4 - 1$, com $x > -1$ e $t > 0$, temos

$$\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{(t^4-1)t}\,4t^3\,dt = \int \frac{4t^2}{t^4-1}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{4t^2}{t^4-1} = \frac{4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

temos $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$ (verifique). Logo,

$$\int \frac{4t^2}{t^4-1}\,dx = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1}\,dt = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\operatorname{arctg} t$$

e assim,

$$\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}+1}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x}.$$

b) Fazendo a substituição $t = \sqrt{1+e^x} \iff x = \ln(t^2-1)$, para $x \in \mathbb{R}$, $t > 1$, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

temos $A = 1$ e $B = -1$. Logo

$$\int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

e assim

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|.$$

c) Fazendo a substituição $\ln x = t \iff x = e^t$, para $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-2}, e^2\}$, $t \neq \pm 2$, temos

$$\int \frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{e^t(4-t^2)}\,e^t\,dt = \int \frac{1}{(2-t)(2+t)}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{A(2+t)+B(2-t)}{(2-t)(2+t)}$$

temos $A = B = 1/4$. Logo

$$\int \frac{1}{(2-t)(2+t)}\,dt = -\frac{1}{4}\ln|2-t| + \frac{1}{4}\ln|2+t| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|$$

e assim

$$\int \frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|.$$

d) Temos

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 3(\cos x - 1)}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x + 3(\cos x - 1)}\,dx \\ &= \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\,dx.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = \cos x \iff x = \arccos t$, com $x \in]0, \pi[$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{t^2-3t+2}\,dt &= \int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,dt \\ &= \int \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\,dt\end{aligned}$$

e assim

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x) + 3(\cos x - 1)}\,dx = \ln\left|\frac{\cos x - 2}{\cos x - 1}\right|.$$

e) Fazendo a substituição $t = \operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{arcsen} t$, com $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos

$$\int \frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\,dx = \int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)^2}\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{(1+t)(1-t)^2}\,dt.$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1-t)^2}$$

temos $A = B = 1/4$, $C = 1/2$ (verifique). Logo

$$\int \frac{1}{(1+t)(1-t)^2}\,dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2(1-t)}$$

e assim

$$\int \frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2(1-\operatorname{sen} x)}.$$

f) Fazendo a substituição $x = \operatorname{sen} t \iff t = \operatorname{arcsen} x$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx \Rightarrow \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt &= \int \cos^2 dt\\ &= \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)\cos(\operatorname{arcsen} x)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$