Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Grupos, Anéis e Módulos — MMAC

Teste 3 (MAP30) - 30 de Novembro de 2023 - 16:30
Duração: 30 minutos + tolerância
Cotação: 20 valores (vale 20% da nota da avaliação contínua)

Apresente todos os cálculos e justificações.

[6,0] 1. Mostre que há exatamente cinco grupos abelianos de ordem 240 (a menos de isomorfismo), descrevendo-os explicitamente através da decomposição por divisores elementares.

2. Seja R um anel comutativo, sejam $a, b \in R$, e seja d um divisor comum de a e b em R. (Em cada quociente R/I denotaremos por $\overline{r}$ a classe $r + I$.)

[4,0] (a) Mostre que está bem definida a função

$$\varphi_0 : R/(a) \times R/(b) \to R/(d)$$

que a cada par $(\overline{r}, \overline{s})$ faz corresponder $\varphi_0(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{rs}$.
Sugestão: note que $rs - r's' = (r - r')s + r'(s - s')$.

[7,0] (b) Mostre que a atribuição $\overline{r} \otimes \overline{s} \mapsto \overline{rs}$ define um homomorfismo de R-módulos

$$\varphi : R/(a) \otimes_R R/(b) \to R/(d).$$

[3,0] 3. Responda apenas a **uma** das duas alíneas seguintes:

(a) Seja $M := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (o grupo abeliano dos números racionais módulo 1). Mostre que

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0.$$

(b) Seja $V = \mathbb{C}[x]/\big((x-2)^2\big) \oplus \mathbb{C}[x]/(x-3)$. Escreva uma forma canónica de Jordan para a transformação linear $T : V \to V$ que é definida por $Tv = xv$ para cada $v \in V$.