DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios Extra Resolvidos de Cálculo Diferencial e Integral I LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - CDI-I -, 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 2. Funções Reais de Variável Real: Limites e Continuidade.

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   RESOLUÇÃO

2. a) Como e^x é crescente, com contradomínio $]0, +\infty[$, o contradomínio de f é $]e^{-2}, +\infty[$. Para $x > 0$ e $y \in \left]e^{-2}, +\infty\right[$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x^2-2} = y \Leftrightarrow x^2 - 2 = \ln y \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln y + 2}.$$

   Logo, a inversa de f é

$$f^{-1} : \left]e^{-2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y + 2},$$

   com contradomínio $CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+$.

   b) O contradomínio da função seno restrita a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é $\operatorname{sen}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Logo, o contradomínio de f é $[-2, 2]$. Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-2, 2]$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen}\frac{y}{2}$$

   (note-se que $\frac{y}{2} \in [-1, 1]$, que é o domínio de $\operatorname{arcsen} x$). Logo, a inversa de f é

$$f^{-1} : [-2, 2] \to \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}\frac{y}{2},$$

   com contradomínio $CD_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Deduza as seguintes identidades:

   a) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$,

   b) $\tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$.

   RESOLUÇÃO

a) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Queremos calcular $\cos\alpha$. De $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, temos $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha \geq 0$, vem

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

b) Sai de a) e de $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ (que vem da definição de função inversa), uma vez que $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Para ver directamente, pode fazer-se assim: Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $x \neq \pm 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Queremos calcular $\tan\alpha$. De $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ temos

$$\tan^2\alpha = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Logo,

$$\tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{|x|}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então $\operatorname{sen}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$. Como $\tan\alpha \geq 0$, temos

$$\tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen}\alpha \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$. Como $\tan\alpha \leq 0$, temos

$$\tan(\operatorname{arcsen} x) = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

a) Se f é crescente (resp. decrescente), então g é crescente (resp. decrescente).

b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

c) arcsen, arctan são crescentes e ímpares, arccos é decrescente.

RESOLUÇÃO

$f : D \to \mathbb{R}$ função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa.

a) Seja f crescente. Como f é injectiva, f é *estritamente crescente*. Logo, para $x, x' \in D$, $x > x' \Leftrightarrow f(x) > f(x')$. Então, para $y, y' \in f(D)$, $y = f(x)$, com $y' = f(x')$ (ou seja, $g(y) = x$, $g(y') = x'$) temos

$$y > y' \Leftrightarrow f(x) > f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow g(y) > g(y').$$

Logo g é (estritamente) crescente.

b) Para $y \in f(D)$, seja $x \in D$, com $y = f(x)$, ou seja, tal que $g(y) = x$. Então $-y = -f(x) = f(-x)$, porque f é ímpar, logo $g(-y) = -x$, e assim $g(-y) = -x = -g(y)$, e g é ímpar.

c) Directamente de a), b) e das propriedades de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$.

5. Mostre, recorrendo à definição de limite em $\mathbb{R}$, que para a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ se tem $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. [1].

RESOLUÇÃO

Por definição, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ se dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Para $f(x) = x^2 + 1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, temos

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 + 1 - a^2 - 1| = |x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a|.$$

Se $x \in V_\delta(a)$, temos $|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$, logo $|x| < \delta + |a|$ (ou ver $|x| = |(x - a) + a| \leq |x - a| + |a| < \delta + |a|$). Assim, para $x \in V_\delta(a)$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| < (\delta + |a| + |a|)|x - a| < (2|a| + \delta)\delta \leq (2|a| + 1)\delta,$$

escolhendo sempre $\delta \leq 1$. Agora para que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, por transitividade, é suficiente escolher $1 \geq \delta > 0$ tal que

$$(2|a| + 1)\delta < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}.$$

Neste caso, temos então $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

6. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário (ou um $R > 0$, suficientemente grande, $R = 1/\varepsilon$), existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

[1]Em particular, f é contínua em qualquer $a \in \mathbb{R}$

Então, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Tomando, por exemplo, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Tomando, por exemplo, $\delta = \varepsilon^2$, mostramos que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

7. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(2x+1)}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^5} - 1}{(x-1)^7}$,

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x}$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{x \arccos x}$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arcsen} x}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$,

RESOLUÇÃO

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1) + x - 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+1} = 1;$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)} = -1;$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} x = 1 \cdot 0 = 0$, uma vez que $\lim_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$ (com $y = x^2$).

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(2x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln(2x+1)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, uma vez que $\lim_{y\to 0} \dfrac{y}{\ln(y+1)} = 1$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ (tomando $y = 1/x \to 0^+$, se $x \to +\infty$).

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1.$

g) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0.$

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7} = \lim_{x\to 1} \dfrac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^5} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 \cdot \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ (tomando $y=(x-1)^5 \to 0$, se $x \to 1$).

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = 1$, tomando $y = \operatorname{sen} x \to 0$, se $x \to 0$.

j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{x \arccos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \dfrac{5}{\cos 5x \arccos x} = 1 \cdot \dfrac{5}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{arcsen} x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$, fazendo a mudança de variável $y = \operatorname{arcsen} x \to 0$, se $x \to 0$.

l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos x} \dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2} \lim_{u\to 1} \dfrac{\ln u}{1-u} = -\dfrac{1}{2}$, fazendo a mudança de variável $u = \cos x \to 1$, se $x \to 0$ e usando $\lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1$.

8. Mostre que se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a} \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^c.$$

RESOLUÇÃO

O limite dado é uma indeterminação da forma 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to a} \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)} = \lim_{x\to a} e^{f(x)\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)} = e^c,$$

já que, fazendo $y = \frac{g(x)}{f(x)} \to 0$, quando $x \to a$,

$$\lim_{x\to a} f(x) \ln\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to a} g(x) \frac{\ln\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\frac{g(x)}{f(x)}} = c \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = c.$$

9. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2} d(x)$, onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet ($d(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?

b) Estude $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe, $\lim_{x\to a} f(x)$.

RESOLUÇÃO

Temos

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}\, d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0, \\ 0, & \text{se } x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x > 0 \wedge x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Para $x \le 0$, temos $f(x) = 0$, logo $f(]-\infty, 0]) = \{0\}$. Para $x > 0$ temos $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$. Logo $f(]0, +\infty[= \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Assim, $CD_f = f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. A função é minorada por 0 e não é majorada, uma vez que $\mathbb{Q}^+$ não é majorado.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe, uma vez que se arranjam dois conjuntos onde os limites relativos são distintos (já que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ são não majorados):

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0.$$

c) Se $a < 0$: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 0 = 0$.

Se $a = 0$: temos sempre $0 \le f(x) \le x$, logo por enquadramento, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Para $a > 0$: não existe limite. Para verificar, podemos usar limites relativos, já que qualquer vizinhança de a contém racionais e irracionais, e

$$\lim_{x\to a, x\in\mathbb{Q}} f(x) = \lim_{x\to a, x\in\mathbb{Q}} x = a, \qquad \lim_{x\to a, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} f(x) = 0.$$

Como os limites relativos são distintos, não existe limite.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\tan x - \operatorname{cotan} x)$? (Relembre que $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$).

RESOLUÇÃO

Sendo f e h duas funções e $a \in \mathbb{R}$, tais que h é contínua em a e f é contínua em $h(a)$, então necessariamente $g = f \circ h$ é contínua em a.

Como tan e cotan são contínuas, respectivamente em $a \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $a \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\tan x - \operatorname{cotan} x$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo f uma função contínua em 0, temos então que $g(x) = f(\tan x - \operatorname{cotan} x)$ é contínua em cada $a \in D$ satisfazendo $\tan a - \operatorname{cotan} a = 0$. Como,

$$\tan a - \operatorname{cotan} a = \tan a - \frac{1}{\tan a} = \frac{\tan^2 a - 1}{\tan a},$$

e, portanto, $\tan a - \operatorname{cotan} a = 0$ equivale a $\tan a = \pm 1$, ou seja $a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que a função dada é necessariamente contínua nestes pontos.

11. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

em que $a \in \mathbb{R}$. Determine a por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0. Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, calcule $F(0)$.

RESOLUÇÃO

f é prolongável por continuidade ao ponto 0 se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, ou seja, se $f(0^+) = f(0^-)$. Temos

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = \frac{1}{2}$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a}.$$

Logo, $a = 2$. Se F é prolongamento por continuidade de f, então $F(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ e $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ -x(x+2), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ de forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0.

(c) Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento determine, justificando, o contradomínio de F.

RESOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right) = \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(x+2) = -\infty$.

(b) Temos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$. Logo f é prolongável por continuidade a 0 sse $\ln\left(\frac{k}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

(c) Em $]-\infty, 0]$, F é dada por um polinómio de grau dois (cujo gráfico é uma parábola), com zeros em 0 e -2, de concavidade voltada para baixo. Logo, terá um máximo em $x = -1$ dado por $F(-1) = f(-1) = 1$. Como F é contínua, o contradomínio de F em $]-\infty, 0]$ é dado por $F(]-\infty, 0]) =]-\infty, 1]$ (usando a)).

Em $\mathbb{R}^+$, $F(x) = \ln\left(\frac{2}{2+x^2}\right)$ é decrescente e $F(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, em particular 1 é o máximo (global) da função. De novo pela continuidade de F e de a), vem que $F(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 0[$ e portanto $CD_f =]-\infty, 1] \cup]-\infty, 0[=]-\infty, 1]$.

13. Seja f a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\text{máx}\{g(x) : x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -1$.
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{1}{1+x^2} = -\infty$.

b) Em $a > 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $\ln \frac{1}{1+x^2}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

Em $a < 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $-e^{\frac{1}{x}}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

c) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{1+x^2} = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Logo existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

d) Se g é o prolongamento por continuidade de f a 0, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

então g é contínua em $\mathbb{R}$ (é contínua em 0 por definição, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque f é). Logo, do Teorema de Weierstrass terá máximo (e mínimo) em qualquer intervalo limitado e fechado. Em particular, em qualquer intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Como $-e^{\frac{1}{x}}$ é crescente (a exponencial é crescente, $\frac{1}{x}$ é decrescente, logo $e^{\frac{1}{x}}$ é decrescente), temos para $x \in [-\varepsilon, 0[$ que $g(x) \le g(0^-) = 0$. Por outro lado, $\ln \frac{1}{1+x^2}$ é decrescente (o logaritmo é crescente e $\frac{1}{1+x^2}$ é decrescente), logo para $x \in]0, \varepsilon]$, $g(x) \le g(0^+) = 0$. Conclui-se que $\text{máx}_{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]} g(x) = g(0) = 0$.

14. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

RESOLUÇÃO

a)
- φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios: a função exponencial, contínua em $\mathbb{R}$ e $-\frac{1}{x^2}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo φ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ψ é dada pela diferença de duas funções: $x \,\text{sen}\, \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$. As funções $\text{sen}\, \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que são dadas pela composição de funções trigonométricas, contínuas em $\mathbb{R}$, e $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $x \,\text{sen}\, \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ψ também o será.

b) φ e ψ são prolongáveis por continuidade a 0 sse existir (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x \to 0} \varphi(x)$, e $\lim_{x \to 0} \psi(x)$, respectivamente. Para φ:

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0.$$

Logo φ é prolongável por continuidade a 0. Quanto a ψ:

- $\lim_{x \to 0} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} = 0$, uma vez que $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\text{sen}\, \frac{1}{x}$ é uma função limitada. Por outro lado,

- $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ não existe; vamos para isso usar a definição, mostrando que, dado $b\in\mathbb{R}$, não é verdade que $\lim_{x\to 0} f(x) = b$, ou seja, que existe um $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\forall\delta > 0\,\exists x\in\mathbb{R}:\quad -\delta < x < \delta \;\text{ e }\; \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right) - b\right| \geq \varepsilon.$$

De facto, escolha-se $\varepsilon = \frac{1}{2}\operatorname{máx}\{|b|, |1-b|\} > 0$, e considerem-se as sucessões $x_n := \frac{1}{2n\pi} \to 0$ e $y_n := \frac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$. Dado $\delta > 0$ arbitrário, podemos tomar n suficientemente grande de forma a que

$$-\delta < x_n, y_n < \delta$$

e

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) - b\right| = |1-b|, \qquad \left|\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) - b\right| = |b|,$$

sendo que um dos valores é certamente igual que ε. Logo $\lim_{x\to 0}\psi(x)$ não existe e ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c)
- $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, e φ é limitada.
- Para ψ: $\cos\frac{1}{x}$ é limitada, com $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. Quanto a $x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

e da mesma forma $\lim_{x\to-\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$ (aliás, a função é par). Logo, como existem em $\mathbb{R}$, os limites em $+\infty$ e $-\infty$, existe $a > 0$ tal que ψ é limitada em $[a, +\infty[$ e em $]-\infty, -a]$. Para $x\in[-a, a]$, temos

$$\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Rightarrow \left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq a.$$

Logo ψ é limitada em $\mathbb{R}$. (Alternativamente, como ψ é prolongável por continuidade a 0, o Teorema de Weierstrass garante que o seu prolongamento contínuo terá máximo e mínimo em $[-a, a]$, logo será limitado e ψ, por consequência, também.)
(Alternativamente, podíamos usar a desigualdade $|\operatorname{sen}(y)| \leq |y|$, $y\in\mathbb{R}$, logo $\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1$, $x\neq 0$, logo $-2 \leq \psi(x) \leq 2$ e ψ é limitada.)

15. Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

RESOLUÇÃO

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 0.$

$\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty.$

c) $CD_f = f(D) = f([0,1[) \cup f(]1,+\infty[)$.

- $f([0,1[)$: se $x \in [0,1[$, então $x - 1 < 0$ e assim $f(x) \leq 0$, ou seja, $f([0,1[) \subset]-\infty, 0]$. Por outro lado, como $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, e f é contínua no seu domínio (por ser o quociente de funções contínuas), do Teorema do Valor Intermédio temos que $]-\infty, 0] \subset f([0,1[)$. Logo, $f([0,1[) =]-\infty, 0]$.
- $f(]1,+\infty[)$: se $x \in]1,+\infty[$, então $f(x) > 0$, ou seja $f(]1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$. Como f é contínua em $]1,+\infty[$, e $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, temos de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, que $]0,+\infty[\subset f(]1,+\infty[)$. Logo, $f(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$.

Conclui-se que $f(D) = \mathbb{R}$.

d)
- (u_n) convergente com $(f(u_n))$ divergente: qualquer sucessão no domínio de f com $u_n \to 1$, por exemplo, $u_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ e $f(u_n) \to -\infty$.
- (v_n) divergente com $(f(v_n))$ convergente: qualquer sucessão no domínio de f com $v_n \to +\infty$, por exemplo, $u_n = n \to +\infty$ e $f(u_n) \to 0$.

16. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Mostre que existe uma única função contínua h, definida em $[a, b]$ e tal que

$$h(x) = \arctan[g(x)^2], \qquad \text{para } x \in]a, b[.$$

Determine o seu contradomínio.

RESOLUÇÃO

Seja $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Queremos ver que existe uma única função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \arctan[g(x)^2],\ x \in]a, b[.$$

Para $x \in]a, b[$: a função h já está definida, de forma única, pela fórmula acima, ou seja, definimos $h(x) = \arctan[g(x)^2]$, $a < x < b$.

Para $x = a$, como h é contínua em a, temos necessariamente

$$h(a) = \lim_{x\to a^+} \arctan[g(x)^2] = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2},$$

e da mesma forma

$$h(b) = \lim_{x\to b^-} \arctan[g(x)^2] = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o contradomínio de h, determinamos primeiro o contradomínio de g: uma vez que g é contínua em $]a, b[$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$, tem-se do Teorema do Valor Intermédio que $g(]a, b[) = \mathbb{R}$. Conclui-se que o contradomínio de g^2 é $[0, +\infty[$ e portanto

$$h(]a, b[) = \arctan([0, +\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $h(a) = h(b) = \frac{\pi}{2}$, temos então que $CD_h = h([a, b]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

17. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet (i.e, $d(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) é apenas contínua em $x = 0$.

RESOLUÇÃO

Temos

$$f(x) = xd(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por definição: para $a \neq 0$: existe $\varepsilon > 0$, por exemplo, $\varepsilon = |a|$, tal que em qualquer vizinhança de a existem pontos x tais que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$: se $a \in \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{Q}$.

Para $a = 0$: $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, por exemplo, $\delta = \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Logo f é contínua em 0.

(Ou por enquadramento.)

Usando limites relativos a subconjuntos: para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos, já que qualquer vizinhança de a contém racionais e irracionais,

$$\lim_{x\to a, x\in\mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x\to a, x\in\mathbb{Q}} x = a,$$

$$\lim_{x\to a, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x\to a, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Conclui-se que se $a \neq 0$, $\lim_{x\to a} xd(x)$ não existe, e portanto f não é contínua em $a \neq 0$. Para $a = 0$,

$$\lim_{x\to 0, x\in\mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x\to 0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} xd(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} xd(x) = 0 = f(0)$$

(já que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Logo f é contínua em 0.

18. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em a e $f(a) > 0$, então existe uma vizinhança de a, $V_\delta(a)$ com $\delta > 0$, tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in V_\delta(a) \Longrightarrow f(x) > 0.$$

RESOLUÇÃO

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em a, tal que $f(a) > 0$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_\delta(a)$, com $\delta > 0$, tal que

$$x \in V_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Como $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $f(a) - \varepsilon > 0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < f(a)$, que existe porque $f(a) > 0$, temos então que

$$x \in V_\delta(a) \Longrightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon > 0.$$

19. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

RESOLUÇÃO

Para $x = 0$, temos $\operatorname{sen}^3 0 + \cos^3 0 = 1$ e para $x = \pi$, $\operatorname{sen}^3 \pi + \cos^3 \pi = -1$. Se $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$, então f é contínua porque é dada pela soma e produto de funções contínuas e $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1 < 0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $x \in]0, \pi[$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$.

20. Mostre que a equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tem pelo menos duas soluções em $\mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$, então as soluções da equação correspondem aos zeros de f. Temos $f(0) = 1$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas, tem-se do Teorema do Valor Intermédio / de Bolzano que existem $c_1 \in]-\pi, 0[$ e $c_2 \in]0, \pi[$ com $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

21. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta\,,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha, \beta[$.

RESOLUÇÃO

Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Vemos que f assume valores arbitrariamente próximos de α e de β e o resultado sai por continuidade.

Dado $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < (\beta - \alpha)/2$, podemos tomar a, b tais que

$$\alpha - \epsilon < f(a) < \alpha + \epsilon < \beta - \epsilon < f(b) < \beta + \epsilon$$

(da definição de limite, existe $R > 0$ tal que podemos tomar quaisquer $a < -R$ e $b > R$) . Aplicamos o teorema do Valor Intermédio no intervalo $[a, b]$ e temos que $[f(a), f(b)] \subset CD_f$. Em particular, $]\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon[\subset CD_f$, para qualquer $\epsilon > 0$, logo $]\alpha, \beta[\subset CD_f$.

22. Seja f uma função contínua num intervalo I.

    a) Justifique que se $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$, com $x_0 < x_1 < x_2$ ou $x_1 < x_2 < x_0$, então existe $c \in I$, $c \neq x_0$ e $f(c) = f(x_0)$.

    b) Mostre que se f é injectiva em I então é estritamente monótona em I.

    c) Considere $g(x) = -e^x$, para $x \leq 0$, $g(x) = e^x$ para $x > 0$. Justifique que g é injectiva em $\mathbb{R}$ e não monótona. Indique um intervalo onde g seja monótona.

    RESOLUÇÃO

a) Tomando a função $g(x) = f(x) - f(x_0)$, tem-se g contínua em I e $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$, logo existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $g(c) = 0$, pelo Teorema do Valor Intermédio, e $c \neq x_0$.

b) Considere-se $x_0, x_1, x_2 \in I$ quaisquer, com $x_0 < x_1 < x_2$. Como f é injectiva, $f(x_0) \neq f(x_1) \neq f(x_2)$. Se f não é estritamente monótona, então existem $x_0 < x_1 < x_2$ com (i) $f(x_0) > f(x_1) < f(x_2)$ ou (ii) $f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$. Vamos ver que (i) é impossível. Da alínea anterior, como f é injectiva, dado que $f(x_0) > f(x_1)$, teríamos $f(x_0) > f(x_2)$. Da mesma forma, como $x_0 < x_1 < x_2$ e $f(x_2) > f(x_1)$ teríamos $f(x_2) > f(x_0)$. Chegamos a uma contradição pelo que (i) é falso. Para (ii) é análogo, ou tomar $-f$. Conclui-se que f é estritamente monótona.

c) g é monótona em $]-\infty, 0]$.

23. a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi(x) = g(1-x^2)$ tem máximo e mínimo.

    b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

    RESOLUÇÃO

a) A função φ é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in [0, +\infty[\}$, uma vez que é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios. Temos

$$1 - x^2 \in [0, +\infty[\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1],$$

ou seja, $D = [-1, 1]$. Como D é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass garante que φ tem máximo e mínimo em D.

b) Não. Neste caso, o domínio de φ seria $]-1, 1[$. Tomando uma função g ilimitada numa vizinhança de 0, teríamos que φ seria ilimitada em vizinhanças de -1 e 1. Por exemplo, se $g(x) = \ln(x)$, então $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to -1^+} \varphi(x) = -\infty$.

24. Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$$

Mostre que f tem mínimo e que o contradomínio de f é da forma $[f(c), +\infty[$, para algum $c \in]-1, 1[$.

RESOLUÇÃO

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, fixo $R > 0$, existem $a, b \in]-1, 1[$ tais que se $-1 < x < a$ ou se $b < x < 1$, então $f(x) > R$. Podemos assumir $a < 0 < b$ e tomar $R \geq f(0)$. Do Teorema de Weierstrass, sendo contínua, a função terá mínimo em $[a, b]$, i.e., existe c tal que $f(x) \geq f(c)$, $x \in [a, b]$, em particular, $f(0) \geq f(c)$, já que $a < 0 < b$. Mas se $x \in]-1, a[\cup]b, 1[$, então $f(x) > R \geq f(0) \geq f(c)$, logo $f(c)$ é mínimo em $]-1, 1[$. O contradomínio sai do Teorema de Bolzano / Valor Intermédio.

25. Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

a) Prove que f é limitada.

b) Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

RESOLUÇÃO

a) Como existe (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, temos que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$, ou seja num intervalo $[b, +\infty[$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, f será limitada num intervalo $]-\infty, a]$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, por ser contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f é limitada em $[a, b]$. Logo é limitada em $\mathbb{R}$.

b) Considerando a função $h(x) = f(x) - x$, temos $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -x = \mp\infty$. Logo, existem x_0, x_1 tais que $h(x) > 0$ para $x \leq x_0$ e $h(x) < 0$, para $x \geq x_1$. Como h é contínua e h muda de sinal em $\mathbb{R}$, o Teorema de Bolzano garante que existe c tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

c) Para $g(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$, temos $g(x) \leq 1$ e $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Agora, se o produto dos dois limites indicados é negativo, ou seja, se os limites indicados têm sinais diferentes, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, logo como f é contínua, o Teorema de Bolzano garante que existe c tal que $f(c) = 0$. Temos neste caso $g(c) = 1 = \max g$.