Soluções dos Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI 1.º Semestre 2024/25

1 Capítulo 1. Números reais: revisões e propriedades

Expressões algébricas, inequações

1. a) $-3 \leq x < -2 \vee 2 < x \leq 3$
   b) $-1 \leq x \leq 1$
   c) $x \leq 0 \vee x = 1$
   d) $x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x > 1$
   e) $0 < x < 1 \vee x < -1$
   f) $x = 1$
   g) $x = 1 \vee x = 2$
   h) $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 2$
   i) $x < -4 \vee x > 2$
   j) $x < 0$
   k) $x = 0$
   l) $0 < x \leq 1$
   m) $0 < x < e^4$
   n) $x < 0$
   o) $x \leq 1$
   p) $-1 < x < 1 \vee 3 < x < 5$
   q) $-2 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 2$

2. a) $]-1, +\infty[$, $\inf = -1$, não existe mínimo, supremo nem máximo;
   b) $]0, +\infty[$, $\inf = 0$, não existe mínimo, supremo nem máximo;
   c) $[-4, 1]$, $\inf = \min = -4$, $\sup = \max = 1$;
   d) $]-\infty, -2] \cup \{1\} \cup [2, +\infty[$, não existe ínfimo, mínimo, supremo nem máximo;
   e) $\{-1\} \cup [0, 2]$, $\inf = \min = -1$, $\sup = \max = 2$;
   f) $[-2, 2]$, $\inf = \min = -2$, $\sup = \max = 2$;
   g) $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, 3[$, $\sup = 3$, não existe máximo, ínfimo nem mínimo.

3. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 40; d) $\frac{7}{3}$.

4. Pode determinar-se que $A =]-1, 4[$, logo -1 (ou qualquer número menor que -1) é um minorante e 4 (ou qualquer número maior que 4) é um majorante. No entanto, procurem fazer este exercício <u>sem</u> determinar o conjunto explicitamente.

5. a) $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = 1$, $\max A$ não existe;
   b) $\inf B = \min B = 3$; $\max B$ e $\sup B$ não existem;
   c) $\inf C, \min C$ não existem, $\max C = \sup C = \sqrt{2}$;
   d) $\sup D = \max D = \frac{3}{2}$, $\inf D = 1$, $\min D$ não existe;
   e) $\inf A \cup D = \min A \cup D = -2$, $\sup A \cup D = \max A \cup D = \frac{3}{2}$;
   f) $\inf B \setminus \mathbb{Q} = 3$; $\min B \setminus \mathbb{Q}$, $\sup B \setminus \mathbb{Q}$ e $\max B \setminus \mathbb{Q}$ não existem;
   g) $\inf C \cap \mathbb{Q}$ e $\min C \cap \mathbb{Q}$ não existem, $\sup C \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2}$, $\max C \cap \mathbb{Q}$ não existe;
   h) $\inf(A \cup B) \setminus \mathbb{Q} = 0$; $\min(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$, $\sup(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$ e $\max(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$ não existem.

6. $\sup A$ e $\max A$ não existem, porque A não é majorado, $\inf A = 0 \notin A$, $\min A$ não existe; $\inf B = \min B = -1$, $\sup(A \cup B)$ e $\max(A \cup B)$ não existem.

7. b) $A \cap B = \left[-1+\sqrt{2},\, 3\right] \cap \mathbb{Q}$: $\sup A \cap B = 3$, $\text{máx}\, A \cap B = 3$, uma vez que $3 \in A \cap B$, $\inf A \cap B = -1+\sqrt{2}$, $\min A \cap B$ não existe, porque $-1+\sqrt{2} \notin A \cap B$.

   $C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}\right\}$: $\sup C = \text{máx}\, C = 1$ (porque $1 \in C$ e 1 é majorante), $\inf C = 0$, $\min C$ não existe porque $0 \notin C$.

8. b) $A \cap \mathbb{Q} = \left(\left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[\right) \cap \mathbb{Q}$. $\sup A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A \cap \mathbb{Q} = -\sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem mínimo.

   $B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B = \min B = \sqrt{2}$, $\sup B$ e $\text{máx}\, B$ não existem, porque B não é majorado.

   $B \cap \mathbb{Q}$: $B \cap \mathbb{Q} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B \cap \mathbb{Q} = \min B \cap \mathbb{Q} = 2$, $\sup B \cap \mathbb{Q}$ e $\text{máx}\, B \cap \mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

9. b) $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, por exemplo: $A = [0,1]$, $B = [\frac{1}{2}, 2]$: $A \cap B \neq \emptyset$; $A = \{0,1\}$ e $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$: $A \cap B = \emptyset$.

Somatórios

11. a) 12 ; b) 32 ; c) 46.

12. a) $\sum\limits_{k=4}^{19}(2k-1)$, b) $\sum\limits_{k=2}^{9} 2^{-k}$, c) $\sum\limits_{k=2}^{20}(-1)^k \frac{k}{k+1}$, d) $\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^{k+1} k^2$.

13. a) $-20/21$; b) $12 - 4 \cdot 3^{21} = -414841412800$.

Indução

14. Usando somatórios: a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3$;
    b) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots (-1)^{n+1} n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i$

15. Quando $n \to +\infty$, tem-se: a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \to 1$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \to 1$,

    f) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to +\infty$.

19. c) $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.