Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 1. Números reais: revisões e propriedades

Exercícios recomendados para as aulas práticas da segunda semana terão o símbolo **.(ex.: 2, 7, 15, 19)

Expressões algébricas, inequações. Supremo e ínfimo de um conjunto

1. Resolva as seguintes equações e inequações:

   a) $4 < x^2 \leq 9$

   b) $x^2 \leq 2 - x^4$,

   c) $x^3 + x \leq 2x^2$,

   d) $\dfrac{x-1}{x^2-1} \leq 1$,

   e) $x < \dfrac{1}{x}$,

   f) $\sqrt{1-x} = x - 1$

   g) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$,

   h) $\dfrac{x^2(1+x)}{(x^2+1)(2-x)} > 0$

   i) $\sqrt[3]{x^2+2x} > 2$,

   j) $e^{x^3} < 1$,

   k) $e^{-2x} - 2e^{-x} \leq -1$,

   l) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$,

   m) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right) < 4$,

   n) $x < |x|$,

   o) $|x| \leq |x-2|$,

   p) $1 < |x-2| < 3$

   q) $\dfrac{x^4-16}{|x-1|} \leq 0$,

2. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como intervalo ou reunião de intervalos, indicando o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, se existirem em $\mathbb{R}$:

   a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}$, **

   b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^4-1}{x^3} \leq x\right\}$,**

   c) $\{x \in \mathbb{R} : |3x-4| \geq x^2\}$,**

   d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1|(x^2-4) \geq 0\}$,

   e) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-1| \leq |x+1|\}$,

   f) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| - 2 \leq 0\}$,

   g) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$,

3. Indique o maior $\varepsilon > 0$ tal que A contém uma vizinhança-ε de x_0:

   a) $A = [0,1],\ x_0 = \frac{1}{2}$;

   b) $A = [0,1],\ x_0 = \frac{1}{3}$;

   c) $A = [-20, +\infty[,\ x_0 = 20$;

   d) $A = [-2,3] \cup]4,+\infty[,\ x_0 = \frac{2}{3}$.

4. Mostre que o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| + |x-1| < 5\}$$

   é limitado e indique um majorante e um minorante de A.

5. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, os respectivos supremo, infimo, máximo e mínimo:

   a) $A = \{-2\} \cup\ [0,1[$;**.
   b) $B = [3, +\infty[$**.
   c) $C =]-\infty, \sqrt{2}]$**.
   d) $D = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$**.
   e) $A \cup D$**.
   f) $B \setminus \mathbb{Q}$**.
   g) $C \cap \mathbb{Q}$
   h) $(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$.**.

6. Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \ln x} > 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

   Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

7. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.
   b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

8. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\,\cup\, \left]1, \sqrt{2}\right]$.
   b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

9. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.
   b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \ \wedge\ \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

10. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e majorado, tal que $\sup A = 1$. Mostre que existe um ponto de A no intervalo $[\frac{1}{3}, 1]$.

Somatórios

11. Determine os valores numéricos das seguintes somas:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{2} (3k^2 - 1) \,; \qquad \text{b) } \sum_{i=2}^{4} i! \,; \qquad \text{c) } \sum_{j=3}^{25} 2 \,.$$

12. Escreva em forma de somatório:

a) $7 + 9 + 11 + 13 + \cdots + 37$

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{512}$

c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \cdots + \frac{20}{21}$

d) $1 - 4 + 9 - 16 + ... - 100.$

13. Calcule

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \left(3^k - 3^{k+2} \right)$.

Indução Matemática

14. Mostre pelo princípio de indução matemática que:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots (-1)^{n+1} n = \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^n (2n+1)\right)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.**.

c) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ para qualquer $n \geq 2$.

d) $4^n + 6n - 1$ é múltiplo de 9 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

e) $n! \geq 2^{n-1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.**.

f) $n! \leq n^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Escreva a proposição das duas primeiras alíneas usando somatórios.

15. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,**.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1) 2^k = n 2^{n+1}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!}$.

f) $2\sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

Analise o comportamento quando $n \to \infty$ das duas primeiras e última somas acima.

16. Considere números reais $u_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, tais que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < r$$

para algum $r > 0$. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $u_n < r^n u_0$.

17. Prove por indução matemática que, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

(Sugestão: use a Desigualdade Triangular $|a+b| \leq |a| + |b|$.)

18. Considere as sucessões reais (u_n), (v_n) e (w_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 4, \\ u_{n+1} = -2u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 1, \\ v_{n+1} = \dfrac{(n+2)v_n}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = \sqrt[3]{5}, \\ w_{n+1} = \sqrt[3]{4w_n^3 - 3}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-2)^{n+1}, \qquad v_n = (n+1)!/2^n, \qquad w_n = \sqrt[3]{2^{2n}+1}$$

19. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:**.

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{4} \end{cases} \quad .$$

a) Mostre usando indução que $u_n < \frac{3}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e determine $\lim u_n$.