

## Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 5 de Janeiro de 2015

### Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores- Alameda

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x)^{(x-1)}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_0^{\log(2+x)} e^{tg t} dt.$$

(4,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{2 \cos x}{4 + \sin^2 x}, \quad \text{b) } x^2 \log \sqrt{x}, \quad \text{c) } \frac{e^x}{e^{2x} - 1}.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações  $x = y^2$  e  $x^2 = -y$ .

(3,5) **IV.** Seja  $f \in C^1(\mathbb{R})$  uma função tal que  $f(e) = 0$  e que tem em  $x = e$  um extremo local. Seja  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\phi(x) = \int_{\log x}^{e^x} f(y) dy.$$

Calcule  $\phi'$  e  $\phi''$  e mostre que  $\phi'(1) + \phi''(1) = -f'(0)$ .

(3,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + 2}{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^5 + 1}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n! + n^{10}}.$$

(3,0) **VI.** a) Sendo  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  e  $\phi$  o seu integral indefinido com origem no ponto 2, mostre que

$$\max_{t \in I} |\phi(t)| \leq 3 \max_{t \in I} |\varphi(t)|$$

onde  $I = [2, 5]$ .

b) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo  $g \in C(\mathbb{R})$  e  $a, c, d \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_c^d g(u) du = \int_{a-d}^{a-c} g(a-u) du.$$

## Resolução

I. a) Como  $(\log x)^{x-1} = e^{(x-1)\log(\log x)}$  consideramos primeiro

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \log(\log x)$$

Trata-se de uma “indeterminação”  $0 \cdot \infty$  que avaliamos usando regra de Cauchy sucessivamente da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(\log x)}{1/(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x \log x}}{-1/(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{(x-1)^2}{x \log x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{2(x-1)}{\log x + 1} = 0.$$

Daí que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x)^{x-1} = e^0 = 1.$$

b) Notando que  $x - \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow 0^-$  obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x - \frac{1}{x}}}{x^2} = +\infty.$$

c) Quando  $x \rightarrow -1$  temos  $\log(2+x) \rightarrow 0$  pelo que o integral tende para 0 pela continuidade do integral indefinido. Assim sendo estamos na presença de uma “indeterminação”  $0/0$  que tentaremos resolver usando regra de Cauchy<sup>1</sup>. Note-se que a diferenciabilidade do integral vai ser assegurada pelo teorema fundamental do cálculo e pelo teorema de derivação da função composta pois a função  $t \mapsto e^{\text{tg } t}$  é contínua em  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  e  $x \mapsto \log(2+x)$  é diferenciável em  $] -2, +\infty[$ . Sendo assim

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_0^{\log(2+x)} e^{\text{tg } t} dt = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{\text{tg}(\log(2+x))}}{2+x} = \frac{e^{\text{tg}(\log(2-1))}}{2-1} = 1.$$

II. a)

$$\int \frac{2 \cos x}{4 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 + \left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} dx = \text{arctg} \left( \frac{\sin x}{2} \right).$$

b)

$$\int x^2 \log \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \log x dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} \right).$$

c) Usando a mudança de variável  $e^x = t$  e decomposição em frações simples obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx &= \int \frac{t}{t^2 - 1} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt \\ &= \frac{1}{2} (\log |t-1| - \log |t+1|) = \frac{1}{2} (\log |e^x - 1| - \log(e^x + 1)). \end{aligned}$$

III.

$$\int_0^1 -x^2 + \sqrt{x} dx = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

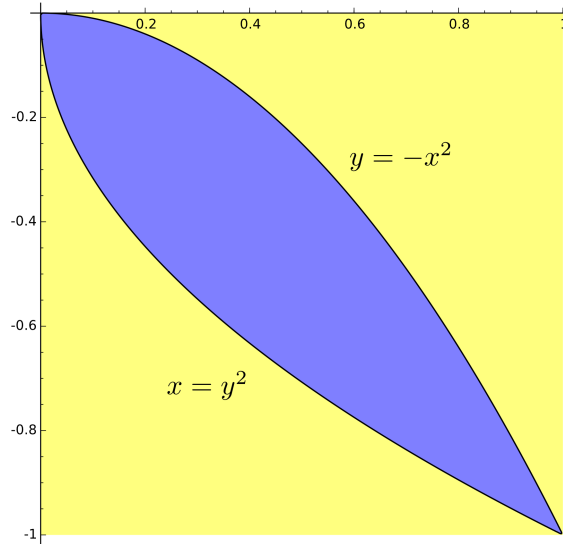


Figura 1: A região de que se pretende calcular a área.

**IV.** Sendo  $f$  diferenciável e com um extremo em 0 devemos ter  $f'(e) = 0$ .

Usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta obtemos

$$\phi'(x) = e^x f(e^x) - \frac{1}{x} f(\log x)$$

$$\phi''(x) = e^{2x} f'(e^x) + e^x f(e^x) - \frac{1}{x^2} f'(\log x) + \frac{1}{x^2} f(\log x),$$

donde em particular

$$\phi'(1) = ef(e) - f(\log 1) = -f(0),$$

$$\phi''(1) = ef'(e) + ef(e) - f'(\log 1) + f(\log 1) = f(0) - f'(0),$$

e daí segue a igualdade pretendida.

**V.** a) Como

$$0 < \frac{\sqrt{n} + 2}{n^2} \leq \frac{3\sqrt{n}}{n^2} = \frac{3}{n^{3/2}}$$

a convergência (absoluta) decorre por comparação com a série convergente  $\sum \frac{3}{n^{3/2}}$ .

b) Como

$$0 \leq \frac{1 + (-1)^n}{n^5 + 1} \leq \frac{2}{n^5}$$

a convergência (absoluta) decorre por comparação com a série convergente  $\sum \frac{2}{n^5}$ .

c) Seja  $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n! + n^{10}}$ . Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2(n! + n^{10})}{(n+1)! + (n+1)^{10}} = \frac{2(1 + n^{10}/n!)}{n+1 + (n+1)^{10}/n!} = 0 < 1.$$

Daí que a série seja absolutamente convergente.

- VI. a) Antes do mais note-se que ambos os máximos existem por aplicação do teorema de Weierstrass a  $|\varphi|$ , que é contínua em  $[2, 5]$ , e a  $|\phi|$ , que também é contínua (por continuidade do integral indefinido e do módulo). Adicionalmente, usando a monotonia do integral, tem-se, para qualquer  $t \in I = [2, 5]$ ,

$$|\phi(t)| = \left| \int_2^t \varphi(x) dx \right| \leq \int_2^t |\varphi(x)| dx \leq \int_2^t \max_{t \in I} |\varphi(t)| dx \leq (t - 2) \max_{t \in I} |\varphi(t)|.$$

Assim,

$$\max_{t \in I} |\phi(t)| \leq 3 \max_{t \in I} |\varphi(t)|.$$

- b) Designe-se por  $G$  uma primitiva de  $g$  (sendo contínua, é primitivável). Como  $\frac{d}{du}(G(a - u)) = -g(a - u)$  a função  $-G(a - u)$  é uma primitiva de  $g(a - u)$ . Daí que aplicando regra de Barrow aos dois lados da identidade a demonstrar obtém-se

$$\int_c^d g(u) du = G(d) - G(c),$$
$$\int_{a-d}^{a-c} g(a - u) du = -G(a - (a - c)) - (-G(a - (a - d))) = G(d) - G(c).$$