Exame de Mecânica Aplicada II – Época Especial

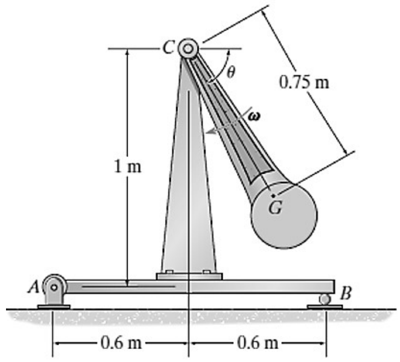
Este **exame** é constituído por **4 perguntas** e tem a duração total de **120 minutos**.
Justifique convenientemente todas as respostas apresentando cálculos intermédios.

Responda a cada pergunta usando tinta azul ou preta em folhas separadas.
Não é permitida a utilização de calculadoras, ou de quaisquer outros dispositivos, com capacidades gráficas e/ou de comunicação.

Pergunta 1 **(6 Val.)**

Um pêndulo com uma massa $m = 100$ kg e um raio de giração, em torno do respetivo centro de massa G, $k_G = 250$ mm, é libertado do repouso quando $\theta = 0°$.

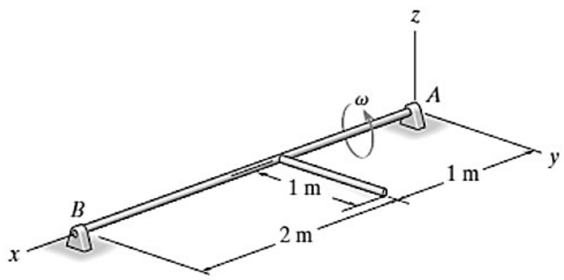
Para $\theta = 90°$, calcule os esforços em C no pêndulo, bem como as reações em A e B.



Pergunta 2 **(6 Val.)**

A estrutura representada encontra-se suportada em A e B por apoios que desenvolvem forças exclusivamente nas direções y e z. Esta estrutura está sujeita a um momento $\vec{M} = 40\vec{\imath}$ Nm, exibindo no instante ilustrado na figura uma velocidade angular $\vec{\omega} = 2\vec{\imath}$ rad/s.

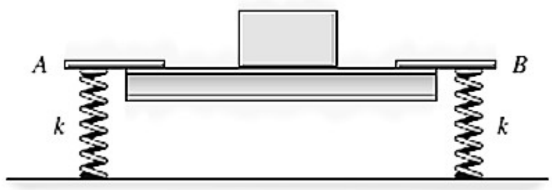
Determine as reações nos apoios para o instante representado, bem como a aceleração angular da estrutura. Assuma que a massa por unidade de comprimento da estrutura toma o valor de 5 kg/m.



Pergunta 3 **(3 Val.)**

Uma viga uniforme encontra-se suportada, nas respetivas extremidades A e B, por duas molas com a mesma constante de rigidez k.

Quando a viga é colocada a vibrar sem suportar nenhuma carga, exibe um período de vibração vertical de 0,83 s. Quando uma massa de 50 kg é colocada sobre o centro da viga, tal como ilustrado na figura, o período de vibração vertical altera-se para 1,52 s. Nestas condições, calcule o valor da rigidez k.



(continua no verso)

Pergunta 4 **(5 Val.)**

Considere o sistema de coordenadas espirais logarítmicas (α, β), definido em função das coordenadas polares (r, θ) por: $\begin{cases} \alpha = \theta - k \log r \\ \beta = k\theta + \log r \end{cases}$, onde k é uma constante.

a) Determine as matrizes da transformação direta e inversa. **[1 Val.]**

b) Determine as matrizes da métrica covariante e contravariante de (α, β), e verifique se este sistema de coordenadas é ortogonal. **[2 Val.]**

c) Mostre que $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -k/(1+k^2)$, $\Gamma^{\beta}_{\beta\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = -\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = k/(1+k^2)$, e determine a expressão da aceleração em coordenadas físicas no novo sistema de coordenadas. **[2 Val.]**

<u>Nota</u>: se não resolveu as alíneas anteriores, considere que a métrica no sistema de coordenadas (α, β) é dada por $g_{i'j'} = [r^2/(1+k^2)]\delta_{i'j'}$.

Formulário

Lei de transformação tensorial:

$$T^{i_1' \dots i_p'}_{j_1' \dots j_q'} = |X|^k \, X^{i_1'}_{i_1} \cdots X^{i_p'}_{i_p} \, X^{j_1}_{j_1'} \cdots X^{j_q}_{j_q'} \, T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \,, \quad X \equiv \det\left(X^{i'}_{i}\right)$$

Símbolos de *Christoffel* em coordenadas ortogonais:

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \; i \neq j, j \neq k, i \neq k$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \; i \neq j$$

$$\Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}, \; i \neq j$$

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}, \; \text{para todos os índices iguais.}$$

Aceleração em coordenadas curvilíneas:

$$a^i = \dot{v}^i + \Gamma^i_{jk} v^j v^k$$

Resolução

Pergunta 1

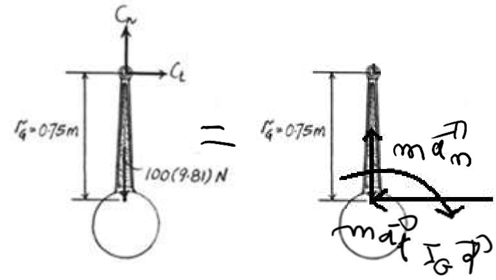
Entre $\theta = 0°$ e $\theta = 90°$ há <u>Conservação da Energia Mecânica</u> (só o peso, força conservativa, provoca trabalho). Assim sendo, considerando $V_G = 0$ em C, em repouso no instante 1 e rotação pura em torno de C, a velocidade no instante 2 ($\theta = 90°$):

$$E_1 = V_{G1} + T_1 = 0 + 0 = 0\,J$$

$$E_2 = V_{G2} + T_2 = mgh + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = 100\,(9.81)(-0.75) + \frac{1}{2}(I_G + mh^2)\omega^2$$

$$= -735.75 + \frac{1}{2}(100\;0.25^2 + 100\;0.75^2)\omega^2 = -735.75 + \frac{1}{2}(6.25 + 56.25)\omega^2 \rightarrow \omega = 23.54\,rad/s$$

Dada a rotação pura em $\theta = 90°$: $\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t} = 0.75\omega^2 \uparrow + 0.75\alpha \leftarrow$



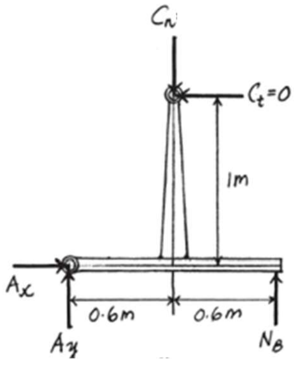
DO D.C.L.

$\circlearrowleft + \sum M_C = I_C\alpha \Rightarrow 0 = I_C\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

$\xrightarrow{+} C_x = m a_t \Rightarrow C_x = m\,0.75\alpha = 0$

$+\uparrow\ C_y = m a_n \Rightarrow C_y = 100\;0.75(23.54)^2 = 41.56\ kN$

$\vec{C} = 41.56\,kN \uparrow$



DO D.C.L.

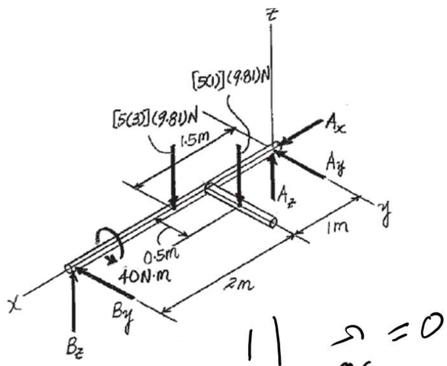
$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

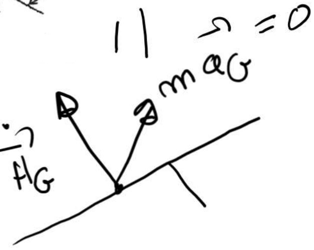
(SIMETRIA $\Rightarrow A_y = N_B$)

$+\uparrow\ \sum F_y = 0 \Rightarrow -41.56 + 2A_y = 0 \Rightarrow A_y = 20.78\,kN$

$\vec{A} = \vec{B} = 20.78\,kN \uparrow$

Pergunta 2





Equations of Motions. The inertia properties of the assembly are

$$I_x = \frac{1}{3}[5(1)](1^2) = 1.6667 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{3}[5(3)](3^2) + \left[0 + [5(1)](1^2)\right] = 50.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3}[5(3)](3^2) + \left\{\frac{1}{12}[5(1)](1^2) + [5(1)](1^2 + 0.5^2)\right\} = 51.67 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{xy} = 0 + [5(1)](1)(0.5) = 2.50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_{yz} = I_{zx} = 0$$

with $\omega_x = 2$ rad/s, $\omega_y = \omega_z = 0$ and $\dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ by referring to the FBD of the assembly,

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x; \qquad 40 - [5(1)](9.81)(0.5) = 1.6667\,\dot{\omega}_x$$

$$\dot{\omega}_x = 9.285 \text{ rad/s}^2$$

$$\Sigma M_y = -I_{xy}\,\dot{\omega}_x; \qquad [5(1)](9.81)(1) + [5(3)](9.81)(1.5) - B_z(3) = -2.50(9.285)$$

$$B_z = 97.6625 \text{ N} = 97.7 \text{ N}$$

$$\Sigma M_z = -I_{xy}\,\omega_x^2; \quad -B_y(3) = -2.50(2^2) \qquad B_y = 3.3333 \text{ N} = 3.33 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = M(a_G)_x; \qquad A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = M(a_G)_y; \; -A_y - 3.3333 = [5(1)]\left[-2^2(0.5)\right] \; A_y = 6.6667 \text{ N} = 6.67 \text{ N}$$

$$\Sigma F_z = M(a_G)_z; \quad A_z + 97.6625 - [5(3)](9.81) - [5(1)](9.81) = [5(1)][9.285(0.5)]$$

$$A_z = 121.75 \text{ N} = 122 \text{ N}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = I_x\dot{\omega}_x\vec{i} - I_{xy}\dot{\omega}_x\vec{j} - I_{xz}\dot{\omega}_x\vec{k}$$

$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_x = 9.285$ RAD/s^2 $\vec{i}$

$\vec{A} = 667\vec{j} + 122\vec{k}$ N

$\vec{B} = 3.33\vec{j} + 97.7\vec{k}$ N

Pergunta 3

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{\tau^2}{(2\pi)^2} = \frac{m}{k}$$

$$\frac{(0.83)^2}{(2\pi)^2} = \frac{m_B}{2k}$$

$$\frac{(1.52)^2}{(2\pi)^2} = \frac{m_B + 50}{2k}$$

LOGO

$$m_B = 0.03490k$$

$$m_B + 50 = 0.1170k$$

$$m_B = 21.2 \text{ kg}$$

$$k = 609 \text{ N/m}$$

Pergunta 4

a) A matriz de transformação directa:

$$X^{i'}_{i} \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = \begin{bmatrix} -k/r & 1 \\ 1/r & k \end{bmatrix}.$$

A matriz de transformação inversa é a inversa de $X^{i'}_{i}$:

$$X^{i}_{i'} \equiv \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = -\frac{r}{k^2+1}\begin{bmatrix} k & -1 \\ -1/r & -k/r \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2+1}\begin{bmatrix} -kr & r \\ 1 & k \end{bmatrix}.$$

b) A matriz de métrica covariante:

$$[g_{i'j'}] = [X^{i}_{i'}]^T [g_{ij}] [X^{j}_{j'}]$$

, sendo que $[g_{ij}]$ é a matriz de métrica covariante de coordenadas polares:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$[g_{i'j'}] = \frac{1}{(k^2+1)^2}\begin{bmatrix} -kr & 1 \\ r & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -kr & r \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{r^2}{k^2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A métrica contravariante é a inversa da covariante:

$$[g^{i'j'}] = \frac{k^2+1}{r^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema de coordenadas é ortogonal porque as componentes da métrica fora da diagonal são nulas.

c) É necessário primeiro obter as componentes da métrica covariante em ordem a α e β:

$$-k\alpha = -k\theta + k^2 \log r$$

$$+ \quad \beta = k\theta + \log r$$

$$= \quad \beta - k\alpha = (k^2+1)\log r \Rightarrow r^2 = \exp\left[\frac{2(\beta - k\alpha)}{k^2+1}\right].$$

Deste modo, as métricas covariante e contravariante podem ser escritas como:

$$[g_{i'j'}] = \frac{\exp\left[\frac{2(\beta-k\alpha)}{k^2+1}\right]}{k^2+1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$[g^{i'j'}] = (k^2+1)\exp\left[-\frac{2(\beta-k\alpha)}{k^2+1}\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Logo: $\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} = \frac{-2k}{(k^2+1)^2}\exp\left[\frac{2(\beta-k\alpha)}{k^2+1}\right]$, $\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\beta} = \frac{2k}{(k^2+1)^2}\exp\left[\frac{2(\beta-k\alpha)}{k^2+1}\right]$,

$\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} = \frac{2k}{(k^2+1)^2}\exp\left[\frac{2(\beta-k\alpha)}{k^2+1}\right]$, $\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha} = \frac{-2k}{(k^2+1)^2}\exp\left[\frac{2(\beta-k\alpha)}{k^2+1}\right]$.

Notando que qualquer destas derivadas a multiplicar pelas entradas da diagonal da métrica contravariante resulta em: $\mp\frac{2k}{k^2+1}$. Usando o formulário para calcular os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha} = -\frac{k}{k^2+1}\ ;\ \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\beta}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha} = -\frac{k}{k^2+1};$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha} = \frac{k}{k^2+1}\ ;\ \Gamma^{\beta}_{\beta\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\beta}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\beta} = \frac{k}{k^2+1};$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} = \frac{k}{k^2+1}\ ;\ \Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2}g^{\beta\beta}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} = -\frac{k}{k^2+1}.$$

Igualmente do formulário, para as componentes da aceleração:

$$a^\alpha = \dot v^\alpha + \Gamma^\alpha_{jk} v^j v^k = \dot v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(v^\alpha)^2 + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(v^\beta)^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta ;$$

$$a^\beta = \dot v^\beta + \Gamma^\beta_{jk} v^j v^k = \dot v^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(v^\alpha)^2 + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(v^\beta)^2 + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta .$$

Substituindo os valores determinados para o símbolo de Christoffel:

$$a^\alpha = \dot v^\alpha + \frac{k}{k^2+1}\left[-(v^\alpha)^2 + (v^\beta)^2 + 2 v^\alpha v^\beta\right] ,$$

$$a^\beta = \dot v^\beta + \frac{k}{k^2+1}\left[-(v^\alpha)^2 + (v^\beta)^2 - 2 v^\alpha v^\beta\right] .$$

As componentes físicas são determinadas a partir das componentes não-físicas multiplicando-as pelo correspondente factor de escala:

$$\underline{\underline{a^{(\alpha)}}} = a^\alpha h_\alpha = \frac{\exp\left[\frac{(\beta - k\alpha)}{k^2+1}\right]}{\sqrt{k^2+1}}\, \dot v^\alpha + \frac{k \exp\left[\frac{(\beta - k\alpha)}{k^2+1}\right]}{(k^2+1)^{3/2}}\left[-(v^\alpha)^2 + (v^\beta)^2 + 2 v^\alpha v^\beta\right] ;$$

$$\underline{\underline{a^{(\beta)}}} = a^\beta h_\beta = \frac{\exp\left[\frac{(\beta - k\alpha)}{k^2+1}\right]}{\sqrt{k^2+1}}\, \dot v^\beta + \frac{k \exp\left[\frac{(\beta - k\alpha)}{k^2+1}\right]}{(k^2+1)^{3/2}}\left[-(v^\alpha)^2 + (v^\beta)^2 - 2 v^\alpha v^\beta\right] .$$