Medida e Integração
2022/2023

Teste de Recuperação de 29 de Junho de 2023 - 16h30
Duração: 45 minutos

TESTE 1

1. (1,5 val.) Dado $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, calcule
$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} (\cos(x))^n f(x) dx.$$
R. Temos
$$\begin{cases} (\cos(x))^n f(x) \to 0, & x \neq \pi\mathbb{Z}(\text{em particular, q.t.p.}) \\ |(\cos(x))^n f(x)| \leq |f(x)| \text{ integrável, pois } f \in L^1(\mathbb{R}, dx). \end{cases}$$
Logo, pelo teorema da convergência dominada, o limite pedido é 0.

2. (1,5 val.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^{3/2}} e^{x/y}, & 0 < x < y \\ 0, & c.c. \end{cases}.$$
Indique se f é integrável em $\mathbb{R}^2$.
R. Como
$$f(x,y) = \frac{1}{y^{3/2}} e^{x/y} \mathbb{1}_{0<x<y},$$
f é o produto de uma função continua pela indicatriz de um conjunto mensurável, logo é mensurável. Pelo teorema de Tonelli, como a medida de Lebesgue é σ-finita,
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{1}{y^{3/2}} e^{x/y} dx \right) dy = \int_0^\infty \frac{e-1}{y^{1/2}} dy = \infty.$$
Logo f não é integrável.

3. (1,5 val.) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que, se $f : X \to \mathbb{R}$ for uma função μ-integrável tal que
$$\int_A f(x) d\mu(x) \geq 0, \text{ para todo o } A \in \mathcal{A},$$
então $f \geq 0$ μ-q.t.p. (Sug. considere $A_n = \{x \in X : f(x) \leq -1/n\}$).
R. Temos
$$0 \leq \int_{A_n} f(x) d\mu(x) \leq \int_{A_n} -1/n d\mu(x) = -\mu(A_n)/n$$
o que implica $\mu(A_n) = 0$ para qualquer n. Logo $A = \cup_n A_n = \{x \in X : f(x) < 0\}$ tem medida nula e portanto $f \geq 0$ μ-q.t.p..

4. (1,5 val.) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $B_n \in \mathcal{A}$ uma sucessão crescente de conjuntos tais que
$$B_n \nearrow X, \quad \mu(B_{n+1}) \leq \mu(B_n) + \frac{1}{2^n}.$$
Mostre que $\mu(X) < \infty$.
R. Se não se assumir que $\mu(B_1) < \infty$, existe o contra-exemplo $B_n = \mathbb{R}$ e μ a medida de Lebesgue.

Assumindo então que $\mu(B_1) < \infty$, temos que

$$X = B_1 + \sum_{j\geq 1} B_{j+1} \setminus B_j$$

e portanto

$$\mu(X) = \mu(B_1) + \sum_{j\geq 1} \mu(B_{j+1} \setminus B_j) \leq \mu(B_1) + \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2^j} \leq \mu(B_1) + 1 < \infty.$$

Medida e Integração
2022/2023

Teste de Recuperação de 29 de Junho de 2023 - 16h30
Duração: 45 minutos

TESTE 2

Nos exercícios abaixo, Λ é a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e λ a medida de Lebesgue.

1. (1,5 val.) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f_n \to f$ em medida, mostre que $f_n^+ \to f^+$ em medida.

   R. Como $|a^+ - b^+| \le |a-b|, a, b \in \mathbb{R}$, dado $\alpha > 0$,

$$\{x \in X : |f_n^+(x) - f^+(x)| > \alpha\} \subset \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}$$

   e portanto

$$\mu(\{x \in X : |f_n^+(x) - f^+(x)| > \alpha\}) \le \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) \to 0.$$

   Logo $f_n^+ \to f^+$ em medida.

2. (1,5 val.) Fixe $1 \le p < \infty$. Dado $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$ e $\epsilon > 0$, defina $f_\epsilon(x) = f(x + \epsilon \arctan(x))$. Mostre que $f_\epsilon \to f$ em $L^p(\mathbb{R}, dx)$ quando $\epsilon \to 0$.

   R. Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, existe $R > 0$ tal que $f = 0$ em $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$. Então para $|\epsilon| < 1$, $f_\epsilon = 0$ em $A := \mathbb{R} \setminus [-R - \pi/2, R + \pi/2]$. Assim,

$$\begin{cases} f_\epsilon(x) = f(x + \epsilon \arctan(x)) \to f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \\ |f_\epsilon(x) - f(x)|^p \le 2 \max |f| \mathbb{1}_A, \text{ que é integrável.} \end{cases}$$

   Logo, pelo teorema da convergência dominada, $\|f_\epsilon - f\|_{L^p} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

   Se $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$ qualquer, fixado $\delta > 0$, existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g\|_{L^p} < \delta$. Então

$$\|f_\epsilon - f\|_{L^p} \le \|f_\epsilon - g_\epsilon\|_{L^p} + \|g_\epsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} < \|f_\epsilon - g_\epsilon\|_{L^p} + \|g_\epsilon - g\|_{L^p} + \delta.$$

   Temos

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon - g_\epsilon\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}} |(f-g)(x + \epsilon \arctan(x))|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |(f-g)(y)|^p \left(1 + \frac{\epsilon}{1+x^2}\right)^{-1} dy \\ &\le 2 \int_{\mathbb{R}} |(f-g)(y)|^p dy \le 2\delta^p \end{aligned}$$

   e, para ϵ grande, $\|g_\epsilon - g\|_{L^p} \le \delta$. Logo

$$\|f_\epsilon - f\|_{L^p} < (2 + 2^{1/p})\delta \text{ para } \epsilon \text{ pequeno}$$

   e portanto $f_\epsilon \to f$ em L^p.

3. (1,5 val.) Dados números positivos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, mostre que

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

   R. Por Hölder,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{n} \le \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

4. (1,5 val.) Seja $\mu : \Lambda \to \overline{\mathbb{R}}^+$ uma medida tal que $\mu \ll \lambda$ e $\frac{d\mu}{d\lambda} \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. Mostre que a sucessão de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{\ln(x^2 + e^x)}{n + x^4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

converge μ-quase uniformemente para 0.

R. Como $f_n(x) \to 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{d\lambda}(x)dx < \infty$, pelo teorema de Egoroff, $f_n \to 0$ μ-quase uniformemente.