Medida e Integração
2022/2023

Teste de 29 de Junho de 2023 - 15h30
Duração: 1 hora

Nos exercícios abaixo, Λ é a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e λ a medida de Lebesgue.

1. (1,5 val.) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ tal que, para qualquer intervalo I de comprimento r,

$$\int_I |f(x)|dx \le r^2.$$

Mostre que $f = 0$ q.t.p..

R. Pelo teorema de diferenciação de Lebesgue, para quase todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda([x, x+r])} \int_{[x,x+r]} |f(y)|dy \le \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} r^2 = 0.$$

2. (1,5 val.) Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X. Sejam $\mu_1, \mu_2, \nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ medidas tais que $\mu_1 \perp \nu$ e $\mu_2 \perp \nu$. Mostre que $\mu_1 + \mu_2 \perp \nu$.

R. Como $\mu_1 \perp \nu$, existe $D_1 \subset X$ tal que $\nu(D_1) = 0$ e $\mu_1(D_1^c) = 0$. Da mesma forma, existe $D_2 \subset X$ tal que $\nu(D_2) = 0$ e $\mu_2(D_2^c) = 0$. Seja $D = D_1 \cup D_2$. Então

$\nu(D) \le \nu(D_1)+\nu(D_2) = 0$ e $(\mu_1+\mu_2)((D_1\cup D_2)^c) = (\mu_1+\mu_2)(D_1^c\cap D_2^c) \le \mu_1(D_1)+\mu_2(D_2) = 0.$

Logo $\mu_1 + \mu_2 \perp \nu$.

3. (1,5 val.) Seja $\mu : \Lambda \to \mathbb{R}^+$ uma medida finita tal que $\mu \ll \lambda$. Calcule

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3 + x^{2n}} \cos^2\left(\frac{n}{n^2x^2 + 1}\right) d\mu(x).$$

R. Seja $f_n(x) = \frac{1}{3+x^{2n}} \cos^2\left(\frac{n}{n^2x^2+1}\right)$. Então

- $f_n(x) \to \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ para $x \neq -1, 0, 1$. Como $\mu \ll \lambda$, isto implica que $f_n \to \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ μ-q.t.p..
- $|f_n(x)| \le 1$ que é μ-integrável, já que $\int_{\mathbb{R}} 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}) < \infty$.

Logo, pelo teorema da convergência dominada,

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3 + x^{2n}} \cos^2\left(\frac{n}{n^2x^2 + 1}\right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]} d\mu(x) = \frac{1}{3}\mu([-1, 1]).$$

4. (3,5 val.) Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se Lipschitz se existir $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Mostre que f é Lipschitz se e só se f é absolutamente contínua e $|f'| \le C$ q.t.p..

R. Assumindo que f é Lipschitz, vejamos que é AC. Dado $\delta > 0$ e intervalos $\sum_j (a_j, b_j) \subset [a, b]$,

$$\sum_j |f(b_j) - f(a_j)| \le C \sum_j |b_j - a_j| < \delta \text{ sempre que } \sum_j |b_j - a_j| < \epsilon := \frac{\delta}{C}.$$

Logo f é AC. Pelo teorema fundamental do Cálculo, f é diferenciável q.t.p., ou seja, para quase todo o $x \in (a, b)$, existe $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Nesses pontos,

$$|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right| \le C.$$

Suponhamos agora que f é AC e que $|f'| \leq C$ q.t.p.. Como f é AC, pelo teorema fundamental do Cálculo, dados $x, y \in [a, b]$,

$$f(x) = f(y) \int_x^y f'(t)dt.$$

Logo

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t)dt \right| \leq \left| \int_x^y C dt \right| = C|x - y|.$$

Logo f é Lipschitz.