Álgebra Linear Numérica, Aula 13

Departamento de Matemática, IST

15 de Junho, 2023

Localização de Valores Próprios

Teorema (Gerschgorin).
Um valor próprio λ de uma matriz A verifica uma das seguintes desigualdades:

$$|a_{kk} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{kj}| = r_k, (k = 1, \dots, N)$$

o que significa que os valores próprios pertencem a bolas fechadas com centro na diagonal e raio r_k, ou seja, $\lambda \in \bigcup_{k=1}^{N} \bar{B}\left(a_{kk}, r_k\right)$.

Demonstração: Um vector próprio v associado ao valor próprio λ verifica

$$[Av]_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j = \lambda v_i \Leftrightarrow \sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij} v_j + a_{ii} v_i = \lambda v_i$$

e daqui obtemos

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij} v_j = \left(\lambda - a_{ii}\right) v_i$$

e portanto

$$\left|\lambda - a_{ii}\right| \left|v_i\right| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \left|a_{ij}\right| \left|v_j\right|$$

Cont. da demonstração:

Considerando agora o índice k para o qual $|v_k| = \max_{i=1,\ldots,N} |v_i| = \|v\|_\infty$ obtemos

$$|\lambda - a_{kk}| \, \|v\|_\infty \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{kj}| \, |v_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{kj}| \, \|v\|_\infty$$

e assim, dividindo por $\|v\|_\infty \neq 0$ (porque é um valor próprio), obtemos o resultado.

Propriedades das vizinhanças dadas por Gershgorin

- Se a reunião de $k \leq n$ bolas forma uma componente conexa, haverá exactamente k valores próprios nessa componente (consideramos $k \geq 1$).
- O mesmo argumento é válido se considerarmos linhas ao invés de colunas.

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- Vizinhanças por linhas $Vl1(-4,2)$, $Vl2(1,1)$, $Vl3(3,4)$. Regiões conexas por linhas $Rl1 = Vl1$ e $Rl2 = Vl2 \cup Vl3 = Vl3$.
- Vizinhanças por colunas $Vc1(-4,0)$, $Vc2(1,5)$, $Vc3(3,2)$. Regiões conexas pr colunas $Rc1 = Vc1 \cup Vc2 \cup Vc3 = Vc2$.

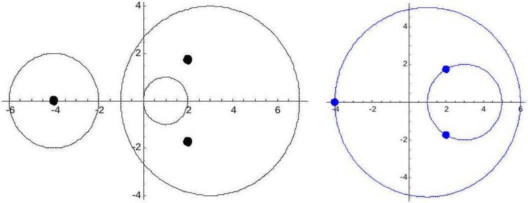


Figure: Exemplo 1. Esquerda: vizinhanças (no plano complexo) por linhas; Direita: vizinhanças por colunas. Valores próprios (complexos) representados pelas bolas negras e azuis

Conclusão: Pelo Teo de Gerschgorin, existe 1 valor próprio em $Rl1 = Vl1$ e dois em em $Rl2 \cap Rc1 = Vl3(3,4) \cap Vc2(1,5)$. Representando os valores proprios no gráfico permite verificar que as conclusões estão corretas.

Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2+2i & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+4i & -2 \\ 0 & 2 & 2i & 4 \end{bmatrix}$$

- Vizinhanças por linhas $Vl1(-4,2)$, $Vl2(-4,2\sqrt{2})$, $Vl3(2+4i,2)$, $Vl4(4,4)$. Regiões conexas por linhas $Rl1 = Vl1 \cup Vl2$ e $Rl2 = Vl3 \cup Vl4$.
- Vizinhanças por colunas $Vc1(-4,2\sqrt{2})$, $Vc1(-4,4)$, $Vc3(2+4i,2)$, $Vc4(4,2)$. Regiões conexas pr colunas $Rc1 = Vc1 \cup Vc2$, $Rc2 = Vc3$ e $Rc3 = Vc4$.

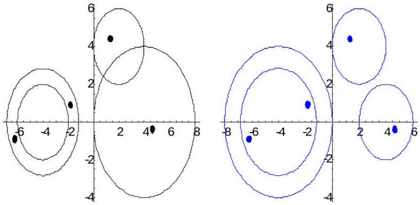


Figure: Exemplo 2: Esquerda por linhas. Direita por Colunas

Conclusão: Pelo Teo de Gerschgorin, existe 1 valor próprio em $Rc2 = Vc3$, outro em $Rc3 = Vc4$ e dois em $Rl1 \cap Rc1 = Vl2 = Vc1$.

Aplicação a matrizes de dimensão elevada

Se conseguirmos transformar uma matriz $A \in R^n$ de grande dimensão numa matriz T semelhante a A que tenha uma estrutura em banda (por exemplo tridiagonal), com elementos das diagonais secundárias muito pequenos, relativamente aos elementos da diagonal ($T_{i,j}/T_{i,i} < \delta << 1$), então o Teorema de Gershgorin permite obter estimativas para os valores próprios com precisão de ordem $O(\delta)$. De facto o teorema permite-nos obter regiões desconexas às quais os valores próprios deverão pertencer. No caso de n valores próprios distintos, teremos n regiões desconexas. Uma matriz T com estas características pode ser obtida, por exemplo, com o método de factorização QR (Ver a referência Golub, Van Loan, Matrix Computations).

Método das potências **Teorema**

Seja A uma matriz diagonalizável (em particular, hermitiana) com um valor próprio dominante λ_1 real: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_N|$.
Considere o método

$$\begin{cases} u^{(0)} : \left\| u^{(0)} \right\| = 1, \\ u^{(n+1)} = \sigma_n \frac{Au^{(n)}}{\left\| Au^{(n)} \right\|}, \end{cases}$$

em que $\sigma_n = \pm 1$ é o sinal da componente com maior módulo do vector $Au^{(n)}$
Se a iterada inicial $u^{(0)}$ for tal que

$$u^{(0)} = \alpha v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_N v_N$$

com $\alpha \neq 0$, então o método das potências converge para v_1, e uma aproximação para o valor próprio dominante é

$$\lambda^{(n)} = \frac{\left[Au^{(n)} \right]_i}{u_i^{(n)}}$$

para qualquer índice i (desde que $u_i^{(n)} \neq 0$), sendo normalmente escolhido o índice com componente igual a 1.

Método das potências (cont.) Além disso,

- temos a estimativa de erro

$$\left\| v_1 - u^{(n)} \right\|_\infty \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^n$$

(onde a constante $C > 0$ depende directamente de $\frac{1}{|\alpha|}$)

- também

$$\left| \lambda_1 - \lambda^{(n)} \right| \leq C' \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^n$$

(Note-se que esta estimativa de erro é válida em qualquer norma, já que como todas as normas são equivalentes,

$$\left\| v_1 - u^{(n)} \right\| \leq c_2 \left\| v_1 - u^{(n)} \right\|_\infty$$

e trata-se apenas de ajustar a constante.)

Demonstração: Ver apontamentos da disciplina.

Exemplo Assuma que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

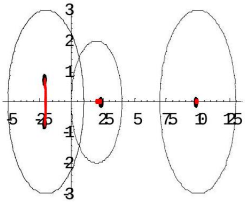
é diagonizável. Aplicando o Teo. de Gershgorin vemos que os valores próprios devem estar nas vizinhanças

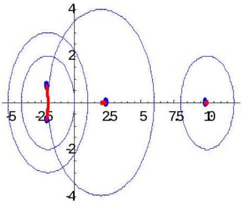
$$Vl_1 = \bar{V}(-2,3), Vl_2 = \bar{V}(10,3), Vl_3 = \bar{V}(-2,3), Vl_4 = B(2,2)$$

e

$$B_1' = \bar{B}(-2,3), B_2' = \bar{B}(10,2), B_3' = \bar{B}(-2,2), B_4' = B(2,4)$$

(ver figura) concluindo-se que os valores próprios verificam $|\lambda_1| \geq 8$ e $|\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4| \leq 5$. Ou seja λ_1 é dominante.





Exemplo (cont.): Calcular 3 iteradas do método

Tomando $u^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$ (escolha orientada pelo vector próprio dominante associado à matriz diagonal), obtemos

$$u^{(1)} = \sigma_0 \frac{Au^{(0)}}{\|Au^{(0)}\|_\infty} = + \frac{(1, 10, 1, 0)}{\|(1, 10, 1, 0)\|_\infty} = \left(\frac{1}{10}, 1, \frac{1}{10}, 0\right)$$

e sucessivamente

$$u^{(2)} = (0.0816, 1, 0.0714, 0),$$

$$u^{(3)} = (0.0846, 1, 0.077, 0.0009).$$

Calculando $Au^{(3)} = (0.832, 9.835, 0.758, 0.0082)$, obtemos a aproximação $\lambda^{(3)} = 9.835$, que é dada pelo valor da segunda componente (pois é nessa que $u^{(3)}$ tem valor unitário).

Observação: O valor exacto do valor próprio dominante é $\lambda_1 = 9.83703$. Como $\lambda_2 = 2.34741$, temos uma convergência linear com o factor $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = 0.238$, o que nos permitiria escrever

$$\left\|v_1 - u^{(n)}\right\|_\infty \leq 0.238^n C$$