Medida e Integração
2022/2023

Teste de 2 de Junho de 2023 - 19h00
Duração: 45 minutos

1. (1,5 val.) Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X, $\mu : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ uma medida positiva e $\nu : X \to \mathbb{R}$ uma medida com sinal. Mostre que $\nu \ll \mu$ se e só se $|\nu| \ll \mu$.

   R. Se $\nu \ll \mu$, spounhamos que $\mu(A) = 0$. Então para qualquer $B \subset A$, $\mu(B) = 0$. Como $\nu \ll \mu$, $\nu(B) = 0$ para qualquer $B \subset A$. Assim
   $$\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \subset A\} = 0, \quad \nu^-(A) = \sup\{-\nu(B) : B \subset A\} = 0.$$
   Logo $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A) = 0$. Concluímos que $|\nu| \ll \mu$.
   Se $|\nu| \ll \mu$, se $\mu(A) = 0$, então $|\nu(A)| = \nu^+(A) + \nu^-(A) = 0$. Como $\nu^+, \nu^- \geq 0$, vem que $\nu^+(A) = \nu^-(A) = 0$ e portanto $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = 0$. Concluímos que $\nu \ll \mu$.

2. (1,5 val.) Sejam $1 \leq q < p \leq \infty$, $f \in L^q([0,1], dx)$ e $C > 0$ tais que
   $$\|f\|_{L^p(I,dx)} \leq C\|f\|_{L^q(I,dx)} \quad \text{para qualquer intervalo } I \subset [0,1].$$
   Mostre que $f \equiv 0$ q.t.p..

   R. Usando a desigualdade de Hölder,
   $$\int_I |f|^q dx \leq \left(\int_I 1^{p/(p-q)}\right)^{(p-q)/p} \left(\int_I |f|^p dx\right)^{q/p} = \lambda(I)^{(p-q)/p} \left(\int_I |f|^p dx\right)^{q/p}.$$
   Logo
   $$\|f\|_{L^p(I,dx)} \leq C\|f\|_{L^q(I,dx)} \leq C\lambda(I)^{(p-q)/pq}\|f\|_{L^p(I,dx)} < \infty.$$
   Dado I tal que $C\lambda(I)^{(p-q)/pq} < 1$, isto implica que
   $$\|f\|_{L^p(I,dx)} < \|f\|_{L^p(I,dx)}$$
   e portanto $f = 0$ q.t.p em I. Como o intervalo $[0,1]$ é uma união finita de intervalos nestas condições, $f \equiv 0$ q.t.p em $[0,1]$.

3. (1,5 val.) Dados dois espaços de medida σ-finitos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ mensurável. Mostre que, para $1 \leq p < \infty$,
   $$\left\|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right\|_{L^p(Y,d\nu)} \leq \int_X \|f(x,y)\|_{L^p(Y,d\nu)}\, d\mu(x).$$
   (Sug. argumente por dualidade.)

   R. Se
   $$\int_X \|f(x,y)\|_{L^p(Y,d\nu)} d\mu = \infty,$$
   não há nada a mostrar. Caso contrário, como $p < \infty$ e as medidas em causa são σ-finitas, por dualidade, é suficiente mostrar que, qualquer que seja $g \in L^{p'}(Y, d\nu)$,
   $$\left|\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) g(y)d\mu(y)\right| \leq \int_X \|f(x,y)\|_{L^p(Y,d\nu)}d\mu \cdot \|g\|_{L^{p'}(Y,d\mu)}.$$
   Mas, usando Tonelli na segunda desigualdade e Hölder na terceira,
   $$\begin{aligned}\left|\int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) g(y)d\mu(y)\right| &\leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)g(y)|d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &\leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)g(y)|d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &\leq \int_X \|f(x,y)\|_{L^p(Y,d\nu)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(Y,d\mu)}d\mu(x).\end{aligned}$$

4. (1,5 val.) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $f_n \to f$ em medida e, para algum $g \in L^1(X, d\mu)$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu-$q.t.p.. Mostre que

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

R. Como $f_n \to f$ em medida e $|f_n| \leq g \in L^1$, sabemos que $f_n \to f$ em $L^1(X, d\mu)$. Logo

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \to 0$$

e portanto

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$