

CDI-2

2º MAP45 (Versão A) - 17 de Maio de 2023 - 18h - Duração: 45 min

Nome: _____

Número: _____ Curso: _____ Sala: _____

Justifique todas as respostas

(5 val.)

1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2y - y^2 - y.$$

2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2 + x + z + w = 1 \\ \sin(xy) + e^{y+w} = e^2 \end{cases}$$

(4 val.)

(a) Justifique que numa vizinhança de $(x, y, z, w) = (0, 1, 0, 1)$ as soluções do sistema podem ser explicitadas na forma $(z, w) = f(x, y)$.

(4 val.)

(b) Justifique que f é localmente invertível em $(0, 1)$ e determine $Df^{-1}(0, 1)$.

(4 val.)

3. Seja $f(x, y, z) = x + y + z^2 - 1$. Determine os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

(3 val.)

4. Seja $n > k$ e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 tal que o conjunto de nível

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

é não vazio, e tal que existe $a \in S_0$ com a característica de $DF(a)$ igual a k .
Mostre que para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ com $\|\varepsilon\|$ suficientemente pequena o conjunto de nível

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \varepsilon\}$$

é não-vazio.