Uma nota sobre divisores de zero

§1. Definição. Seja R um anel.

- Um elemento $a \in R - \{0\}$ diz-se um *divisor de zero* se existir $b \in R - \{0\}$ tal que $ab = 0$ ou $ba = 0$.
- Se R for comutativo com identidade então R diz-se um *domínio integral*, ou *domínio de integridade*, se não tiver divisores de zero.

§2. Exemplo. Qualquer corpo é um domínio integral (porque, como vimos na aula, elementos invertíveis não podem ser divisores de zero).

§3. Exemplo. $\mathbb{Z}$ é um domínio integral.

§4. Exemplo. Como já sabemos do estudo de teoria de grupos, para qualquer $a \in \{1, \ldots, n-1\}$ a classe $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é invertível se e só se $\mathrm{mdc}(n, a) = 1$. Caso contrário, se $\mathrm{mdc}(n, a) = d > 1$, existe $b \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $n \mid ab$. (Basta tomar $b = n/d$, pois $ab = n(a/d)$ é múltiplo de n.) Portanto, se $\mathrm{mdc}(n, a) = d > 1$, existe uma classe $\overline{b} \neq \overline{0}$ tal que $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} = \overline{0}$, o que mostra que $\overline{a}$ é um divisor de zero do anel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Portanto, em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qualquer elemento não nulo e não invertível é divisor de zero. Conclui-se assim que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um domínio integral se e só se todos os elementos não nulos forem invertíveis, ou seja, se e só se n for primo, e portanto se e só se $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for um corpo.

§5. Exemplo. Seja R o anel $M_n(\mathbb{C})$. Tal como no exemplo anterior, os divisores de zero de R são precisamente os elementos não nulos e não invertíveis, pois qualquer matriz A não invertível e não nula tem $0 < \dim \mathrm{Nuc}\, A < n$, e por isso qualquer matriz B cujo espaço das colunas é igual a $\mathrm{Nuc}\, A$ é não nula e é tal que $AB = 0$.

§6. Exemplo. No anel das funções A^X, em que A é um anel unitário e X é um conjunto, existe uma dicotomia semelhante à dos exemplos anteriores: uma função $f : X \to A$ é um divisor de zero do anel A^X se e só se não for um elemento invertível, pois as funções que são elementos não invertíveis de A^X são aquelas que têm pelo menos um zero, e para estas existe sempre uma função não identicamente nula $g : X \to A$ tal que $fg = 0$, por exemplo definida para cada $x \in X$ por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) = 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \neq 0. \end{cases}$$

§7. Exemplo. Fazendo $A = \mathbb{R}$ e $X = [0, 1]$ no exemplo anterior, podemos definir subanéis

$$C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \subset C^k([0, 1], \mathbb{R}) \subset C([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$$

em que $C([0, 1], \mathbb{R})$ é o subanel das funções contínuas, $C^k([0, 1], \mathbb{R})$ é o subanel das funções de classe C^k para cada $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, e $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ é o subanel das funções de classe C^∞.

Em nenhum destes subanéis (com excepção do próprio anel $\mathbb{R}^{[0,1]}$) se verifica a dicotomia dos exemplos anteriores. Por exemplo, a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 1/2$ tem um único zero $x = 1/2$, sendo por isso um elemento não invertível de qualquer um dos anéis que estamos a considerar, mas não é um divisor de zero de nenhum deles (excepto de $\mathbb{R}^{[0,1]}$) porque qualquer função não nula g tal que $fg = 0$ é necessariamente descontínua no ponto $1/2$.

No entanto, note-se que todos estes anéis têm divisores de zero, e portanto não são domínios integrais. Basta verificar isto em $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Por exemplo, a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1/2}} & \text{se } x < 1/2 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

é não nula e de classe C^∞, não é um elemento invertível do anel $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ porque tem zeros (nomeadamente anula-se no intervalo $[1/2, 1]$), mas é um divisor de zero porque, definindo $g(x) = f(1 - x)$ para cada $x \in [0, 1]$, tem-se $g \neq 0$ e $fg = 0$.