	INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO Campus Alameda	
	Disciplina: Mecânica e Ondas	
	Professor(a): David Lopes, David Resendes, Pedro Sacramento, Mário Pinheiro	
	Discente:	**Matrícula:**
	Curso: LBEA, LBEC, LBEM	**Semestre:** 4º

Semana 1: Cinemática e análise dimensional

1. Uma partícula tem aceleração constante $\vec{a} = 6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ (m/s^2). No instante $t = 0$, a velocidade é nula e o vetor posição é $\vec{r_0} = 0\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$ (m). Determine:

   a) A velocidade $\vec{v}$ e a posição $\vec{r}$ em qualquer instante.

   b) A equação da trajetória da partícula no plano xOy e faça um esboço da mesma.

   Aqui está um exemplo de um Jupyter Notebook em Python para plotar a trajetória da partícula:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def position(t):
    x = 3 * t**2
    y = (2/3) * x + 10
    return x, y

t_values = np.linspace(0, 2, 100)
x_values, y_values = position(t_values)

plt.plot(x_values, y_values, label="Trajetória")
plt.xlabel("x (m)")
plt.ylabel("y (m)")
plt.title("Trajetória da Partícula no Plano xOy")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

   Este exemplo de Jupyter Notebook plota a trajetória da partícula no plano xOy usando a equação da trajetória encontrada na resolução do problema.

2. Dados dois vetores: $\vec{A}$, com 6 unidades de comprimento e que faz um ângulo de $+360°$ com o eixo X positivo; $\vec{B}$, com 7 unidades de comprimento e de mesma direção e sentido que o eixo X negativo. Determine a soma dos dois vetores.

3. Considere dois vetores de força aplicados a um objeto: $\vec{F_1} = 30\hat{\imath} - 20\hat{\jmath}$ N e $\vec{F_2} = -10\hat{\imath} + 40\hat{\jmath}$ N. Determine a força resultante $\vec{F_R}$ e sua magnitude e direção.

4. Um barco atravessa um rio com uma velocidade de 10 km/h relativamente à água. O rio tem uma velocidade de 5 km/h.

a) Determine a velocidade (módulo e direção) da embarcação em relação a um observador estacionário na margem, admitindo que ele aponta a embarcação diretamente para a outra margem.

b) Se o capitão da embarcação quisesse traçar uma trajetória em linha reta para a outra margem seguindo o caminho mais curto, para que direção deveria estar virada a embarcação? Qual a sua velocidade em relação à Terra?

5. Suponha que lhe é dito que a aceleração de uma partícula que se move numa circunferência de raio r com velocidade uniforme de módulo v é proporcional a uma certa potência de r, ou seja r^n, e a uma certa potência de v, ou seja v^m. Como determinaria os expoentes de r e v? (Supõe-se que a constante de proporcionalidade não tem dimensão).

6. Um carro viaja a velocidade constante e igual a 30 m/s e passa por um carro da polícia. Um segundo depois, o carro da polícia parte em perseguição do carro com a aceleração constante de 3.00 m/s^2. Quanto tempo levará para atingir o carro em transgressão?

7. Um marinheiro puxa o seu veleiro para junto da doca, tal como esta representado na Fig. 3.

   a) Escreva uma expressão geral da velocidade de aproximação do veleiro à doca em função do comprimento da corda (s) e da rapidez com que o marinheiro puxa a corda, $\frac{ds}{dt}$.

   b) Calcule a velocidade de aproximação do veleiro quando o comprimento da corda é de 10.0 m e é puxada a 1.0 m/s.

8. Um canhão é colocado numa rampa cujo declive é dado pelo ângulo φ. Projeta-se uma bala numa direção que faz um ângulo θ_0 com a horizontal com uma velocidade inicial de módulo v_0. Mostre que o alcance R da bala (medido ao longo da rampa) é dado por $R = x/\cos(\varphi)$, em que:

$$x = 2\frac{(v_0 \cos\theta_0)^2}{g}(\tan(\theta_0 - \tan(\varphi)).$$

9. Considere uma bola A que é solta do topo de um edifício com altura h no mesmo instante em que uma bola B é lançada verticalmente para cima a partir do chão. Sabe-se que as bolas colidem quando se deslocam em sentidos opostos e que a velocidade de A é o dobro da de B. Determine a que altura ocorre a colisão.

10. (Exercício opcional, não faz parte da matéria obrigatória da aula) Estime a altura máxima que um edifício pode ter com base em princípios simples de análise dimensional. Considere os seguintes parâmetros físicos: a resistência à compressão do material de construção (σ), a aceleração da gravidade (g) e a densidade do material de construção (ρ). Utilize a análise dimensional para encontrar uma expressão para a altura máxima do edifício em função desses parâmetros.

11. Fomentar o pensamento crítico: : O que significa estar em movimento? O que faz uma bola mover-se, e, estando em movimento, o que a mantém nesse estado. O que é necessário fazer para parar uma bola? O que se entende por "queda"de um corpo e porque é que as bolas caem.

12. Experimentos DIY de ciência"(DIY = "faça você mesmo"):

    - Atire ao solo duas bolas de pesos diferentes. A mais pesada chega primeiro ao solo? - Atire uma bola ao ar a alturas direntes? O que sente quando a apanha na m ao? - Atire uma bola (ou outro objecto qualquer) horizontalmente, ao mesmo tempo que deixa cair outra para o solo. Qual delas chega mais depressa ao ch ao?

Para memorizar esta semana: Existem várias equações e fórmulas de física e matemática que os alunos devem memorizar para serem bem-sucedidos em cursos avançados dessas áreas. Aqui estão algumas das mais importantes:Leis de Newton:

$$F = ma$$
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$F = -kx$$

Cinemática:

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Trabalho e energia:

$$W = Fd\cos\theta$$
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$U = mgh$$

Termodinâmica:

$$Q = mc\Delta T$$
$$PV = nRT$$
$$W = -P\Delta V$$

Álgebra:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Geometria:

$$A = \pi r^2 \qquad \text{(área do círculo)}$$
$$A = \frac{1}{2}bh \qquad \text{(área do triângulo)}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{(volume da esfera)}$$

Trigonometria:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Cálculo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(derivada de uma função)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{(integrais definidas)}$$

É importante lembrar que a memorização dessas equações e fórmulas é apenas o primeiro passo no processo de aprendizagem de física e matemática. Os alunos também precisam entender os conceitos por trás das fórmulas e como aplicá-las em situações práticas. Pode descarregar o formulário de MO disponível no Fénix.

[illegible]. Soluções

Questão 1: partícula tem aceleração constante $\vec{a} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (m/s^2). No instante $t = 0$, a velocidade é nula e o vetor posição é $\vec{r_0} = 0\hat{i} + 10\hat{j}$ (m). Determine:

a) A velocidade $\vec{v}$ e a posição $\vec{r}$ em qualquer instante.

A velocidade e a posição podem ser encontradas a partir das equações do movimento:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Neste caso, a velocidade inicial é nula ($\vec{v_0} = 0$). Então, a velocidade em qualquer instante é:

$$\vec{v}(t) = (6\hat{i} + 4\hat{j})t$$

A posição em qualquer instante é:

$$\vec{r}(t) = (0\hat{i} + 10\hat{j}) + \frac{1}{2}(6\hat{i} + 4\hat{j})t^2$$

b) A equação da trajetória da partícula no plano xOy e faça um esboço da mesma.

Para encontrar a equação da trajetória, podemos eliminar o tempo das equações de posição para x e y. As componentes de posição são:

$$x(t) = 0 + 0t + \frac{1}{2}(6)t^2 = 3t^2$$
$$y(t) = 10 + 0t + \frac{1}{2}(4)t^2 = 10 + 2t^2$$

Resolvendo a equação $x(t)$ para t^2, temos:

$$t^2 = \frac{x}{3}$$

Substituindo t^2 na equação $y(t)$, obtemos a equação da trajetória:

$$y(x) = 10 + 2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{2}{3}x + 10$$

A trajetória é uma reta com inclinação positiva no plano xOy. A partícula começa na posição $(0, 10)$ e se move em linha reta na direção da aceleração constante.

Questão 2: Primeiro, vamos encontrar as componentes de $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Como $\vec{A}$ faz um ângulo de $+360°$ com o eixo X positivo, isso significa que $\vec{A}$ tem a mesma direção e sentido que o eixo X positivo. Então, as componentes de $\vec{A}$ são:

$$A_x = 6\cos(360°) = 6$$
$$A_y = 6\sin(360°) = 0$$

As componentes de $\vec{B}$ são:

$$B_x = -7$$
$$B_y = 0$$

Agora, vamos encontrar a soma dos dois vetores:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\ C_x &= A_x + B_x = 6 - 7 = -1 \\ C_y &= A_y + B_y = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Portanto, a soma dos dois vetores é $\vec{C} = -1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$.

Questão 3: , vamos encontrar a força resultante, somando os dois vetores de força:

$$\begin{aligned}\vec{F_R} &= \vec{F_1} + \vec{F_2} \\ &= (30\hat{\imath} - 20\hat{\jmath}) + (-10\hat{\imath} + 40\hat{\jmath}) \\ &= (30 - 10)\hat{\imath} + (-20 + 40)\hat{\jmath} \\ &= 20\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a magnitude da força resultante:

$$|\vec{F_R}| = \sqrt{(20)^2 + (20)^2} = 20\sqrt{2}\ \text{N}$$

Finalmente, vamos encontrar a direção da força resultante, calculando o ângulo em relação ao eixo X positivo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{20}{20}\right) = \arctan(1) = 45°$$

Portanto, a força resultante é $\vec{F_R} = 20\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}$ N, com magnitude de $20\sqrt{2}$ N e direção de $45°$ em relação ao eixo X positivo.

Questão 4: **a)** A resolução encontra-se na Fig. 1.
b) Veja a resolução na Fig. 2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Velocidade do barco em relação à água (km/h)
v_barco_agua = 10
```

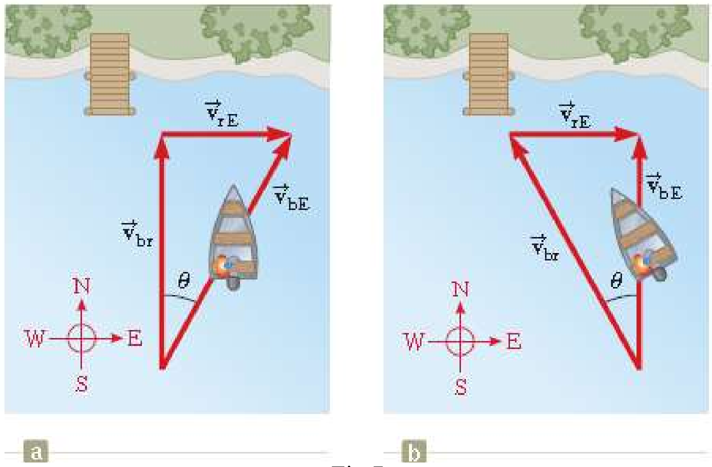


Fig.7

SOL:

SOLUTION

Conceptualize Imagine moving in a boat across a river while the current pushes you down the river. You will not be able to move directly across the river, but will end up downstream as suggested in Figure 4.21a.

Categorize Because of the combined velocities of you relative to the river and the river relative to the Earth, we can categorize this problem as one involving relative velocities.

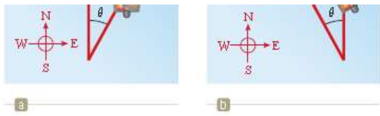


Figure 4.21 (Example 4.8) (a) A boat aims directly across a river and ends up downstream. (b) To move directly across the river, the boat must aim upstream.

Analyze We know $\vec{v}_{br}$, the velocity of the *boat* relative to the *river*, and $\vec{v}_{rE}$, the velocity of the *river* relative to the *Earth*. What we must find is $\vec{v}_{bE}$, the velocity of the *boat* relative to the *Earth*. The relationship between these three quantities is $\vec{v}_{bE} = \vec{v}_{br} + \vec{v}_{rE}$. The terms in the equation must be manipulated as vector quantities; the vectors are shown in Figure 4.21a. The quantity $\vec{v}_{br}$ is due north; $\vec{v}_{rE}$ is due east; and the vector sum of the two, $\vec{v}_{bE}$, is at an angle θ as defined in Figure 4.21a.

Find the speed v_{bE} of the boat relative to the Earth using the Pythagorean theorem:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \text{km/h})^2 + (5.00\ \text{km/h})^2}$$
$$\boxed{= 11.2\ \text{km/h}}$$

Find the direction of $\vec{v}_{bE}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = \boxed{26.6°}$$

Finalize The boat is moving at a speed of 11.2 km/h in the direction 26.6° east of north relative to the Earth. Notice that the speed of 11.2 km/h is faster than your boat speed of 10.0 km/h. The current velocity adds to yours to give you a higher speed. Notice in Figure 4.21a that your resultant velocity is at an angle to the direction straight across the river, so you will end up downstream, as we predicted.

continued

Figura 1: Movimento relativo da embarcação. Alínea (a).

(B) If the boat travels with the same speed of 10.0 km/h relative to the river and is to travel due north as shown in Figure 4.21b, what should its heading be?

SOLUTION

Conceptualize/Categorize This question is an extension of part (A), so we have already conceptualized and categorized the problem. In this case, however, we must aim the boat upstream so as to go straight across the river.

Analyze The analysis now involves the new triangle shown in Figure 4.21b. As in part (A), we know $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ and the magnitude of the vector $\vec{\mathbf{v}}_{br}$, and we want $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$ to be directed across the river. Notice the difference between the triangle in Figure 4.21a and the one in Figure 4.21b: the hypotenuse in Figure 4.21b is no longer $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$.

Use the Pythagorean theorem to find v_{bE}:

$$v_{bE} = \sqrt{{v_{br}}^2 - {v_{rE}}^2} = \sqrt{(10.0\ \text{km/h})^2 - (5.00\ \text{km/h})^2} = 8.66\ \text{km/h}$$

Find the direction in which the boat is heading:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = \boxed{30.0°}$$

Finalize The boat must head upstream so as to travel directly northward across the river. For the given situation, the boat must steer a course 30.0° west of north. For faster currents, the boat must be aimed upstream at larger angles.

WHAT IF? Imagine that the two boats in parts (A) and (B) are racing across the river. Which boat arrives at the opposite bank first?

Answer In part (A), the velocity of 10 km/h is aimed directly across the river. In part (B), the velocity that is directed across the river has a magnitude of only 8.66 km/h. Therefore, the boat in part (A) has a larger velocity component directly across the river and arrives first.

Figura 2: Movimento relativo da embarcação. Alínea (b).

```python
# Velocidade do rio (km/h)
v_rio = 5

# Converter velocidades para m/s
v_barco_agua = v_barco_agua * 1000 / 3600
v_rio = v_rio * 1000 / 3600

# Calcular a trajetória inicial do barco em relação à margem
v_barco_margem_x = v_rio
v_barco_margem_y = v_barco_agua
t = np.linspace(0, 5, 1000)
x_traj_inicial = v_barco_margem_x * t
y_traj_inicial = v_barco_margem_y * t

# Calcular a trajetória do barco pelo caminho mais curto
alpha = np.arctan(1/2)
v_barco_terra_x = -v_rio * np.cos(alpha)
v_barco_terra_y = v_barco_agua * np.sin(alpha)
x_traj_otimizada = v_barco_terra_x * t
y_traj_otimizada = v_barco_terra_y * t

# Plotar as trajetórias
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_traj_inicial, y_traj_inicial, label="Trajetória Inicial")
plt.plot(x_traj_otimizada, y_traj_otimizada, label="Trajetória Otimizada")
plt.xlabel("Distância Horizontal (m)")
plt.ylabel("Distância Vertical (m)")
plt.legend()
plt.title("Trajetórias do Barco")
plt.grid()
plt.show()
```

Questão 5: Para resolver este problema, podemos usar a análise dimensional. Sabemos que a aceleração de uma partícula (a) que se move numa trajetória circular com velocidade uniforme é dada por:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Agora, vamos comparar esta equação com a forma proporcional dada no enunciado:

$$a \propto r^n v^m$$

Usando a análise dimensional, podemos ver que as dimensões de cada lado da equação devem ser iguais. A dimensão de a é LT^{-2}, a dimensão de r é L e a dimensão de v é LT^{-1}. Portanto, temos:

$$[\mathrm{LT}^{-2}] \propto [\mathrm{L}]^n [\mathrm{LT}^{-1}]^m$$

Isso implica que:

$$n + m = 1$$

$$-m = -2$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos $n = -1$ e $m = 2$. Portanto, a aceleração é proporcional a $r^{-1}v^2$, que coincide com a expressão da aceleração centrípeta:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Questão 6: Vamos usar as equações de movimento para resolver este problema. As posições do carro da polícia e do carro em transgressão em relação ao tempo são:

$$x_{\text{transgressão}} = v_0 t + x_0$$

$$x_{\text{polícia}} = \frac{1}{2}at^2$$

Onde $v_0 = 30$ m/s é a velocidade do carro em transgressão, $x_0 = 30$ m é a distância inicial entre os carros (pois o carro da polícia parte um segundo depois), e $a = 3.00$ m/s^2 é a aceleração do carro da polícia.

Quando a polícia alcança o carro em transgressão, suas posições são iguais. Então:

$$v_0 t + x_0 = \frac{1}{2}at^2$$

Substituindo os valores e resolvendo a equação para t:

$$30t + 30 = \frac{1}{2}(3)t^2$$

$$60t + 60 = 3t^2$$

$$3t^2 - 60t - 60 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática acima, obtemos duas soluções possíveis para t. No entanto, apenas uma solução faz sentido no contexto do problema (o tempo positivo). Usando a fórmula quadrática:

$$t = \frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4(3)(-60)}}{2(3)}$$

$$t \approx 20.95 \text{ s (solução positiva)}$$

Portanto, o carro da polícia levará aproximadamente 6.96 segundos para alcançar o carro em transgressão.

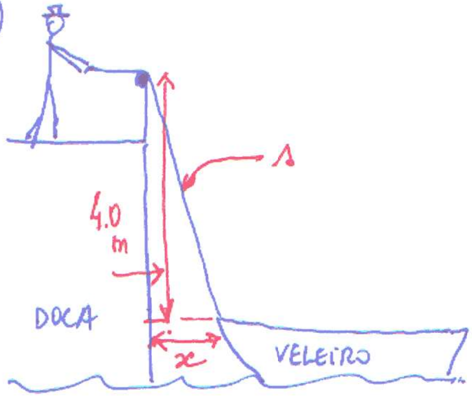
Questão 7: a) Podemos analisar o problema usando semelhança de triângulos. Seja x a distância entre o veleiro e a doca. Quando o marinheiro puxa a corda, a distância s diminui e o veleiro se aproxima da doca. Os triângulos formados pelos vértices da doca, do veleiro e do marinheiro são semelhantes. a resolução encontra-se na Fig. 3.

$$\frac{x}{s} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Assim, a velocidade de aproximação do veleiro à doca é:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

11)



$$s^2 = 4^2 + x^2$$

$$2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x} \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{4^2+x^2}}{x} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{\sqrt{s^2-4^2}} \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{10.0\ m}{\sqrt{10^2 - 4^2}} (1\ m/s) \cong 1.1\ m/s$$

Figura 3: Resolução do exercício 7.

b) Para calcular a velocidade de aproximação quando o comprimento da corda é 10.0 m e é puxada a 1.0 m/s, podemos usar o teorema de Pitágoras para encontrar a distância x:

$$x = \sqrt{s^2 - h^2}$$

Onde h é a altura do marinheiro em relação à água. Supondo que a altura do marinheiro seja 2.0 m, temos:

$$x = \sqrt{(10.0)^2 - (2.0)^2} = \sqrt{96} \approx 9.80 \text{ m}$$

Agora, usando a expressão geral da velocidade de aproximação:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9.80}{10.0}(1.0) \approx 0.98 \text{ m/s}$$

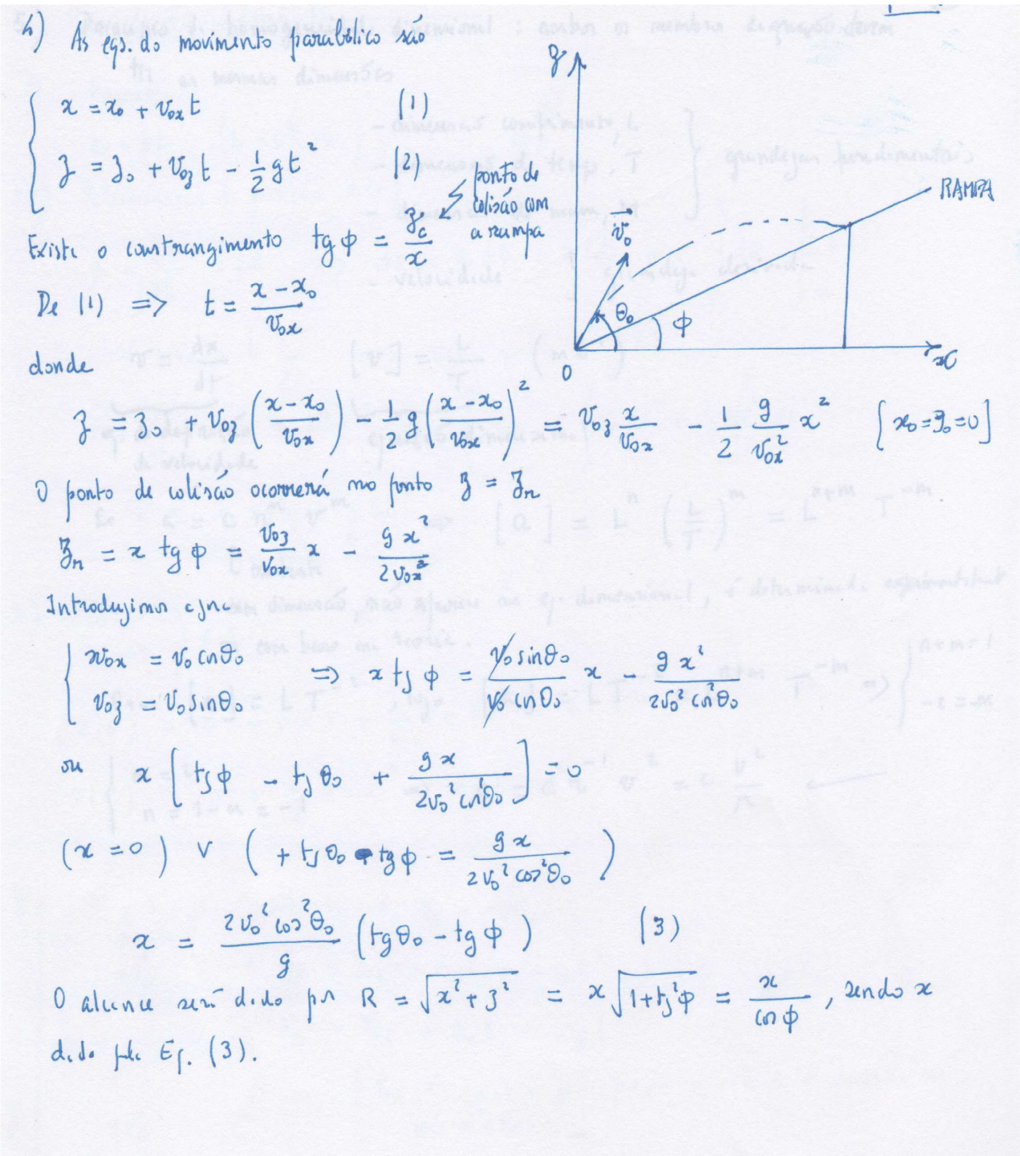
Portanto, a velocidade de aproximação do veleiro à doca é de aproximadamente 0.98 m/s.

Questão 8: Primeiro, decomponha a velocidade inicial em componentes horizontal e vertical:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ z &= z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Veja a continuação na Fig. 4.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Função para calcular o alcance R da bala
def projectile_range(v0, theta, phi):
    g = 9.81 # m/s^2, aceleração da gravidade
    theta_rad = np.radians(theta)
    phi_rad = np.radians(phi)

    numerator = v0**2 * np.sin(2 * theta_rad)
    denominator = g * (1 - np.tan(theta_rad) * np.tan(phi_rad))
    x = numerator / denominator
    R = x / np.cos(phi_rad)

    return R

# Parâmetros iniciais
v0 = 100 # m/s, velocidade inicial
phi = 30 # graus, ângulo da rampa
theta_values = np.linspace(0, 90, 500) # graus, ângulos de lançamento

# Calcular o alcance R para cada ângulo de lançamento
R_values = [projectile_range(v0, theta, phi) for theta in theta_values]

# Plotar o gráfico
plt.plot(theta_values, R_values)
plt.xlabel('Ângulo de lançamento, $\\theta$ (graus)')
```



h) As eqs. do movimento parabólico são

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t & (1) \\ z = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 & (2) \end{cases}$$

Existe o constrangimento $\operatorname{tg} \phi = \frac{z_c}{x}$ ponto de colisão com a rampa

De (1) $\Rightarrow$ $t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$

donde

$$z = z_0 + v_{0z} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 = v_{0z} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \qquad [x_0 = z_0 = 0]$$

O ponto de colisão ocorrerá no ponto $z = z_r$

$$z_r = x \operatorname{tg} \phi = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x - \frac{g x^2}{2 v_{0x}^2}$$

Introduzimos agora

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{0z} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases} \Rightarrow x \operatorname{tg} \phi = \frac{\cancel{v_0} \sin\theta_0}{\cancel{v_0} \cos\theta_0} x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

ou $x \left[\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} \right] = 0$

$$(x = 0) \lor \left(+ \operatorname{tg}\theta_0 - \operatorname{tg}\phi = \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} \right)$$

$$x = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta_0}{g} \left(\operatorname{tg}\theta_0 - \operatorname{tg}\phi \right) \qquad (3)$$

O alcance será dado por $R = \sqrt{x^2 + z^2} = x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{x}{\cos\phi}$, sendo x dado pela Eq. (3).

Figura 4: Lançamento de projéctil na rampa.

```
plt.ylabel('Alcance, $R$ (m)')
plt.title(f'Alcance do projétil vs. Ângulo de lançamento ($v_0$ = {v0} m/s, $\\varphi$ = {
plt.grid()
plt.show()
```

Questão 9: Para resolver este problema, primeiramente, vamos usar as equações de movimento vertical para as duas bolas. Seja y_A a posição da bola A em relação ao topo do edifício e y_B a posição da bola B em relação ao solo.

Como a bola A está em queda livre, sua equação de movimento é:

$$y_A = h - \frac{1}{2}gt^2, \tag{1}$$

onde g é a aceleração da gravidade e t é o tempo decorrido.

A bola B é lançada verticalmente para cima, então sua equação de movimento é:

$$y_B = v_{0B}t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

onde v_{0B} é a velocidade inicial da bola B.

Quando as bolas colidem, a altura da bola A em relação ao solo é igual à altura da bola B em relação ao solo. Portanto, $y_A = y_B$, que nos dá:

$$h = v_{0B}t_{col}, \tag{3}$$

onde t_{col} representa o instante em que ocorre a colisão no ar.

Agora, vamos usar a informação de que a velocidade de A é o dobro da de B no momento da colisão. Como a bola A está em queda livre, sua velocidade é dada por $v_A = gt$. A bola B tem uma velocidade inicial v_B e está desacelerando devido à gravidade, então sua velocidade é dada por $v_B = v_{B0} - gt$, sendo $v_A = -2v_B$. Portanto, temos:

$$-gt_{col} = -2(v_{B0} - gt_{col}). \tag{4}$$

Resolvendo esta equação para v_{B0}, obtemos:

$$v_{B0}^2 = \frac{3}{2}gh. \tag{5}$$

Substituindo a expressão de v_{B0} na equação (2), temos:

$$y_B = v_{0B}\left(\frac{h}{v_{0B}}\right) - \frac{1}{2}g(\frac{h^2}{v_{0B}^2}. \tag{6}$$

Obtemos:

$$y_B = h - \frac{1}{3}h = \frac{2}{3}h. \tag{7}$$

Questão 10: (Exercício opcional, não faz parte da matéria obrigatória da aula) Vamos utilizar a análise dimensional para encontrar uma expressão para a altura máxima do edifício. A altura máxima de um edifício depende de vários fatores, como a resistência do material de construção, a aceleração da gravidade e a densidade do material de construção. Podemos usar o teorema π de Buckingham para determinar a relação entre essas grandezas.

Começamos identificando as grandezas físicas relevantes. Temos três grandezas: a resistência à compressão do material de construção (σ), a aceleração da gravidade (g) e a densidade do material de construção (ρ). Cada grandeza tem dimensão $[\sigma]$ = [força/área], $[g]$ = [comprimento/tempo^2] e $[\rho]$ = [massa/volume].

Para encontrar a relação entre essas grandezas, precisamos determinar quantos grupos adimensionais podemos formar a partir dessas três grandezas. Usando o teorema π de Buckingham, temos:

$$\Pi = f(\sigma, g, \rho) \tag{8}$$

Onde Π é um grupo adimensional e f é uma função. Podemos reescrever essa equação em termos das dimensões:

$$[\Pi] = 1 = [\sigma]^a [g]^b [\rho]^c \tag{9}$$

Onde a, b e c são expoentes que precisamos determinar. Igualando as dimensões em ambos os lados da equação, obtemos o sistema de equações:

$$a = 1 \ b \qquad = -2 \ c = 1 \tag{10}$$

Portanto, a relação entre as grandezas é dada por:

$$\Pi = \frac{\sigma \rho}{g^2} \tag{11}$$

Podemos usar essa relação para determinar a altura máxima do edifício em função desses parâmetros. A altura máxima de um edifício é limitada pela resistência do material de construção à compressão, que é proporcional à área transversal da base do edifício. Assumindo que o edifício é um prisma retangular com base quadrada, podemos escrever a área transversal como $A = s^2$, onde s é o lado da base. A altura máxima do edifício é então dada por:

$$h_{\text{max}} = \frac{\sigma \rho s^2}{g^2} \tag{12}$$

Essa expressão nos dá a altura máxima do edifício em função da resistência à compressão do material de construção, da aceleração da gravidade e da densidade do material de construção. Podemos usar valores típicos para esses parâmetros para obter uma estimativa da altura máxima que um edifício pode ter.

Por exemplo, para um concreto com $\sigma = 20$ MPa e $\rho = 2400$ kg/m^3, e considerando $g = 9,81$ m/s^2, temos:

$$h_{\text{max}} = \frac{(20 \text{ MPa})(2400 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m})^2}{(9,81 \text{ m/s}^2)^2} \approx 5.1 \times 10^3 \text{ m} \tag{13}$$

Isso significa que a altura máxima que um edifício pode ter com esses parâmetros é de cerca de 5,1 km. Obviamente, isso é uma estimativa grosseira e não leva em consideração muitos outros fatores importantes na construção de edifícios, mas serve como um exemplo de como a análise dimensional pode ser usada para obter relações úteis entre as grandezas físicas.

Questão 11: