DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cdi2 (LMAC)
2ª Lista de problemas opcionais

1. Seja $f\colon X \to Y$. Dado $A \subset Y$ define-se
$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}.$$
Diz que $f^{-1}(A)$ é a *imagem inversa* de A por f. Mostre que:
   (a) se $A_i \subset Y$, $i \in I$, então
   $$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$
   $$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$
   (b) se $A \subset Y$, $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

2. Seja $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que A é aberto. Mostre que:
   (a) f é contínua em $a \in A$ *sse*, para todo o $V \subset \mathbb{R}^m$, se $f(a) \in \operatorname{int}(V)$ então $a \in \operatorname{int}(f^{-1}(V))$;
   (b) f é contínua em A *sse*, para todo o aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(V)$ é aberto.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mostre que f é contínua *sse*, para todo o fechado $F \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$.

4. Mostre que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é tal que toda a sucessão de termos em K tem uma subsucessão convergente em K, então K é compacto (assim terminando a demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass).

5. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto, não vazio. Mostre que K tem máximo e mínimo.

6. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e sejam $\mathcal{U}_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, conjuntos abertos tais que $K \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_k$ - diz-se que a coleção $\mathcal{C} = \{\mathcal{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma *cobertura aberta* de K. Mostre que existe uma sub-coleção finita de $\mathcal{C}$ que é uma cobertura de K. Ou seja, mostre que existe $I \subset \mathbb{N}$ tal que I é finito e $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$.