Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Exercícios Resolvidos

Derivada da função composta. Conjuntos de nível.

Exercício 1 *Considere a função* $f(x,y,z) = e^x yz$ *e seja* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma função de classe* C^1 *tal que* $g(0,0) = (0,1,2)$ *e*

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada $D_v(f \circ g)(0,0)$ *segundo o vetor* $\vec{v} = (1,2)$.

Resolução: Pelo Teorema da Função Composta, temos

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(0,0) &= Df(g(0,0)Dg(0,0) \\ &= Df(0,1,2)Dg(0,0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x yz$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = e^x y$, então

$$D(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_v(f \circ g)(0,0) &= D(f \circ g)(0,0)v \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= 34. \end{aligned}$$

Exercício 2 *Considere as funções:*

$$f(x,y,z) = (z, -x^2, -y^2) \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = x + y + z.$$

Sejam $v = (1,2,3)$ *e* $u = (2,3,\frac{1}{2})$.

a) Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $g \circ f$.

b) Calcule as seguintes derivadas segundo vetores:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1),\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1),\ \frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0),\ \frac{\partial (g\circ f)}{\partial u}(2,0,1).$$

c) Determine a direção de crescimento máximo de $g \circ f$ no ponto $(1,0,1)$.

d) Determine a reta normal ao parabolóide

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 = 3\},$$

no ponto $(1,1,5)$.

Resolução:

a) Temos

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & -2y & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos também, $(g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = z - x^2 - y^2$, pelo que

$$D(g\circ f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que as derivadas parciais de f, g e $g \circ f$ são contínuas pelo que estas funções são diferenciáveis.

b) Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = Df(1,1,1)\cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1) = Df(0,0,1)\cdot u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0) = Dg(0,1,0)\cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6;$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial u}(2,0,1) = D(g\circ f)(2,0,1)\cdot u = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{15}{2}.$$

c) A direção de crescimento máximo é dada por $\nabla(g\circ f)(1,0,1) = (-2,0,1)$.

d) P é o conjunto de nível do campo escalar $g\circ f$ dado por $(g\circ f)(x,y,z) = 3$. Logo, o vetor $\nabla(g\circ f)(1,1,5) = (-2,-2,1)$ é normal a P em $(1,1,5)$. A reta normal a P em $(1,1,5)$ é então dada por

$$\begin{aligned}
&\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (1,1,5) + t(-2,-2,1), t\in\mathbb{R}\} = \\
&\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1,y-1,z-5) = (-2t,-2t,t), t\in\mathbb{R}\} = \\
&\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-1 = -2(z-5)\ ;\ x-1 = y-1\} = \\
&\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2z = 11\ ;\ x = y\}.
\end{aligned}$$

Exercício 3 *Determine a reta normal e o plano tangente ao cone*

$$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}\,\}$$

no ponto $(3,4,-2)$.

Resolução: Consideramos a função $F(x,y,z) = z + \sqrt{x^2+y^2}$. Vemos que

$$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ F(x,y,z) = 3\},$$

logo C é uma superfície de nível de F. Logo, em cada ponto, o gradiente de F dá-nos a direção normal ao cone nesse ponto. Assim, temos

$$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

e $\nabla F(3,4,-2) = \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right)$. Portanto a reta normal a C no ponto $(3,4,-2)$ é dada por

$$R = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x,y,z) = (3,4,-2) + \lambda\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

donde se conclui que as equações cartesianas que definem a reta são

$$5x - 3z - 21 = 0\ ;\ 5y - 4z - 12 = 0.$$

O plano tangente é dado pela equação

$$(x-3, y-4, z+2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + (z+2) = 0 \iff 3x + 4y + 5z = 15.$$

Exercício 4 *Determine o plano normal à linha*

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 \,;\, y = 0\},$$

no ponto $(2, 0, 4)$.

Resolução: Note-se que L é o conjunto dos pontos, em $\mathbb{R}^3$, da forma $(x, 0, x^2)$, com $x \in \mathbb{R}^3$. Portanto, é a linha descrita pela função $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, de classe C^1 e definida por $\gamma(t) = (t, 0, t^2)$.

Temos $\gamma'(t) = (1, 0, 2t)$ e $\gamma(2) = (2, 0, 4)$. Sabendo que o vetor $\gamma'(2) = (1, 0, 4)$ é, por definição, tangente a L no ponto $\gamma(2) = (2, 0, 4)$, o correspondente plano normal será dado pela equação

$$(1, 0, 4) \cdot (x-2, y, z-4) = 0,$$

ou seja,

$$x - 2 + 4(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + 4z = 18.$$