Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 11

(Homotopia e Teorema de Green)

1. Considere o campo vetorial $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y)=(-2y,x)$ e o conjunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\ ;\ y>|x|\}$. Calcule o trabalho realizado por F ao longo da fronteira do conjunto D no sentido anti-horário.

2. Use o Teorema de Green para calcular a área do conjunto definido por $x^2+\dfrac{y^2}{4}<1\ ;\ x>0$.

3. Considere o campo vetorial

$$F(x,y)=\left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{y}{(x+1)^2+y^2},\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}+\frac{-(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\right).$$

   Calcule o trabalho realizado por F ao longo de cada uma das linhas seguintes percorridas no sentido horário:

   a) Circunferência definida pela equação $(x+1)^2+y^2=1$.
   b) Circunferência definida pela equação $(x-1)^2+y^2=2$.
   c) Elipse definida por $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

4. Considere o campo vetorial

$$H(x,y,z)=\left(\frac{z}{x^2+z^2}+x,y,\frac{-x}{x^2+z^2}+z\right).$$

   a) Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\ z=0$, percorrida num sentido à sua escolha.
   b) Calcule o trabalho de H ao longo da linha definida por $x^2+z^2=2,\ y+z=1$, percorrida no sentido horário para um observador colocado no ponto $(0,10,0)$.
   c) Será H um gradiente no seu domínio?

5. Considere o campo vetorial definido por

$$F(x,y,z)=\left(\frac{3y}{x^2+y^2}-2y,\frac{-3x}{x^2+y^2}+5x,z^2\right).$$

   a) Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $g(t)=(1,1,t),t\in[0,5]$.
   b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva dada pelas equações $y=1,x^2+z^2=1$, orientada num sentido à sua escolha.
   c) Calcule o trabalho de F ao longo da curva dada pelas equações $9x^2+4y^2=1,\ x+y+z=1$, orientada no sentido anti-horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

6. Seja $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(a,b)\}\to\mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 fechado. Mostre que existe um campo escalar $\phi:\mathbb{R}^2\setminus\{(a,b)\}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 e $A\in\mathbb{R}$ tal que

$$F(x,y)=A\left(\frac{-(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2},\frac{(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)+\nabla\phi.$$