Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 9

(Integrais de Linha de Campos Escalares e de Campos Vetoriais)

1. Determine o comprimento do caminho $g : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, com $g(t) = (t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \frac{1}{3}t^3)$.

2. Determine a massa total do fio $\{(t^2, t\cos t, t \operatorname{sen} t)\,;\, 0 \leq t \leq 2\pi\}$, com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x,y,z) = \sqrt{x}$.

3. Determine o centro de massa da linha descrita pelas equações $x = y^2 + z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e com densidade de massa $\rho(x,y,z) = 2 - y$.

4. Para cada um dos casos seguintes calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial ao longo do caminho indicado:

   a) Campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = (-y, x)$ e caminho dado por $g(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

   b) Campo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (x, z, z-y)$ e caminho definido por $g(t) = (t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, \pi]$.

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $f(x,y,z) = (x, z, 2y)$ ao longo das seguintes curvas:

   a) O segmento de recta que une o ponto $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$.

   b) A intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 - y^2$ num sentido que parece o anti-horário quando visto desde o ponto $(0,0,100)$.

   c) A intersecção das superfícies definidas pelas equações $x = y^2 + z^2$ e $2y + x = 3$ num sentido que parece o horário quando visto desde o ponto $(100, -1, 0)$.

6. Seja $E \subset \mathbb{R}^2$ a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Calcule o integral de linha do campo vetorial dado por $F(x,y) = (4xf(x,y) - y, yf(x,y) + x)$ ao longo de E orientada no sentido anti-horário, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua.

7. O caminho definido por $\gamma(t) = (t, \cosh t), t \in \mathbb{R}$, descreve uma curva chamada "catenária". Mostre que o comprimento de qualquer segmento da catenária, $\gamma([a,b])$, é igual à área da região limitada pelo segmento, pelo eixo dos x e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

8. Calcule o momento de inércia de um arame circular de raio R e massa M com densidade de massa constante em relação a um eixo que contém um diâmetro.