Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Extremos condicionados)

1. Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S:

   a) $f(x,y) = x^4 + y^2$, $\quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$.

   b) $f(x,y) = x^4 + y^2$, $\quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   c) $f(x,y,z) = x + y + z$, $\quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$.

   d) $f(x,y,z) = z$, $\quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 4\,;\, x + z = 1\}$.

2. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos absolutos da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - x - y$ na bola $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

3. Determine os ponto da superfície $z = x^2 - y^2 + 1$ mais próximos da origem.

4. Determine o ponto da reta $y = x$ mais próximo da parábola $y = x^2 + 2$.

5. Determine as dimensões da caixa rectangular com volume igual a 1 m^3 que minimizam a respectiva área.

6. Determine o valor máximo da área de um retângulo inscrito numa elipse de semieixos a e b.

7. Seja A uma matriz $n \times n$ definida positiva com valores próprios todos distintos. Prove que o ponto do elipsóide $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x \rangle = 1\}$ mais próximo (respetivamente, mais distante) da origem se encontra na direção do vetor próprio de A correspondente ao maior (respetivamente, menor) valor próprio.

8. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que a superfície $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ é compacta, não vazia e satisfaz $\nabla f(x) \neq 0$ para todo o $x \in S$. Mostre que a reta que une um dado ponto $x_1 \notin S$ ao ponto $x_0 \in S$ mais próximo de x_1 intersecta S ortogonalmente em x_0.