DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

1º Semestre
2022/2023

Exame A de Álgebra Linear
26 de janeiro 2023 (13:00)

Duração: 2h

Nome:

IST id:

Instruções

Este exame é constituído por 2 grupos de questões: grupo 1 com 4 questões de resposta fechada, grupo 2 com 5 questões de resposta aberta. O grupo 1 está cotado para 6 valores e o grupo 2 tem a cotação total de 14 valores.
Nas questões de resposta fechada serão consideradas apenas as respostas assinaladas nos quadrados disponíveis.
Para as questões de resposta aberta deves responder no caderno de respostas. Deves **indicar nas tuas respostas todos os cálculos e justificações**.

Correção das questões de resposta fechada:
Temos para as questões de escolha múltipla, Certa: 1 val. Errada: - 0.3 val. Branco: 0 val.
Temos para as questões de validação de hipóteses, Opção correta (Verdadeira ou Falsa): Cotação total/Nº de hipóteses, Errada ou em Branco: 0 val.

Boa sorte!

		Classificação
1	1.0	
2	2.0	
3a)	1.0	
3b)	1.0	
4	1.0	
5a)	1.0	
5b)	1.0	
5c)	1.0	
6a)	1.5	
6b)	1.5	
7a)	1.0	
7b)	1.0	
7c)	1.0	
8a)	1.0	
8b)	1.0	
9a)	1.0	
9b)	1.0	
9c)	1.0	

O meu nível de confiança para realizar o exame, a que vou responder de seguida é

- ☐ de 0% a 20%
- ☐ de 20% a 40%
- ☐ de 40% a 60%
- ☐ de 60% a 80%
- ☐ de 80% a 100%

Obrigada por responder a esta questão!

Grupo 1 (6 val.)

Questão 1 (1 val.) Seja A uma matriz 15×23 tal que a sua característica é igual a 12. Assinale com um $\mathbf{V}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **verdadeira**, e com um $\mathbf{F}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **falsa**, quanto estiver a avaliar as seguintes afirmações sobre a matriz A e/ou a sua matriz transposta A^T.

0.2 [F] A nulidade de A é igual a 12;;
0.2 [V] A nulidade de A^T é igual a 3;;
0.2 [V] As colunas de A são um subespaço de R^{15} ;
0.2 [F] As colunas de A^T são um subespaço de R^{15} ;
0.2 [F] O espaço nulo de A^T é um subespaço de R^{23} ;

Questão 2 (2 val.) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ -3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Assinale com um $\mathbf{X}$ o quadrado correspondente à **única** afirmação que **NÃO** está correta.

[ ] A transformação linear $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ é invertível;
[ ] A matriz A é a composição de uma rotação com uma dilatação;
[X] A matriz A é diagonalizável;
[X] O sistema dinâmico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ tem a origem como um ~~atrator~~ repulsor.

Questão 3 (2 val.) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) **(1 val.)** Assinale com um $\mathbf{X}$ no quadrado correspondente à **única** afirmação correta sobre as colunas da matriz A.

☐ As colunas de A são linearmente dependentes;
☐ As colunas de A são uma base para R^4;
☐ As colunas de A são um conjunto ortogonal;
☒ As colunas de A geram R^5.

(b) **(1 val.)** Quanto às seguintes propriedades da matriz A e/ou da matriz transposta A^T, assinale com um $\mathbf{V}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **verdadeira**, e com um $\mathbf{F}$ o quadrado correspondente a uma afirmação **falsa**.

0,25 [F] A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções;
0.25 [V] A equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinada para todo o $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$;
0.25 [V] Se A é a matriz que representa uma transformação linear T, então T é injetiva;
0.25 [V] A matriz A^T é invertível.

Questão 4 ($\cancel{2}$ 1 val.) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - 2x_4, -3x_1 - 4x_2 + x_3, x_1 - x_3 + x_4)$$

Assinale com um $\mathbf{V}$ o quadrado correspondente a uma afirmação que considera **verdadeira**, e com um $\mathbf{F}$ o quadrado correspondente a uma afirmação que considera **falsa** relativamente à transformação linear T.

0,2 [F] o vetor $(1, -3, 1)$ pertence ao núcleo de T;
0.2 [F] o núcleo de T é trivial;
0.2 [V] a transformação linear T é sobrejetiva;
0.2 [F] a matriz que representa T relativamente às bases canónicas é: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
0.2 [V] o vetor $(1, -3, 1)$ pertence à imagem de T.

Grupo 2 (14 val.)

Questão 5 (3 val.) Seja W um espaço vetorial, e V o subespaço gerado por quatro vetores não nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, de W, ou seja, V é a expansão linear do conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Neste caso, escrevemos $V = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Tem-se ainda

- $\mathbf{v}_2 \in Span\{\mathbf{v}_1\}$;
- $\mathbf{v}_3 \notin Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\mathbf{v}_4 + 2\mathbf{v}_3 - 5\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$;

(a) (1 val.) Diga, justificando, se o conjunto $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

(b) (1 val.) Diga, justificando, se $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(c) (1 val.) Obtenha uma base e determine a dimensão de V.

(a) $\underline{v}_2 \in Span\{\underline{v}_1\} \Leftrightarrow \underline{v}_1 = \alpha \underline{v}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\underline{v}_3 \notin Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \Leftrightarrow$ L.I. sse $c_1 \alpha \underline{v}_2 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$

0.5 $(c_1 \alpha + c_2)\underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$

para $c_1 + \alpha c_2 = c_3 = 0$

$\Leftrightarrow \{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ é L.I. 0.5

(b) Temos ainda, ~~então~~ $\underline{v}_4 = 5\underline{v}_1 - 2\underline{v}_3$, ou seja $\forall \underline{x} \in W$ t.q.

$\underline{x} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 + c_4 \underline{v}_4 = (c_1 + 5c_4)\underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 +$

0.5 $+ (c_3 - 2c_4)\underline{v}_3$

logo $Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\} = Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ 0.5

(c) Temos, p.ex. $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$ para base de V, logo 0.5

$\dim V = 2$ 0.5

Questão 6 (3 val.) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$W = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \text{ e } \ x_1 - x_3 = 0\ \},$$

e o seu complemento ortogonal $W^\perp$ (usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$).

(a) (1.5 val.) Deduza uma base para, e indique a dimensão de, W.

(b) (1.5 val.) Deduza uma base para, e indique a dimensão de, $W^\perp$.

(a) $$W = \underset{0.2}{\mathrm{Nul}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underset{0.3}{\mathrm{Nul}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad 0.3$$

$\underline{\underline{R}}.:$ $$\mathcal{B}_W = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{0.5} \quad \text{e} \quad \dim W = \underbrace{1}_{0.2}$$

(b) $$W^\perp = \underset{0.5}{\mathrm{Lin}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underset{0.3}{\mathrm{Span}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underline{\underline{R}}.$ $$\mathcal{B}_{W^\perp} = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}_{0.5} \quad \text{e} \quad \dim W^\perp = \underbrace{2}_{0.2}$$

Questão 7 (3 val.) Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) (1 val.) Para $\alpha = 1$ escreva o polinómio característico de A_1. Justifique que A_1 é invertível.

(b) (1 val.) Para $\alpha = 0$, obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, constituída por vetores próprios de A_0.

(c) (1 val.) Diagonalize ortogonalmente A_0, ou seja, indique uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $A_0 = PDP^T$.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$ 0.2

$= (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 2^2 \right) = (2-\lambda)(3-\lambda-2)(3-\lambda+2)$ 0.3

$= (2-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)$ 0.3 – polinómio característico de A_1

A_1 é invertível, pq. 0 não é vz.p. de A_1 0.2

(b) $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e tem o (mesmo) polin. característico:

$p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)$

$\mathcal{E}(5) = \text{Nul} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 0.2

$\mathcal{E}(2) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 0.2

$\mathcal{E}(1) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 0.2

$\mathcal{B}_{\text{ortonormal}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ 0.4

(c)

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

0.5 0.5

Questão 8 (2 val.) Seja a matriz estocástica $P = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$, com $0 \le a, b \le 1$.

(a) (1 val.) Mostre que para $a = b = 0$ existem dois vetores estacionários. Determine a condição para que P tenha apenas um vetor estacionário.

(b) (1 val.) Considere a cadeia de Markov $x_{k+1} = Px_k$, com P em que $a = b = 1/2$. Calcule o limite de x_k quando $k \to \infty$.

(a) Para $a=b=0$, temos $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que tem dois vetores estacionários: $P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 0.5

Para que P tenha apenas um vetor estacionário basta q. a e b não sejam simultaneamente iguais a 0. 0.5

(b) Para $a=b=1/2$, temos $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ que sendo regular tem o vetor estacionário associado a $\lambda = 1$:

$$P\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$ 0.5

logo pelo Teo. das matrizes regulares:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = q = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$ 0.5

Questão 9 (3 val.) Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$ e $B = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$.

(a) (1 val.) Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, calcule $B\mathbf{x}$ e mostre que $B\mathbf{x}$ é o vetor projeção ortogonal de $\mathbf{x}$ na direção de $\mathbf{u}$.

(b) (1 val.) Mostre que B é simétrica e que $B^2 = B$.

(c) (1 val.) Mostre que $\mathbf{u}$ é um vetor próprio de B e indique o valor próprio que lhe está associado.

(a) $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$: $B\underline{x} = (\underline{u}\underline{u}^T)\underline{x} \underset{\text{p.i.}}{=} \underline{u}\,(\underline{u}\cdot\underline{x}) \underset{\substack{\text{p.i.}\\ \text{propriedades}}}{=} \dfrac{\underline{x}\cdot\underline{u}}{\|\underline{u}\|^2}\,\underline{u}$ 0.3 0.3

$\underset{\|\underline{u}\|^2=1}{=} (\underline{x}\cdot\underline{u})\,\underline{u}$, ou seja $B\underline{x} = \text{proj}_{\underline{u}}\,\underline{x}$ 0.2

0.2

(b) $B = \underline{u}\underline{u}^T$ é simétrica: $(B)^T = (\underline{u}\underline{u}^T)^T = (\underline{u}^T)^T\underline{u}^T$

$= \underline{u}\underline{u}^T = B$ 0.5

$B^2 = B$: $(\underline{u}\underline{u}^T)(\underline{u}\underline{u}^T) = \underline{u}\,\underbrace{(\underline{u}^T\underline{u})}_{(=\|\underline{u}\|^2=1)}\,\underline{u}^T = \underline{u}(1)\underline{u}^T$

$= \underline{u}\underline{u}^T = B$ 0.5

(c) $B\underline{u} = (\underline{u}\underline{u}^T)\,\underline{u} = \underline{u}\,\underbrace{(\underline{u}^T\underline{u})}_{=1} = 1\underline{u}$, ou seja

0.5

1 é vr.p. de B associado a $\underline{u}$ 0.5

Ao responder às questões deste exame, o meu nível de confiança geral foi

☐ de 0% a 20%
☐ de 20% a 40%
☐ de 40% a 60%
☐ de 60% a 80%
☐ de 80% a 100%

Obrigada por responder a esta questão!