**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**

# Topologia

2° Teste - 26 de Janeiro de 2023 - 18h00m
Duração: 110 min.
**Justifique todas as respostas**

Notação: $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 1\}$

**1.** Seja $\mathscr{T}_u$ a topologia usual em $\mathbb{R}$ e considere a seguinte colecção de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{B} = \Big\{A \in \mathscr{T}_u : 0 \notin A\Big\} \cup \Big\{]-\infty, -n[ \cup \{0\} \cup ]n, +\infty[\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Seja $\mathscr{T}$ a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathscr{B}$. Nas alíneas seguintes $\mathbb{R}$ tem sempre a topologia $\mathscr{T}$.

(a) Mostre que $\mathscr{B}$ é de facto uma base para $\mathscr{T}$.
(b) Mostre que 0 está no fecho do conjunto $]-\infty, -2]$.
(c) Verdadeiro ou falso: a colecção das vizinhanças de 0 é

$$\mathscr{V}_0 = \Big\{]-\infty, -n[ \cup \{0\} \cup ]n, +\infty[\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) Mostre que a sucessão $x_n = n$ converge para 0.
(e) Mostre que a topologia induzida no subespaço $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é a topologia discreta.
(f) Determine as componentes conexas de $[-1, 1]$ na topologia induzida por $\mathscr{T}$.
(g) Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia $\mathscr{T}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

**2.** Considere a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(t) = \big(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)\big)$$

e seja $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} f(-t) - (1,0), & \text{se } t \in [-1,0]; \\ -f(t) + (1,0), & \text{se } t \in [0,1]. \end{cases}$$

(a) Mostre que $g$ é contínua.
(b) Mostre que a função obtida a partir de $g$ restringindo o conjunto de chegada ao contradomínio de $g$ é uma função quociente.
(c) Calcule o grupo fundamental do quociente de $[-1, 1]$ pela relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$, no ponto $[0]$.

**3.** Seja

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \quad \text{ou} \quad x \in \mathbb{Q}\big\} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$$

(a) Justifique que $X$ é conexo.
(b) Mostre que a função $r\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $r(x,y) = x$ é uma retracção por deformação.
(c) Qual o grupo fundamental de $X$?

**4.** Seja $X$ a superfície obtida como quociente de dois triângulos com esquema de etiquetas $abc, ab^{-1}c^{-1}$.

(a) Identifique a superfície $X$.
(b) Qual o grupo fundamental e qual a homologia de $X$?

**5.** Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma colecção de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ abertos e convexos tais que $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset$. Calcule o grupo fundamental de $\bigcup_\alpha C_\alpha$ num ponto à sua escolha. Sugestão: Teorema de Seifert-van Kampen.

**6.** Considere o grupo $\mathbb{Z}_{/2} \times \mathbb{Z}_{/2}$ como quociente do grupo livre $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ em dois geradores $a, b$ pelo subgrupo normal $H$ gerado por $a^2$, $b^2$ e $aba^{-1}b^{-1}$. Seja $B$ o oito: a união de dois circulos com um ponto $x_0$ em comum, e seja $p\colon E \to B$ um revestimento com $\operatorname{Im} p_* = H$ (identificando $\pi_1(B, x_0)$ com $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$).

(a) Determine o grupo fundamental de $E$.
(b) Qual o grupo de automorfismos do revestimento?
(c) Determine a cardinalidade de $p^{-1}(x_0)$.
(d) Construa o revestimento explicitamente.