

**Exame B de Álgebra Linear**  
**26 de janeiro 2023 (13:00)**

**Duração: 2h**

Nome:

IST id:

**Instruções**

Este exame é constituído por 2 grupos de questões: grupo 1 com 4 questões de resposta fechada, grupo 2 com 5 questões de resposta aberta. O grupo 1 está cotado para 6 valores e o grupo 2 tem a cotação total de 14 valores.

Nas questões de resposta fechada serão consideradas apenas as respostas assinaladas nos quadrados disponíveis.

Para as questões de resposta aberta deves responder no caderno de respostas. Deves **indicar nas tuas respostas todos os cálculos e justificações**.

**Correção das questões de resposta fechada:**

Temos para as questões de escolha múltipla, Certa: 1 val. Errada: - 0.3 val. Branco: 0 val.

Temos para as questões de validação de hipóteses, Opção correta (Verdadeira ou Falsa): Cotação total/Nº de hipóteses, Errada ou em Branco: 0 val.

Boa sorte!

		Classificação
1	1.0	
2	2.0	
3a)	1.0	
3b)	1.0	
4	1.0	
5a)	1.0	
5b)	1.0	
5c)	1.0	
6a)	1.5	
6b)	1.5	
7a)	1.0	
7b)	1.0	
7c)	1.0	
8a)	1.0	
8b)	1.0	
9a)	1.0	
9b)	1.0	
9c)	1.0	

O meu nível de confiança para realizar o exame, a que vou responder de seguida é

- de 0% a 20%
- de 20% a 40%
- de 40% a 60%
- de 60% a 80%
- de 80% a 100%

**Obrigada** por responder a esta questão!

## Grupo 1 (6 val.)

**Questão 1 (1 val.)** Seja  $A$  uma matriz  $15 \times 23$  tal que a sua característica é igual a 12. Assinale com um **V** o quadrado correspondente a uma afirmação **verdadeira**, e com um **F** o quadrado correspondente a uma afirmação **falsa**, quanto estiver a avaliar as seguintes afirmações sobre a matriz  $A$  e/ou a sua matriz transposta  $A^T$ .

- A característica de  $A^T$  é igual a 12;
- A nulidade de  $A$  é igual a 12;
- A nulidade de  $A^T$  é igual a 3;
- As colunas de  $A^T$  são um subespaço de  $R^{15}$ ;
- O espaço nulo de  $A$  é um subespaço de  $R^{23}$ .

**Questão 2 (2 val.)** Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ .

Assinale com um **X** o quadrado correspondente à **única** afirmação que **NÃO** está correta.

- A transformação linear  $x \rightarrow Ax$  é diagonalizável;
- A matriz  $A$  é invertível;
- A matriz  $A$  é a composição de uma rotação com uma dilatação;
- O sistema dinâmico  $x_{k+1} = Ax_k$  tem trajetórias que são espirais a afastar-se da origem.

**Questão 3 (2 val.)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) **(1 val.)** Assinale com um **X** no quadrado correspondente à **única** afirmação correta sobre as colunas da matriz  $A$ .

- As colunas de  $A$  são linearmente dependentes;
- As colunas de  $A$  são uma base para  $\mathbb{R}^5$ ;
- As colunas de  $A$  são um conjunto ortogonal;
- As colunas de  $A$  geram  $\mathbb{R}^4$ .

(b) **(1 val.)** Quanto às seguintes propriedades da matriz  $A$  e/ou da matriz transposta  $A^T$ , assinale com um **V** o quadrado correspondente a uma afirmação **verdadeira**, e com um **F** o quadrado correspondente a uma afirmação **falsa**.

- A equação  $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem uma única solução;
- Existe pelo menos um  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$  tal que a equação  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  é impossível;
- Se  $A$  é a matriz que representa uma transformação linear  $T$ , então  $T$  é injetiva;
- A matriz  $A^T$  não é invertível.

**Questão 4 (1 val.)** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 2x_3, x_1 - 4x_2 + x_3, x_1 - x_3, 2x_2)$$

Assinale com um **V** o quadrado correspondente a uma afirmação que considera **verdadeira**, e com um **F** o quadrado correspondente a uma afirmação que considera **falsa** relativamente à transformação linear  $T$ .

- o vetor  $(0, 1, -2)$  pertence ao núcleo de  $T$ ;
- o núcleo de  $T$  é trivial;
- a transformação linear  $T$  é sobrejetiva;

- a matriz que representa  $T$  relativamente às bases canônicas é:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;

- o vetor  $(0, 1, 1, 0)$  pertence à imagem de  $T$ .

## Grupo 2 (14 val.)

**Questão 5 (3 val.)** Seja  $W$  um espaço vetorial, e  $V$  o subespaço gerado por quatro vetores não nulos  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ , de  $W$ , ou seja,  $V$  é a expansão linear do conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ . Neste caso, escrevemos  $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ . Tem-se ainda

- $\mathbf{v}_2 \notin \text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ ;
- $\mathbf{v}_3 \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$
- $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 - 6\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ ;

(a) (1 val.) Diga, justificando, se o conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é linearmente independente.

(b) (1 val.) Diga, justificando, se  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ .

(c) (1 val.) Obtenha uma base e determine a dimensão de  $V$ .

**Questão 6 (3 val.)** Considere o seguinte subespaço de  $\mathbb{R}^3$

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \text{ e } x_1 + x_2 - x_3 = 0 \},$$

e o seu complemento ortogonal  $W^\perp$  (usando o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ ).

- (a) (1.5 val.) Deduza uma base para, e indique a dimensão de,  $W$ .
- (b) (1.5 val.) Deduza uma base para, e indique a dimensão de,  $W^\perp$ .

**Questão 7 (3 val.)** Seja  $A_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \beta & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ .

- (a) (1 val.) Para  $\beta = 1$  escreva o polinómio característico de  $A_1$ . Justifique que  $A_1$  é invertível.
- (b) (1 val.) Para  $\beta = 0$ , obtenha uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , constituída por vetores próprios de  $A_0$ .
- (c) (1 val.) Diagonalize ortogonalmente  $A_0$ , ou seja, indique uma matriz ortogonal  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tal que  $A_0 = PDP^T$ .

**Questão 8 (2 val.)** Seja a matriz estocástica  $P = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{bmatrix}$ , com  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ .

- (a) (1 val.) Mostre que para  $\alpha = \beta = 0$  existem dois vetores estacionários. Determine a condição para que  $P$  tenha apenas um vetor estacionário.
- (b) (1 val.) Considere a cadeia de Markov  $x_{k+1} = Px_k$ , com  $P$  em que  $\alpha = \beta = 1/2$ . Calcule o limite de  $x_k$  quando  $k \rightarrow \infty$ .



**Questão 9 (3 val.)** Seja  $\mathbf{u}$  um vetor unitário em  $\mathbb{R}^n$  e  $B = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ .

- (a) (1 val.) Dado  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , calcule  $B\mathbf{x}$  e mostre que  $B\mathbf{x}$  é o vetor projeção ortogonal de  $\mathbf{x}$  na direção de  $\mathbf{u}$ .
- (b) (1 val.) Mostre que  $B$  é simétrica e que  $B^2 = B$ .
- (c) (1 val.) Mostre que  $\mathbf{u}$  é um vetor próprio de  $B$  e indique o valor próprio que lhe está associado.

Ao responder às questões deste exame, o meu nível de confiança geral foi

- de 0% a 20%
- de 20% a 40%
- de 40% a 60%
- de 60% a 80%
- de 80% a 100%

**Obrigada** por responder a esta questão!