

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-T, LERC, LEGI E LEE. 1º SEMESTRE 2022/23

INFORMAÇÕES GERAIS

Docente Responsável António Bravo <antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

Programa.

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raiz de índice n , funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo). Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas) Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em \mathbb{R} .** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em \mathbb{R} .** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

1. CÁLCULO INTEGRAL

Conteúdo

5.1. Motivação para a Noção de Integral	2
5.2. Partições, Somas Inferiores e Superiores	4
5.3. Integral Superior e Inferior	5
5.4. Funções Integráveis e Não-Integráveis.	7
5.5. Critérios de integrabilidade. Exemplos.	8
5.6. Propriedades do integral	12
5.7. Integral Indefinido	15
5.8. Teorema Fundamental do Cálculo. Regra de Barrow	16
5.9. Algumas aplicações do integral	21
Material extra: Funções elementares definidas por integrais	25

Vamos agora estudar a noção de *integral*. As noções de derivada e integral formam, em conjunto, os pilares do Cálculo.

5.1. Motivação para a Noção de Integral. Uma motivação importante para o estudo de integrais é o cálculo de áreas. Vocês já encontraram a noção intuitiva de área e aprenderam fórmulas para as áreas de alguns conjuntos com geometria simples, tais como um retângulo ou um círculo (proveitem este momento para pensar no seguinte: como se faz para chegar à fórmula da área de um círculo?). Mas como podemos dar uma definição precisa de área de um região arbitrária do plano?

Vamos considerar uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Quando a função é não-negativa, vamos procurar definir de uma forma precisa a área da região R que fica por baixo do gráfico desta função:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

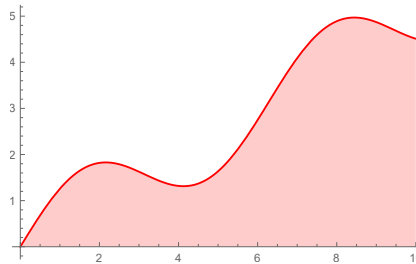


FIGURA 1. Área debaixo do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + x/2$, com $0 < x < 10$.

Ao valor da área, que iremos definir adiante, chama-se *integral* de f no intervalo $[a, b]$.

No caso em que f tome também valores negativos, como na figura seguinte:

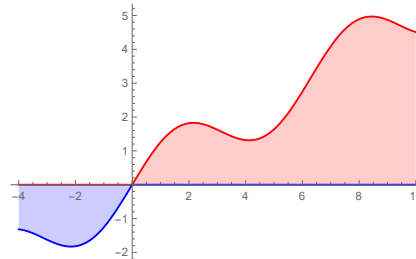


FIGURA 2. Área entre o eixo Ox e o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + \frac{x}{2}$, com $-4 < x < 10$.

o integral representará a “área com sinal” delimitada pelo gráfico da função, i.e., a diferença entre a área vermelha (acima do eixo horizontal) e a área azul (abaixo do eixo horizontal).

Por enquanto e para simplificar (trata-se, para já, de uma motivação que levará a uma definição), vamos assumir que $f(x) \geq 0$ e que f é contínua. A ideia por detrás da definição de integral é muito simples. Começamos por dividir o intervalo $[a, b]$ em intervalos mais pequenos, por exemplo em 4 sub-intervalos:

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup [t_3, t_4].$$

onde os números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 , satisfazem:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b.$$

No primeiro intervalo $[t_0, t_1]$ a função tem um valor mínimo m_1 e um valor máximo M_1 , no segundo intervalo $[t_1, t_2]$ a função tem um valor mínimo m_2 e um valor máximo M_2 , e assim por diante, de forma que, no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a função tem um valor mínimo m_i e um valor máximo M_i .

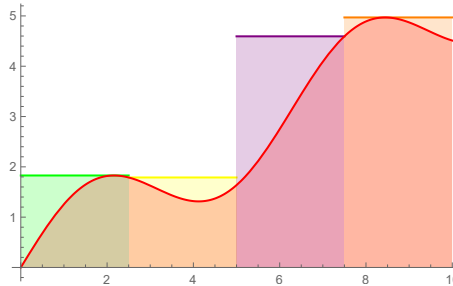


FIGURA 3. Soma superior de $f(x) = \text{sen}(x) + x/2$ com 4 intervalos

Desta divisão resulta então uma colecção de rectângulos *dentro* da região R e uma outra colecção de rectângulos *contendo* a região R . A soma da área dos rectângulos interiores é:

$$\underline{S} = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3),$$

enquanto a soma da área dos rectângulos exteriores é:

$$\bar{S} = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3).$$

Observação chave: Qualquer que seja o valor A para a área de R deveremos ter:

$$\underline{S} \leq A \leq \bar{S},$$

e isto deve acontecer *independentemente* da decomposição do intervalo $[a, b]$.

Por outro lado, é de esperar que, usando partições em sub-intervalos cada vez mais pequenos, se obtenham aproximações cada vez melhores para o valor de A .

Exemplo 1.1

Consideremos a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, e procuremos estimativas inferiores e superiores para a área A da região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), 0 \leq x \leq 1.\}$$

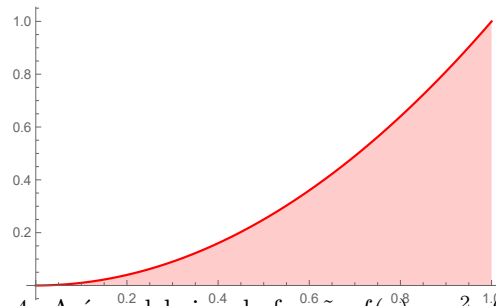


FIGURA 4. A área debaixo da função $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Vamos dividir o intervalo $[0, 1]$ em 2 sub-intervalos do mesmo comprimento: $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$, que ficam determinados através dos extremos $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$ e $t_2 = 1$. Como a função é crescente, num intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ o mínimo de f é $m_i = f(t_{i-1})$ e o máximo de f é $M_i = f(t_i)$. Logo:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(0) = 0, & M_1 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ m_2 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, & M_2 &= f(1) = 1. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que a soma da área dos rectângulos interiores é:

$$\underline{S} = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

enquanto a soma da área dos rectângulos exteriores é:

$$\bar{S} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Assim, a área A da região delimitada pelo gráfico de f deverá satisfazer:

$$\frac{1}{8} \leq A \leq \frac{5}{8}.$$

Por outro lado, se escolhermos uma subdivisão em 4 intervalos, de forma que $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{3}{4}$, $t_4 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(0) = 0, & M_1 &= f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}, \\ m_2 &= f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}, & M_2 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ m_3 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, & M_3 &= f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}, \\ m_4 &= f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}, & M_4 &= f(1) = 1, \end{aligned}$$

Logo, obtemos que a soma da área dos rectângulos interiores é agora:

$$\underline{S} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{32},$$

enquanto a soma da área dos rectângulos exteriores é agora:

$$\bar{S} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{32}.$$

Assim, obtemos melhores estimativas para a área A :

$$\frac{1}{8} < \frac{7}{32} \leq A \leq \frac{15}{32} < \frac{5}{8}.$$

5.2. Partições, Somas Inferiores e Superiores.

Vamos agora formalizar estas ideias de uma forma precisa a uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada (não necessariamente contínua nem não-negativa).

Definição 1.2

Sejam $a < b$ números reais. Uma **decomposição** do intervalo $[a, b]$ é uma coleção finita de pontos $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, em que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

Note-se que uma decomposição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ permite dividir (“partir”) este intervalo em n sub-intervalos $[a, t_1] = [t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, \dots , $[t_{n-1}, t_n] = [t_{n-1}, b]$.

Definição 1.3: Somas de Darboux

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ uma decomposição de $[a, b]$.

(a) A **soma inferior** (de Darboux) de f relativa a P é o número real

$$\underline{S}_P(f) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde } m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

(b) A **soma superior** (de Darboux) de f relativa a P é o número real

$$\overline{S}_P(f) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde } M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Nota 1.1. Para definir as somas inferior e superior apenas precisamos que a função f seja limitada (por forma a que tenha ínfimo e supremo finitos em cada subintervalo determinado pela decomposição P). Em particular, f pode assumir valores negativos e positivos.

5.3. Integral Superior e Inferior.

Vamos agora estudar o que acontece com estas somas quando se alteram as partições.

Definição 1.4

Dadas duas partições P e Q do intervalo $[a, b]$ vamos dizer que Q é **mais fina** que P (ou que **refina** P) se $P \subset Q$, i.e., se todos os pontos de P pertencem a Q .

Exemplo 1.5

Os conjuntos $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ e $P_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ são todas partições do intervalo $[0, 1]$. A decomposição P_2 é mais fina que P_1 , mas a decomposição P_3 não é mais fina que P_1 .

O seguinte lema fornece uma primeira propriedade importante das somas superior e inferior.

Lema 1.2. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, P e Q partições de $[a, b]$. Se Q é mais fina que P , então:*

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_P(f).$$

Demonstração. Notem que da definição é claro que, para qualquer decomposição P , temos que:

$$\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f).$$

Vamos agora mostrar que $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_Q(f)$. A demonstração de que $\overline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_P(f)$ é semelhante.

Basta mostrar que $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_Q(f)$ quando Q tem apenas mais um ponto que P . O caso geral segue-se, pois podemos juntar um a uma P os pontos de Q , obtendo partições $P \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_k = Q$, em que cada decomposição tem mais um ponto que a anterior. Assim:

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_{P_2}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{P_k}(f) = \underline{S}_Q(f).$$

Seja então $P = \{t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n\}$ e $Q = \{t_0, \dots, t_{i-1}, c, t_i, \dots, t_n\}$, onde

$$a = t_0 < \dots < t_{i-1} < c < t_i < \dots < t_n = b.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \underline{S}_P(f) &= m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_i(t_i - t_{i-1}) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) \\ &= m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_i(c - t_{i-1}) + m_i(t_i - c) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) \\ &\leq m_1(t_1 - t_0) + \dots + m'(c - t_{i-1}) + m''(t_i - c) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \underline{S}_Q(f), \end{aligned}$$

onde usámos:

$$\begin{aligned} m' &:= \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq c\} \geq \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i, \\ m'' &:= \inf\{f(x) : c \leq x \leq t_i\} \geq \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i. \end{aligned} \quad \square$$

O seguinte lema fornece uma segunda propriedade importante das somas superior e inferior.

Lema 1.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para quaisquer partições P_1 e P_2 de $[a, b]$:*

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f).$$

Demonstração. Seja $Q = P_1 \cup P_2$. Então Q é uma decomposição que é mais fina que P_1 e P_2 . Pelo Lema 1.2, concluímos que:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f). \quad \square$$

Este lema mostra que o conjunto de todas as somas superiores é minorado e o conjunto de todas as soma inferiores é majorado, logo as seguintes definições fazem sentido.

Definição 1.6: Integral superior e inferior

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

- Chama-se **integral inferior de f** ao número real:

$$\int_a^b f := \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\}.$$

- Chama-se **integral superior de f** ao número real:

$$\int_a^b f := \inf\{\overline{S}_P(f) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\}.$$

Também é comum usar como notação para integral inferior e superior:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Leiam as “Notas importantes sobre nomenclatura” na página 7, que tratam sobre este assunto.

Segue-se do Lema 1.3 que temos sempre:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f.$$

Os dois exemplos seguintes mostram que estes dois números podem ser iguais ou distintos.

Exemplo 1.7

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função constante $f(x) = c$. Qualquer que seja a decomposição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ temos que:

$$m_i = M_i = c.$$

Segue-se que:

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^n c(t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = c(b - a),$$

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^n c(t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$

Concluimos que

$$\int_a^b f = \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\} = c(b - a),$$

$$\int_a^b f = \inf\{\overline{S}_P(f) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\} = c(b - a),$$

e, portanto, neste caso:

$$\int_a^b f = c(b - a) = \int_a^b f.$$

Exemplo 1.8

Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da função de Dirichlet ao intervalo $[a, b]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Qualquer que seja a decomposição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ um subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém pontos racionais e pontos irracionais, logo:

$$m_i = \inf\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0, \quad M_i = \sup\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1.$$

Segue-se que:

$$\underline{S}_P(g) = \sum_{i=1}^n 0(t_i - t_{i-1}) = 0, \quad \overline{S}_P(g) = \sum_{i=1}^n 1(t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Concluimos que

$$\int_a^b g = \sup\{\underline{S}_P(g) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\} = 0,$$

$$\int_a^b g = \inf\{\overline{S}_P(g) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\} = b - a,$$

e, portanto, neste caso:

$$\int_a^b g = 0 \neq b - a = \int_a^b g.$$

5.4. Funções Integráveis e Não-Integráveis.

Definição 1.9: Funções Integráveis. Integral

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é uma **função integrável** no intervalo $[a, b]$ se os seus integrais superior e inferior coincidem.

Nesse caso, ao valor comum chama-se **integral** de f em $[a, b]$ e representa-se pelo símbolo:

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f.$$

Seguem-se algumas **Notas importantes sobre nomenclatura**.

É comum, ao escrever integral (ou até somas superiores ou inferiores), explicitar a variável independente, escrevendo por exemplo

$$\int_a^b f(x) dx.$$

No entanto, a variável escolhida não tem qualquer importância: se f for integrável, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$, etc.

Note-se que isto é semelhante ao que acontecia com somatórios: por exemplo,

$$\sum_{i=1}^3 a_i \quad \text{tem o mesmo significado que} \quad \sum_{j=1}^3 a_j,$$

sendo que as variáveis i e j são meramente auxiliares. Nos somatórios, estas variáveis indicam-nos entre que ordens vamos somar (no exemplo, será da ordem $i = 1$ até $i = 3$); nos integrais, indicam-nos em que intervalo estamos a integrar a função f ($x \in [a, b]$).

Note-se a diferença entre

$$\int f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx :$$

- o primeiro termo é uma função e representa uma primitiva de f ;
- o segundo termo é um número real (se f é integrável) e representa o integral entre a e b da função f .

A razão para se escolherem notações semelhantes ficará clara quando falarmos no Teorema Fundamental do Cálculo e na Regra de Barrow mais à frente.

Exemplo 1.10

O Exemplo 1.7 mostra que uma função constante $f(x) = c$ definida no intervalo $[a, b]$ é integrável e:

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

Exemplo 1.11

O Exemplo 1.8 mostra que a restrição da função de Dirichlet a um intervalo $[a, b]$ não é uma função integrável.

O símbolo \int representa um S alongado, de “soma integral”. Expliquemos melhor a notação $\int_a^b f(x) dx$, recordando o caso em que $f(x) \geq 0$, em que o integral representa a área abaixo do gráfico. Dado x , é comum referirmo-nos a $f(x) dx$ como sendo a área de um retângulo “infinitesimal” (muitíssimo pequeno) centrado em x , com base a medir dx e altura $f(x)$. Assim, a área abaixo do gráfico é vista intuitivamente como uma “soma” das áreas de todos estes retângulos quando x varia entre a e b .

Embora em outras disciplinas isto seja apresentado como sendo rigoroso, não o é matematicamente, e deve ser usado apenas como motivação para a noção e nomenclatura usada para o integral. Uma das formulações rigorosas é a que apresentámos, usando partições e somas de Darboux.

5.5. Critérios de integrabilidade. Exemplos.

Vamos agora procurar obter critérios eficientes que nos permitam decidir se uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é ou não integrável.

Proposição 1.12: Critério de Integrabilidade 1

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então

- (1) f é integrável em $[a, b] \iff$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma decomposição P de $[a, b]$ tal que:

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$

- (2) f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = \alpha \iff$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma decomposição P de $[a, b]$ tal que:

$$\alpha - \varepsilon < \overline{S}_P(f) \leq \alpha \leq \underline{S}_P(f) < \alpha + \varepsilon.$$

Demonstração. Mostramos apenas (1), ficando como exercício ver por que (1) implica (2).

(\Rightarrow) Suponhamos que f é integrável de forma que os seus integrais superiores e inferiores coincidem com o valor do integral:

$$\int_a^b f = \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\} = \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é decomposição de } [a, b]\}.$$

Pela propriedade do supremo e do ínfimo enunciada na Proposição ??, sabemos então que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem partições P_1 e P_2 tais que

$$\underline{S}_{P_1}(f) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \overline{S}_{P_2}(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando a decomposição $P = P_1 \cup P_2$, que refina P_1 e P_2 , e usando o Lema 1.2, obtemos

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f) - \underline{S}_{P_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(\Leftarrow) Suponhamos agora que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe uma decomposição P de $[a, b]$ tal que:

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$

Como:

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \sup\{\underline{S}_Q(f) : Q \text{ é decomposição de } [a, b]\} \geq \underline{S}_P(f), \\ \int_a^b f &= \inf\{\overline{S}_Q(f) : Q \text{ é decomposição de } [a, b]\} \leq \overline{S}_P(f), \end{aligned}$$

concluimos que:

$$\int_a^b f - \int_a^b f \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário o integral superior e inferior coincidem, logo a função é integrável. \square

A seguinte consequência direta é útil na prática

Corolário 1.13: Critério de Integrabilidade 2

Seja f limitada em $[a, b]$. Então f é integrável \iff existe uma sucessão de partições $(P_n)_n$ de $[a, b]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = 0.$$

Além disso, se $\overline{S}_{P_n}(f)$ e $\underline{S}_{P_n}(f)$ convergem, temos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{P_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{P_n}(f).$$

Exemplo 1.14

Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x) = x$. Do seu gráfico, daquilo que sabemos sobre a área de um triângulo e da motivação que esteve por detrás da construção do integral, deveremos ter:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

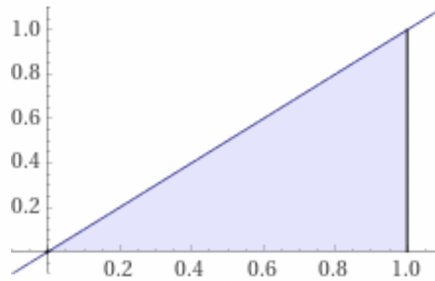


FIGURA 5. Representação gráfica do Exemplo 1.14.

Vamos verificar que de facto assim é. Seja $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ a decomposição de $[0, 1]$ em n intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Para esta decomposição é imediato que:

$$m_i = \inf\{x : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i-1}{n},$$

$$M_i = \sup\{x : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i}{n}.$$

Logo, vemos que as somas inferior e superior para esta decomposição são:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{n-1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Invocando o Corolário 1.13, segue que $f(x) = x$ é integrável em $[0, 1]$ e:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.15

Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^2$, a função já tratada no Exemplo 1.1. Pretendemos calcular

$$\int_0^1 x^2 dx,$$

que corresponde à área abaixo do gráfico de f para $x \in [0, 1]$.

Seja $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ a decomposição de $[0, 1]$ em n intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Para esta decomposição é imediato que:

$$m_i = \inf\{x^2 : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{(i-1)^2}{n^2},$$

$$M_i = \sup\{x^2 : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i^2}{n^2}.$$

Usando o facto de

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(o que se pode demonstrar por indução), vemos que as somas inferior e superior para esta decomposição são:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \rightarrow \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Invocando o Corolário 1.13, concluímos que a função $f(x) = x^2$ é integrável em $[0, 1]$ e que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Exercício 1.4. Raciocinando como em cima e usando o facto de

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

mostre que a função $f(x) = x^3$ é integrável em $[0, 1]$ e que $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

Exemplo 1.16

Este exemplo ilustra a afirmação intuitiva da ‘área de uma linha ser nula’.

Seja $f(x) = 0, x \in [0, 2] \setminus \{1\}$, $f(1) = 10$. Então f é integrável em $[0, 2]$ e $\int_0^2 f(x) dx = 0$.

Seja $P_n = \{0, 1 - 1/n, 1 + 1/n, 2\}$ a decomposição de $[0, 2]$ em 3 subintervalos. Então, como em $[0, 1 - 1/n]$ e $[1 + 1/n, 2]$ temos $\inf f(x) = \sup f(x) = 0$,

$$\overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = (10 - 0) \cdot [(1 + 1/n) - (1 - 1/n)] = 20/n \rightarrow 0,$$

logo f é integrável em $[0, 2]$ e

$$\underline{S}_{P_n}(f) = 0, \quad \overline{S}_{P_n}(f) = 20/n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 f(x) dx = 0.$$

Mais geralmente, temos que: se $f(x) = 0$, $x \neq c_1, \dots, c_p$ (conjunto finito) então f é integrável em $[a, b]$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Estes exemplos (trabalhosos) mostram que precisamos de formas mais expeditas de responder a duas questões para que a noção de integral possa ser realmente útil:

- Que classes de funções são integráveis?
- Como podemos calcular o seu integral num intervalo $[a, b]$ eficientemente?

Responda-se desde já (parcialmente) à primeira questão:

Teorema 1.17: Classes de funções integráveis

- (1) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **contínua**. Então f é integrável em $[a, b]$.
- (2) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **monótona**. Então f é integrável em $[a, b]$.

Demonstração. (1) A prova da primeira afirmação necessita de uma noção que não faz parte do programa (a de continuidade uniforme de uma função) pelo que não é apresentada. O(A) aluno(a) interessado(a) deverá consultar a bibliografia ou falar com o professor.

(2) Sendo f monótona em $[a, b]$, é claro que f é limitada por $f(a)$ e $f(b)$. Se $f(a) = f(b)$ então f é constante e, pelo Exemplo 1.7, a função é integrável.

Seja então $f(a) \neq f(b)$. Vamos supor que f é crescente: $f(a) < f(b)$ (o caso decrescente é tratado de forma inteiramente análoga). Dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher uma decomposição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ tal que:

$$0 < t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Como f é crescente, temos:

$$m_i = f(t_{i-1}) \text{ e } M_i = f(t_i),$$

logo:

$$\begin{aligned} \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε era arbitrário, pela Proposição 1.12, a função f é integrável. □

Este último resultado permite-nos verificar que muitas das funções que estudaremos são integráveis. Para além disso, é uma consequência das propriedades que veremos a seguir que, se f é integrável em subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$, o que nos permite considerar integrabilidade ‘por troços’: funções monótonas / contínuas por troços são também integráveis. Também veremos que se podem alterar os valores de uma função integrável num conjunto finito sem afectar integrabilidade (nem o integral). É possível caracterizar de forma precisa exatamente quais as funções que são integráveis, mas tal estudo detalhado não faz parte do programa. Posto

isto, fica a faltar uma forma expedita de calcular integrais, o que explicaremos à frente na Secção 5.8.

5.6. Propriedades do integral.

Vamos agora estudar propriedades do integral, que são úteis, por exemplo, no seu cálculo.

Teorema 1.18: Aditividade em relação à região de integração

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < c < b$ e suponha-se que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$ e temos:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Seja $\alpha = \int_a^c f$ e $\beta = \int_c^b f$. Pelo Corolário 1.13, para todo o $\varepsilon > 0$ existem partições P_1 de $[a, c]$ e P_2 de $[c, b]$ tais que:

$$(1) \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_1}(f) \leq \alpha \leq \overline{S}_{P_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(2) \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_2}(f) \leq \beta \leq \overline{S}_{P_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $P = P_1 \cup P_2$. Então P é uma decomposição de $[a, b]$ para a qual

$$\underline{S}_P(f) = \underline{S}_{P_1}(f) + \underline{S}_{P_2}(f) \quad \text{e} \quad \overline{S}_P(f) = \overline{S}_{P_1}(f) + \overline{S}_{P_2}(f).$$

Assim, a soma de (1) e (2) fornece:

$$(\alpha + \beta) - \varepsilon < \underline{S}_P(f) \leq \alpha + \beta \leq \overline{S}_P(f) < (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, pelo Corolário 1.13, concluímos que f é integrável em $[a, b]$ e que:

$$\int_a^b f = \alpha + \beta = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Definimos anteriormente o integral $\int_a^b f$ apenas se $a < b$. Introduzimos agora as seguintes:

Convenções importantes

$$\int_a^a f dx = 0 \text{ (o caso } a = b \text{)}, \quad \int_a^b f := - \int_b^a f, \text{ se } a > b.$$

Com estas definições, é fácil verificar que a relação:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

é verdadeira para **quaisquer** $a, b, c \in \mathbb{R}$ (i.e., mesmo que $a < c < b$ não se verifique).

Teorema 1.19: Linearidade do integral

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então:

$$(i) \quad f + g \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$(ii) \quad cf \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

Demonstração. Vamos mostrar (i). A demonstração de (ii) é bastante mais fácil e fica como exercício (é boa ideia considerar separadamente os casos $c > 0$, $c = 0$ e $c < 0$).

Para demonstrar (i), seja então $\alpha = \int_a^b f$ e $\beta = \int_a^b g$. Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existem partições P_1 e P_2 de $[a, b]$ tais que:

$$(3) \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_1}(f) \leq \alpha \leq \overline{S}_{P_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(4) \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_2}(g) \leq \beta \leq \overline{S}_{P_2}(g) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

É fácil verificar que para um intervalo $[c, d]$ qualquer e duas funções limitadas f e g , temos sempre:

$$\begin{aligned} \inf_{[c,d]}(f+g) &\geq \inf_{[c,d]} f + \inf_{[c,d]} g, \\ \sup_{[c,d]}(f+g) &\leq \sup_{[c,d]} f + \sup_{[c,d]} g. \end{aligned}$$

Sendo assim, se tomarmos a decomposição $P = P_1 \cup P_2$ obtemos $\underline{S}_P(f+g) \geq \underline{S}_P(f) + \underline{S}_P(g)$ e $\overline{S}_P(f+g) \leq \overline{S}_P(f) + \overline{S}_P(g)$. A soma das equações (3) e (4) fornece então:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) - \varepsilon < \underline{S}_{P_1}(f) + \underline{S}_{P_2}(g) \leq \underline{S}_P(f) + \underline{S}_P(g) \leq \underline{S}_P(f+g) \leq \\ \leq \overline{S}_P(f+g) \leq \overline{S}_P(f) + \overline{S}_P(g) \leq \overline{S}_{P_1}(f) + \overline{S}_{P_2}(g) < (\alpha + \beta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, isto mostra que $f+g$ é integrável em $[a, b]$ e o seu integral é dado por:

$$\int_a^b (f+g) = \alpha + \beta = \int_a^b f + \int_a^b g. \quad \square$$

Nota 1.5. Pode-se mostrar (mais difícil!) que, se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em $[a, b]$, então fg também é uma função integrável em $[a, b]$. Notem no entanto que, em geral,

$$\int_a^b (fg) \neq \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b g \right).$$

Por outro lado, se f e g são funções integráveis, a função composta $f \circ g$ pode não ser uma função integrável.

Nota 1.6. Usando linearidade e o Exemplo 1.16, temos a seguinte consequência: se f é integrável em $[a, b]$ e $g(x) = f(x)$, $x \neq c_1, \dots, c_p$, então g é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

ou seja, **o integral não depende de valores de f num conjunto finito**. De facto, por linearidade, basta ver que se $h = f - g = 0$ em $[a, b] \setminus \{c_1, \dots, c_p\}$ então h é integrável e $\int_a^b h(x) dx = 0$, o que se vê como no Exemplo 1.16.

Teorema 1.20: Monotonia do integral

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b > a$, duas funções integráveis.

(i) Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f \geq 0$.

(ii) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Em particular, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo o $x \in [a, b]$ então:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demonstração. A demonstração de (i) fica como exercício. Para demonstrar (ii) reparem que $f(x) \leq g(x)$ sse $g(x) - f(x) \geq 0$. Assim, aplicando (i) à função $g - f$ e usando a linearidade do integral, obtemos:

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Finalmente, aplicando (ii) às funções constantes $g(x) = m$ e $h(x) = M$, obtemos:

$$m(b - a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b - a). \quad \square$$

Recordem-se que para quaisquer números reais a e b : $|a + b| \leq |a| + |b|$. Segue-se que para quaisquer números reais x_1, \dots, x_n :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

A próxima propriedade do integral pode ser vista como um generalização desta propriedade:

Teorema 1.21: Módulo e integral

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $|f|$ é uma função integrável em $[a, b]$ e temos:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demonstração. Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vamos designar por f^+ a sua parte não-negativa e por f^- a sua parte não-positiva:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) > 0, \\ -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Notem que $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Agora temos o seguinte exercício:

Exercício 1.7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e P uma decomposição de $[a, b]$. Se M_i e m_i são como anteriormente para f , M'_i e m'_i analogamente para $|f|$, mostre que:

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i.$$

Conclua que, se f é integrável então $|f|$ é integrável.

Por este exercício, segue-se do Teorema 1.19 que

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{e} \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

também são funções integráveis. Recorrendo ao Teorema 1.20, concluímos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= \left| \int_a^b (f^+ - f^-) \right| = \left| \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \right| \leq \left| \int_a^b f^+ \right| + \left| \int_a^b f^- \right| \\ &= \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|. \end{aligned} \quad \square$$

Nota 1.8. O Teorema 1.21 diz-nos que, se f é integrável em $[a, b]$, então $|f|$ também é integrável em $[a, b]$, mas o recíproco, em geral, não é verdadeiro. Por exemplo, para a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

temos que $|f| = 1$ é uma função constante. Portanto $|f|$ é integrável em $[a, b]$, mas f não é integrável em $[a, b]$.

5.7. Integral Indefinido.

Vamos agora estudar uma ferramenta muito eficiente para calcular integrais, baseada no chamado Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona o integral com a derivada.

Começamos por observar que integrar uma função “suaviza” o seu comportamento:

Teorema 1.22

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$(5) \quad F(x) := \int_a^x f,$$

é contínua.

O resultado anterior pode ser escrito na forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt.$$

Demonstração do Teorema 1.22. Como a função f é integrável, por definição, é limitada: existe $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq L, \quad \forall x \in [a, b].$$

Seja então $c \in [a, b]$. Temos que:

$$\begin{aligned} |F(c+h) - F(c)| &= \left| \int_a^{c+h} f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^{c+h} f \right| \\ &\leq \left| \int_c^{c+h} |f| \right| \leq \left| \int_c^{c+h} L \right| = L|h| \end{aligned}$$

(notem que h pode ser > 0 ou < 0). Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \varepsilon/L$ e obtemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow |F(c+h) - F(c)| \leq \varepsilon,$$

portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) = F(c)$, logo F é contínua em c . □

Notação É costume chamar a F introduzido em (5) o **integral indefinido** de f com origem em a . Por vezes, para acentuar que x é uma variável, escrevemos este integral indefinido na forma:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Exemplo 1.23

(1) $F(x) = \int_0^x c dt = cx.$

(2) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ tem domínio \mathbb{R} .

Quem tiver Probabilidade em Estatística irá encontrar estas funções:

Função erro ('error function'): $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F(x)$

Função probabilidade acumulada - distribuição normal: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

(3) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ tem domínio \mathbb{R}^+ .

(4) $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t dt$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(5) Consideremos a restrição da função de Heaviside $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sendo esta função monótona, é integrável. O seu integral indefinido relativo a $a = -1$ é a função:

$$F(x) = \int_{-1}^x h(t) dt = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

que é uma função contínua. Notem pois que o integral transforma uma função descontínua numa função contínua!

5.8. Teorema Fundamental do Cálculo. Regra de Barrow.

Nesta secção daremos um resultado que permite, na prática, calcular de forma expedita muitos integrais. Começemos por ver que, quando a função integranda f é contínua, o integral indefinido é diferenciável e a derivada é especialmente simples:

Teorema 1.24: Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o seu integral indefinido:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Se f é contínua em $c \in [a, b]$ então F é diferenciável em c e:

$$F'(c) = f(c).$$

(Se $c = a$ ou $c = b$ então por $F'(c)$ entenda-se a derivada lateral direita ou esquerda de F .)

Demonstração. Vamos supor que $c \in]a, b[$. Os casos $c = a$ e $c = b$ tratam-se de forma semelhante. Suponha-se primeiro que $h > 0$ e defina-se:

$$m_h := \inf\{f(x) : c \leq x \leq c + h\}$$

$$M_h := \sup\{f(x) : c \leq x \leq c + h\}.$$

Notem que como f é contínua em c temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} M_h = f(c).$$

Como $m_h \leq f(x) \leq M_h$ para $x \in [c, c + h]$, a monotonia do integral mostra que:

$$F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) dt \Rightarrow m_h h \leq F(c + h) - F(c) \leq M_h h.$$

Pelo princípio do encaixe (Teorema ??, concluímos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} m_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} M_h = f(c).$$

O caso $h < 0$ é inteiramente análogo e fornece:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Portanto, as derivadas laterais de F existem em $x = c$ e são ambas iguais a $f(c)$. Logo F é diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$. \square

Nota 1.9. Neste teorema considerámos o caso em que o limite superior do integral varia. No entanto, observem que o caso em que o limite inferior varia reduz-se a este:

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt = \int_x^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt = - \int_a^x f(t) dt + \int_a^b f(t) dt.$$

Logo, se f é contínua em c , obtemos:

$$G'(c) = -f(c).$$

Daqui resulta que se f está definida para $x < a$ então a derivada de $F(x) = \int_a^x f = - \int_x^a f$ em $c < a$ é dada por:

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c).$$

Conclusão:

- (a) Se f é contínua em $x = c$ então a derivada de $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ em $x = c$ é dada por $F'(c) = f(c)$ (não interessa se $c < a$ ou $c > a$).
- (b) Se f é contínua em $x = c$ então a derivada de $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ em $x = c$ é dada por $G'(c) = -f(c)$ (não interessa se $c < b$ ou $c > b$).

O Teorema Fundamental do Cálculo é especialmente útil quando a função integranda $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos, pois obtemos:

Corolário 1.25

- (1) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o seu integral indefinido $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

é uma **primitiva** de f , i.e. F é uma função diferenciável tal que $F' = f$.

- (2) Em geral, se $a(x)$, $b(x)$ são diferenciáveis e f é contínua, então

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x)).$$

Demonstração. A primeira afirmação sai do Teorema Fundamental do Cálculo. Quanto à segunda, sendo $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ o integral indefinido, a fixo, temos

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = \left(\int_a^{b(x)} f(t) dt - \int_a^{a(x)} f(t) dt \right)' = (F(b(x)) - F(a(x)))',$$

e o resultado acima sai de (1) e da regra de derivação da função composta. \square

Exemplo 1.26

- (1) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ tem domínio \mathbb{R} . Pode mostrar-se que esta função, importantíssima em estatística, não se escreve através de funções elementares. As suas propriedades podem ser estudadas através das suas derivadas. Como $t \mapsto e^{-t^2}$ é contínua em \mathbb{R} , pelo corolário anterior:

$$F'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad F''(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Assim, F é estritamente crescente, sendo convexa se $x < 0$ e côncava se $x > 0$. Além disso, $F(0) = 0$, $F(x) > 0$ para $x > 0$, $F(x) < 0$ para $x < 0$.

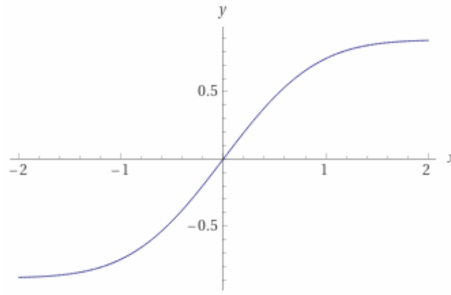


FIGURA 6. Gráfico da função $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (2) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ tem domínio \mathbb{R}^+ . Como $t \mapsto \frac{1}{t}$ é contínua em $]0, +\infty[$:

$$F'(x) = \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Logo, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x + C$, $0 = \ln 1 + C \Rightarrow C = 0$, ou seja F coincide com \ln (aliás é uma das formas de *definir* a função \ln - as propriedades vossas conhecidas de \ln saem da definição de integral - vejam a última secção do capítulo).

- (3) $F(x) = \int_x^{-1} \frac{e^t}{t} dt$ tem domínio \mathbb{R}^- . Como $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ é contínua em $] -\infty, 0 [$:

$$F'(x) = \left(\int_x^{-1} \frac{e^t}{t} dt \right)' = \left(- \int_{-1}^x \frac{e^t}{t} dt \right)' = -\frac{e^x}{x}, \quad x < 0.$$

- (4) $G(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ é contínua em $]0, +\infty[$ (e portanto em qualquer intervalo $[2, x^2]$ ou $[x^2, 2]$), temos

$$G'(x) = \left(\int_2^{x^2} \frac{e^t}{t} dt \right)' = 2x \frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{2e^{x^2}}{x}.$$

- (5) $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$, tem domínio \mathbb{R}^+ e

$$G'(x) = -\frac{e^x}{x} + \frac{2e^{x^2}}{x}.$$

- (6) $G(x) = \int_1^x \frac{x^2 e^t}{t} dt$ tem domínio \mathbb{R}^+ e

$$\left(\int_1^x \frac{x^2 e^t}{t} dt \right)' = \left(x^2 \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)' = 2x \int_1^x \frac{e^t}{t} dt + x^2 \frac{e^x}{x} = 2x \int_1^x \frac{e^t}{t} dt + x e^x.$$

- (7) $G(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$, com f contínua em \mathbb{R} , então $G''(x) = f(x)$. [exercício]

Tudo o que vimos nesta secção tem esta consequência importantíssima:

Teorema 1.27: Regra de Barrow

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f , i.e., uma função diferenciável tal que $F' = f$. Então:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Basta observar que as funções $F(x)$ e $\int_a^x f(t) dt$ possuem a mesma derivada em todos os pontos $x \in [a, b]$, logo diferem por uma constante $c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Segue-se que:

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t) dt + c \right) - \left(\int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

É usual designar-se esta fórmula por **Regra de Barrow**.

Notações importantes: É costume usar-se qualquer uma das seguintes notações:

$$F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(t)|_a^b = F(t)|_{t=a}^{t=b}.$$

Esta fórmula permite reduzir o cálculo de integrais ao cálculo de primitivas, o que já foi visto em secções anteriores.

Exemplo 1.28

$$(1) \int_1^3 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

$$(2) \int_0^1 (e^{3x} + 1) dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} e^3 + 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{e^3 + 2}{3}.$$

$$(3) \int_0^4 (x + \sqrt{x}) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = 8 + 16/3.$$

(4) Dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Comparem com as dificuldades que tivemos para calcular o integral nos casos $n = 1$ e $n = 2$!

Termine-se esta secção com duas fórmulas importantes no cálculo de integrais. Como consequência da fórmula de primitivação por partes:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx,$$

vem imediatamente a:

Fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Exemplo 1.29

Exemplifiquemos com o cálculo do integral

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx.$$

tomamos $u(x) = x^2$ e $v'(x) = xe^{x^2}$, donde $u'(x) = 2x$ e $v(x) = e^{x^2}/2$. Concluimos que:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Da fórmula de primitivação por substituição:

$$\int f(x) dx = \left(\int f(u(t)) u'(t) dt \right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

vem a:

Fórmula de integração por substituição. Se f e u' são funções contínuas e se u é invertível, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt.$$

Comparando com a fórmula de primitivação por substituição, vemos que deixa de ser necessário regressar à variável original (o resultado final é um número real, sem qualquer dependência da variável de integração x).

Exemplo 1.30

(1) Calcule-se $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$. Temos:

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t} dt \quad (\text{tomando } t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t, \text{ de forma que } dx = e^t dt) \\ &= \ln t \Big|_{t=1}^{t=2} \\ &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Notem que ao fazermos a substituição $t = \ln x$, também transformámos os respectivos limites:

$$\begin{aligned} x = e &\implies t = \ln e = 1, \\ x = e^2 &\implies t = \ln e^2 = 2. \end{aligned}$$

(2) Calculemos $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^3} e^{1/x} dx$.

Fazendo $t = 1/x \Leftrightarrow x = 1/t$, temos $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ e $x = 1/2 \Rightarrow t = 2$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$, logo

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^3} e^{1/x} dx = \int_2^1 t^3 e^t \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_1^2 t e^t dt = [te^t]_1^2 - \int_1^2 e^t dt = 2e^2 - e - [e^t]_1^2 = e^2.$$

(3) Para calcular $\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$:

Fazendo $x = \cos t$, $t \in]0, \pi[$, (ou $x = \sin t$) temos $dx = -\sin t dt$, $x = 1/2 \Rightarrow t = \pi/3$ e $x = \sqrt{2}/2 \Rightarrow t = \pi/4$, logo

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/4} -\tan^2 t dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (1+\tan^2 t)-1 dt = [\tan t - t]_{\pi/4}^{\pi/3} = \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}.$$

5.9. Algumas aplicações do integral.

Aplicação 1: Cálculo de áreas

Concluimos o capítulo retomando a motivação inicial: podemos agora definir rigorosamente *área* de algumas figuras planas:

- Se $f \geq 0$ em $[a, b]$, f integrável em $[a, b]$ e

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

então

$$\text{Área}(R) := \int_a^b f(x) dx.$$

- Mais geralmente, se f, g são integráveis, $g(x) \leq f(x)$ em $[a, b]$ e

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

então

$$\text{Área}(R) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Exemplo 1.31: Cálculo de Áreas

- (1) Área da região limitada por $y = x^2 - 2$ e $y = 6 - x^2$

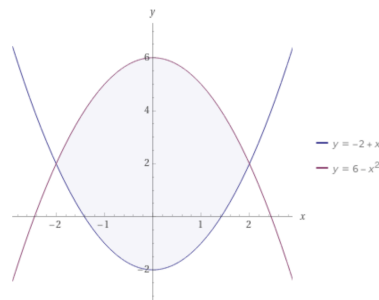
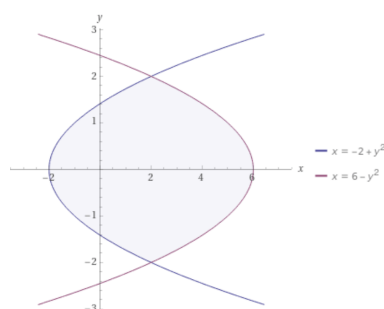


FIGURA 7. Região limitada por $y = x^2 - 2$ e $y = 6 - x^2$.

Intersecções: $x^2 - 2 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$$A = \int_{-2}^2 6 - x^2 - (x^2 - 2) dx = 2 \int_0^2 8 - 2x^2 dx = 4[4x - \frac{1}{3}x^3]_0^2 = 4(8 - \frac{8}{3}) = \frac{64}{3}.$$

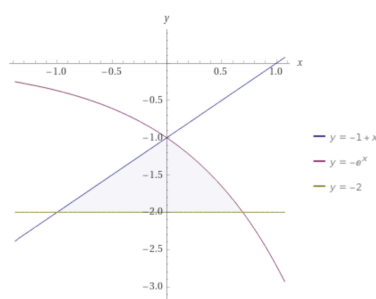
- (2) Área da região limitada por $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$

FIGURA 8. Região limitada por $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$.

É exatamente como no exemplo anterior, simplesmente trocamos os eixos:

$$A = \int_{-2}^2 6 - y^2 - (y^2 - 2) dy = \frac{64}{3}.$$

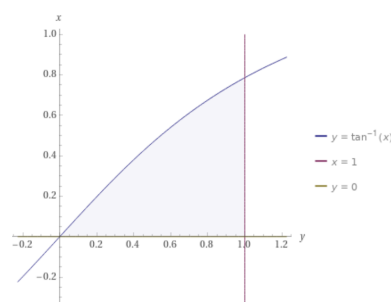
(3) Área da região limitada por $y = x - 1$, $y = -e^x$, $y = -2$:

FIGURA 9. região limitada por $y = x - 1$, $y = -e^x$, $y = -2$.

Intersecções: $x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$, $-e^x = -2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

$$A = \int_{-1}^0 (x - 1 - (-2)) dx + \int_0^{\ln 2} (-e^x - (-2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 + [-e^x + 2x]_0^{\ln 2} = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

(4) Área da região limitada por $y = \arctan x$, $x = 1$, $y = 0$.

FIGURA 10. Região limitada por $y = \arctan x$, $x = 1$, $y = 0$.

Integrando por partes, vemos que:

$$A = \int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

- (5) Área da região $\{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}\}$.

$$A = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = [\arctan(\ln x)]_1^e = \frac{\pi}{4}.$$

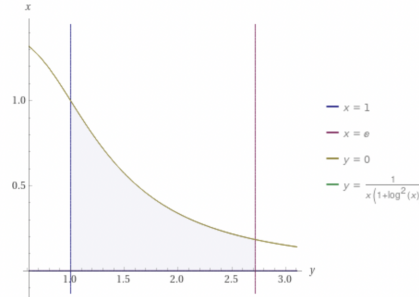


FIGURA 11. Representação do conjunto $\{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}\}$

- (6) Área do círculo raio 1: supondo sem perda de generalidade que está centrado em $(0, 0)$ a área é quatro vezes a área da região:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Fazendo $x = \sin t$, e notando que $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$,

$$A = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt = [2t + \sin(2t)]_0^{\pi/2} = \pi.$$

Para o círculo de raio $R > 0$: integrar $\sqrt{R^2 - x^2}$ de 0 a R e fazer $x = R \sin t$.

- (7) Área da *elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Vamos ver o caso $a = 2, b = 1$, i.e., $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$: temos

$$A = 4 \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

Usando a substituição $x = 2 \sin t, t \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow t = \arcsin(x/2)$ e temos $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 2 \Rightarrow t = \pi/2$, logo

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} (\cos(2t) + 1) dt = 2[\sin(2t)]_0^{\pi/2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Em geral, a área da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é $ab\pi$.

A aplicação 1 será abordada nos exercícios. As seguintes não fazem parte do programa de Cálculo I, sendo dadas aqui como extra.

Aplicação 2: Volume de sólidos de revolução

Se $f \geq 0$ e V é o sólido dado por revolução da linha $y = f(x)$ em torno do eixo dos xx , $a \leq x \leq b$, então

$$\text{vol}(V) = \int_a^b \pi f^2(x) dx,$$

ou seja, o volume obtém-se integrando a área do círculo com raio $f(x)$, $a \leq x \leq b$. Esta fórmula apenas será devidamente justificada em Cálculo II.

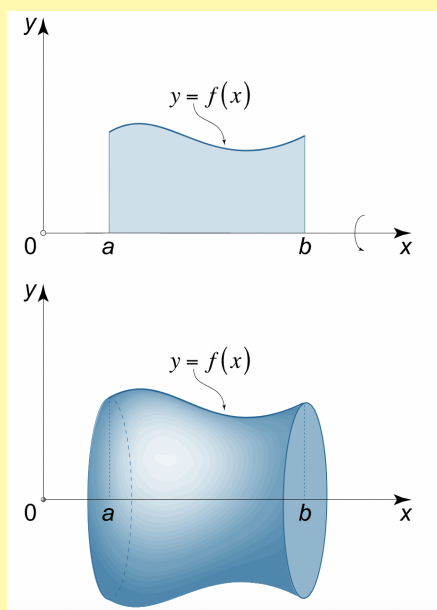


FIGURA 12. Sólido de revolução. Imagem retirada [deste site](#).

As aplicações 1 e 2 serão abordada nos exercícios. As seguintes não fazem parte do programa de Cálculo I, sendo dadas aqui como extra.

Aplicação 3: Comprimento de linhas

Se f é de classe C^1 , o comprimento do gráfico de f com $a \leq x \leq b$ é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(isto será abordado em Cálculo II)

Aplicação 4: Integrais impróprios

Quando a região de integração não é limitada, ainda podemos por vezes 'dar sentido' ao integral - em particular, uma região ilimitada pode ter área finita. Há 2 casos possíveis:

- (1) $a, b \in \mathbb{R}$ mas f não é limitada em $]a, b[$: por exemplo, se f tem assíntota vertical em $x = a$, definimos

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

- (2) $]a, b[$ não é limitado: por exemplo, em $]a, +\infty[$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

Exemplo 1.32: Integrais impróprios do tipo (1)

Considere-se a função $f(x) = 1/t^p$ no intervalo $]0, 1[$. Para $p > 0$, a função não é limitada neste intervalo. Para $p \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-p+1} (1 - x^{-p+1}) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{se } 0 < p < 1, \\ +\infty, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

(Para $p = 1$, as contas têm de ser feitas à parte já que $\int \frac{1}{t} dt = \ln t$. O resultado será também $+\infty$ e o integral é divergente.)

Exemplo 1.33: Integrais impróprios do tipo (2)

Para $p \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} (x^{-p+1} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ +\infty, & \text{se } 0 < p < 1. \end{cases}$$

(Para $p = 1$, será também $+\infty$ - o integral é divergente.)

Material extra: Funções elementares definidas por integrais.

Podemos usar integrais, mais precisamente integrais indefinidos, para introduzir de outra forma algumas funções elementares. Vamos fazê-lo com detalhe para a exponencial e o logaritmo. Recorde-se que começámos por definir no início destas notas a função exponencial (cf. Exemplo ??) ao introduzir o número e como o limite de uma sucessão, e ao dar sentido a e^x para todo o $x \in \mathbb{R}$. Após isso, o logaritmo foi definido como sendo a função inversa da exponencial.

Aqui, mostramos uma alternativa a esta construção usando integrais indefinidos: fazendo de conta que não conhecemos ainda estas funções, primeiro definimos a função logaritmo como sendo um integral indefinido da função $1/t$; com isso deduzimos todas as suas propriedades. No final, definimos exponencial como a inversa do logaritmo, e vemos como isso coincide com e^x .

A função logaritmo.

Defina-se a função $L : \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Para cada $x > 1$, $L(x)$ representa a área abaixo do gráfico de $1/t$ em $[1, x]$ se $x > 1$, e o simétrico da área do gráfico em $[x, 1]$ se $0 < x < 1$. Temos, apenas usando as propriedades já estudadas do integral:

- $L(1) = \int_1^1 1/t dt = 0$;
- É uma função infinitamente diferenciável, pois, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $L'(x) = \frac{1}{x}$;
- É uma função estritamente crescente pois a sua derivada é sempre positiva em \mathbb{R}^+ ;
- Uma vez que $L(1) = 0$ e que L é estritamente crescente, então

$$L(x) > 0 \text{ para } x > 1, \text{ e } L(x) < 0 \text{ para } 0 < x < 1;$$

- É uma função côncava, pois $L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ em \mathbb{R}^+ .
- Se $x, y > 0$, temos que:

$$L(xy) = L(x) + L(y) \quad \text{e} \quad L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

Para a primeira identidade, fixado y , $\frac{d}{dx}(L(xy)) = L'(xy)y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x} = L'(x)$, logo $L(xy) = L(x) + k$; fazendo $x = 1$ sai $k = L(y)$.

Para mostrar a segunda identidade, observe-se que $L(x) = L(\frac{x}{y} \cdot y) = L(\frac{x}{y}) + L(y)$.

- Para todo o $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$,

$$L(x^y) = yL(x).$$

É simples mostrá-lo para $y \in \mathbb{Z}$: de facto, o resultado é claro se $y = 0$; pelo parágrafo anterior, o caso $y \in \mathbb{Z}^-$ segue do caso $y \in \mathbb{N}$; fica como exercício mostrar por indução que a relação é verdadeira para $y \in \mathbb{N}$.

- Como L é crescente, os limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x)$ existem em $\overline{\mathbb{R}}$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L(2^{-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -nL(2) = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} L(2^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} nL(2) = +\infty. \end{aligned}$$

Em particular, $L(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Pode definir-se o número e como $L^{-1}(1)$, ou seja, o único x tal que $L(x) = 1$.

Chamamos a L a função logaritmo de base e e escrevemos $L(x) = \ln x$.

Recorrendo a estas propriedades do logaritmo, podemos esboçar o seu gráfico:

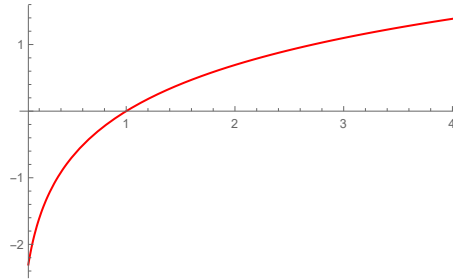


FIGURA 13. O gráfico da função $f(x) = \ln(x)$.

A função exponencial.

Tendo em conta que $L :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente com contradomínio \mathbb{R} , existe uma função inversa com domínio \mathbb{R} , contradomínio $]0, +\infty[$. Naturalmente, definimos a função exponencial como sendo

$$E(x) = L^{-1}(x), \quad E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

As propriedades da exponencial saem das do logaritmo:

- $E(x)$ é estritamente crescente e convexa, $E(0) = 1$, $E(1) = e$.
- Do Teorema da Derivada da Função Inversa (Teorema ??),

$$E'(x) = \frac{1}{L'(E(x))} = \frac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x),$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = 0$,
- $E(x + y) = E(x)E(y)$, e $E(xy) = E(y)^x$ para $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = 1$, vem

$$E(x) = E(1)^x = e^x.$$

Nota 1.10. O procedimento que foi usado para definir logaritmo e exponencial pode também ser aplicado para definir outras funções elementares, como as funções trigonométricas e trigonométricas inversas.