CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-T, LERC, LEGI E LEE. 1^{o} SEMESTRE 2022/23

Informações Gerais

Docente Responsável António Bravo <antonio.j.v.bravo@tecnico.ulisboa.pt>

Programa.

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raíz de índice n, funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo).Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas) Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$.** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em $\mathbb{R}$.** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

1. Primitivação

Conteúdo

I. Definição de primitiva. Aplicações.

Primitivação é a operação "inversa" da derivação. Mais precisamente:

Uma **primitiva** de uma função f é uma função F com derivada $F' = f$, i.e., tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)\,.$$

Escreveremos então que

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

o que significa precisamente " F é uma função com derivada $F' = f$ ".

Também se pode escrever $F(x) = P(f)(x)$, com o mesmo significado. Notem que

$$F' = f \implies (F+c)' = f \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

pelo que, se F é uma primitiva de f, então $F + c$ também é uma primitiva de f. Vejamos agora que, para funções definidas em intervalos, a família de todas as primitivas é necessariamente desta forma:

Proposição 1.1

Se $F, G :]a,b[\to \mathbb{R}$ são duas primitivas de uma dada função $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, então $F - G$ é constante.

Demonstração. Pela definição de primitiva,

$$(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in]a,b[.$$

Pelo Corolário **??**-(i), concluímos que $F - G$ é constante. □

A $F(x) = \int f(x)dx + c$ chamamos a *forma geral das primitivas* de f no intervalo I, ou seja, a família de todas as primitivas de f em I.

Poderá ser dada uma condição adicional que determine a constante c, por exemplo da forma $F(x_0) = a$. Se uma função estiver definida numa união de intervalos abertos disjuntos, a proposição anterior permite concluir que todas as primitivas diferem por uma constante em cada um dos intervalos, podendo essa constante mudar de intervalo para intervalo.

Exemplo 1.2:

(1) $\int 1dx = P(1) = x$. A forma geral das primitivas (em $\mathbb{R}$) é $F(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$ constante. Se quisermos a (única) primitiva F tal que $F(2) = 3$, então

$$F(2) = 2 + c = 3 \implies c = 1,$$

logo $F(x) = x + 1$.

(2) Determinar F tal que $F'(x) = 2x$ e $F(0) = 3$: $\int(2x)dx = x^2$, logo $F(x) = x^2 + 3$.

(3) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x^2$. A família de todas as primitivas de f é dada por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x < 0 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.3

Nem todas as funções são primitiváveis. Recorde-se a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se H fosse primitivável, i.e., se existisse F diferenciável tal que $F'(x) = H(x)$, então

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1, & x > 0 \\ c_2, & x < 0. \end{cases}$$

No entanto, desta expressão concluiríamos que F não seria diferenciável em 0 (neste caso, $F'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$ e $F'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$). **Veremos mais à frente que todas as funções *contínuas* são primitiváveis.**

Em geral, a menos que seja pedido explicitamente, vamos determinar uma primitiva qualquer. O objectivo desta secção é aprender a encontrar primitivas de algumas funções elementares, quando essas primitivas podem também ser expressas como funções elementares. Aqui, o termo **função elementar** significa uma função que pode ser expressa por adição, multiplicação, divisão e composição de funções polinomiais, potências, funções trigonométricas, hiperbólicas e respectivas inversas, e funções exponencial e logaritmo.

No próximo capítulo (integração), veremos que o cálculo de primitivas tem aplicações ao cálculo de áreas de figuras planas. Para já, damos 3 aplicações mais imediatas.

Aplicação 1. Seja $x(t)$ uma função que representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo t ao longo de uma reta (pensem por exemplo num automóvel ao longo de uma longa reta na autoestrada) e suponhamos conhecer a expressão da velocidade através de uma função $f(t)$ (ou seja, conseguimos obter a informação do velocímetro do automóvel). Será que conseguimos reconstruir o movimento do objeto? A função posição irá satisfazer a relação:

$$x'(t) = f(t),$$

ou seja, a função posição é uma primitiva da função velocidade. Obviamente que conhecer a velocidade do objeto **não determina de forma única** a sua posição: é necessário saber onde o objeto estava num dado instante (ou seja, dar uma condição do tipo $x(t_0) = x_0$)! Este é, por outras palavras, o conteúdo do que acabámos de estudar: as primitivas em intervalos são únicas a menos de uma constante aditiva.

Aplicação 2. Seja $x(t)$, de novo, uma função que representa a posição de um objecto em movimento retilíneo no instante de tempo t e recordemos a segunda lei de Newton: massa vezes aceleração é igual a força. Se tivermos uma força $f(t)$ que apenas depende do tempo, nesse caso a relação é:

$$mx''(t) = f(t).$$

Assim, dada uma força f específica, para determinarmos o movimento deveremos primitivar duas vezes. No caso concreto de um objeto atirado verticalmente e não contando com a resistência do ar, temos $f(t) = -mg$, onde g é a aceleração da gravidade, ou seja, uma constante. Então

$$x''(t) = -g \implies x'(t) = -gt + b \implies x(t) = -gt^2/2 + bt + c,$$

para certas constantes b, c. Observe-se que estas constantes determinam-se através da posição e velocidades iniciais, ou seja, prescrevendo $x(0)$ e $x'(0)$. Vimos assim, noutro contexto, uma aplicação da operação de primitivação: dada uma força $f(t)$, para determinar a posição $x(t)$ terei de primitivar duas vezes a função f.

Aplicação 3 (que irão encontrar na cadeira de Mecânica) Consideremos uma viga de betão de comprimento L, que identificaremos com o intervalo $[0, L]$. Supomos que a viga está em equilíbrio, assente nas extremidades e que está sujeita a uma distribuição de cargas $p(x)$ (ou seja, em cada ponto x da viga temos uma carga $p(x)$).

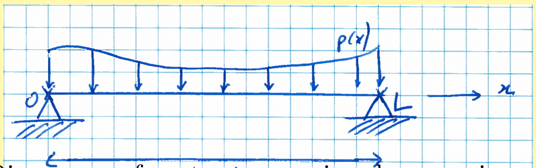

FIGURA 1. Diagrama referente a uma viga de comprimento L sujeita a uma distribuição de cargas $p(x)$.

Para saber como e onde reforçar o betão (i.e. "armar o betão", ficando com betão armado), deveremos calcular o esforço transverso $V(x)$ (a carga provoca uma distorção vertical na peça linear) e o momento flector $M(x)$ (que tem a ver com a flexão, a rotação que a viga, ao estar assente nos extremos, terá). Enquanto futuros engenheiros quererão reforçar a viga de modo a reduzir ao máximo estes dois parâmetros (o valor de quanto deverão reduzir está tabelado!). Em geral há também um esforço normal (responsável por alongar/encurtar a peça) mas na situação apresentada este é inexistente. Os mais interessados podem por exemplo consultar o Capítulo 4 deste ficheiro (apontamentos de Mecânica I).
Para determinarmos o esforço transverso e o momento flector, precisamos de calcular:

$$\frac{dV}{dx} = -p(x), \quad \frac{dM}{dx} = V(x).$$

Assim, dada uma carga $p(x)$, o esforço transverso V será uma primitiva de p, e o momento fletor será por sua vez uma primitiva de V.
Para um exemplo em que a carga é constante, $p(x) = p$, toma-se (por motivos que estudarão em mecânica) $p(0) = pL/2$. Queremos resolver

$$\frac{dV}{dx} = -p \text{ com } V(0) = \frac{pL}{2},$$

donde vem que

$$V(x) = \frac{pL}{2} - px$$

(todas as primitivas são da forma $-px+c$, e a constante c é determinada a partir da equação $-p \times 0 + c = pL/2$). Conclusão: para diminuir este tipo de esforço, deveremos reforçar mais a estrutura nas extremidades (veja-se o gráfico em baixo). Quanto ao momento fletor, queremos agora resolver:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{pL}{2} - px, \text{ com } M(0) = 0$$

(não há flexão nas extremidades). Ou seja, pretendemos determinar a única primitiva de $pL/2 - px$ que, para $x = 0$, vale 0. A forma geral das primitivas é: $pLx/2 - px^2/2 + c$ com $c \in \mathbb{R}$, e portanto tomamos $c = 0$ e vem:

$$M(x) = \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}.$$

Como é natural, para uma carga constante uniformemente distribuída, o momento fletor é máximo no centro.

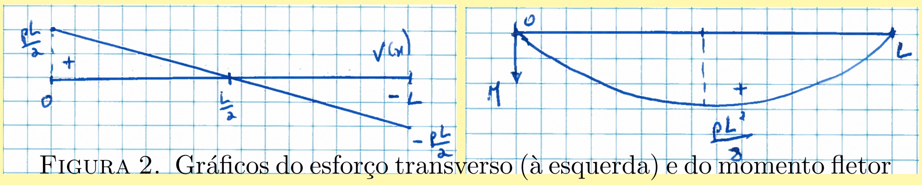

FIGURA 2. Gráficos do esforço transverso (à esquerda) e do momento fletor (à direita) para uma carga constante p uniformemente distribuída.

II. Primitivas Imediatas. As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} &\implies \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1\\
\frac{d}{dx}(e^x) = e^x &\implies \int e^x\,dx = e^x\\
\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x &\implies \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\\
\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} &\implies \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\,,\ \forall x \neq 0\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x &\implies \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x\\
\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x &\implies \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x &\implies \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\\
\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x &\implies \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\\
\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} &\implies \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x\\
\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} &\implies \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\implies \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x\\
\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} &\implies \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x
\end{aligned}$$

Além disso, das regras de derivação

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

vem que

$$\int (f+g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx \quad \text{e} \quad \int cf\, dx = c\int f\, dx\,, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R}.$$

Nota 1.1. A última propriedade não é válida se c não for uma constante!

Exemplo 1.4

(1) $\int (\sqrt{x}+2)x\, dx = \int x^{3/2} dx + \int 2x\, dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + x^2.$

(2) $\int \frac{1}{x-2}\, dx = \ln|x-2|.$

(3) $\int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx = -\frac{1}{x-2}.$

(4) $\int (x+1)^3\, dx = \frac{1}{4}(x+1)^4.$

(5) $\int (1-x)^3\, dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4.$

(6) $\int (2e^x - \operatorname{sen} x)\, dx = 2e^x + \cos x.$

(7) $\int \frac{2}{1+x^2}\, dx = 2\arctan x.$

III. Primitivas Quase-Imediatas. A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) \text{ diz-nos que } \int F'(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F(u(x)).$$

Assim, se F for a primitiva de uma função f, ou seja, se $F(x) = \int f(x)\, dx$, então ficamos com a fórmula:

(1)
$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F(u(x)).$$

Esta fórmula, combinada com o que foi visto anteriormente para primitivas imediatas, conduz por fim à seguinte tabela de primitivas.

Tabela de primitivas imediatas e quase-imediatas

$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$	$\int u(x)^\alpha u'(x)\, dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$
$\int e^x\, dx = e^x$	$\int e^{u(x)} u'(x)\, dx = e^{u(x)}$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\int a^{u(x)} u'(x)\, dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert\,,\ \forall x \neq 0$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln\lvert u(x)\rvert$

$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh}(u(x))u'(x)\, dx = \cosh(u(x))$
$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x$	$\int \cosh(u(x))u'(x)\, dx = \operatorname{senh}(u(x))$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$	$\int \cos(u(x))u'(x)\, dx = \operatorname{sen}(u(x))$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$	$\int \operatorname{sen}(u(x))u'(x)\, dx = -\cos(u(x))$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan x$	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\, dx = \tan(u(x))$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\, dx = -\cot x$	$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}\, dx = -\cot(u(x))$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\, dx = \operatorname{arcsen}(u(x))$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$	$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\, dx = \arctan(u(x))$

Temos assim por exemplo que

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\ln|\cos x|$$

e

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \ln|\operatorname{sen} x|$$

Exemplo 1.5

Calculemos uma primitiva de $f = 2xe^{x^2}$: como

$$\int 2xe^{x^2}\, dx = \int (x^2)' e^{x^2}\, dx,$$

podemos aplicar a regra de primitivação da exponencial com $u = x^2$:

$$\int 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2}.$$

Exemplo 1.6

Calculemos uma primitiva de $f = \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))$: como

$$\cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))' \cos(\operatorname{sen}(x)) = u' \cos u, \text{ com } u = \operatorname{sen}(x),$$

podemos aplicar a regra de primitivação do cosseno:

$$\int \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))dx = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)).$$

Por vezes, é preciso ajustar uma constante a multiplicar para podermos aplicar as regras de primitivação.

Exemplo 1.7

Calculemos uma primitiva de $f = e^{2x}$: como a derivada do expoente é 2, precisamos de acertar as constantes, introduzindo "à mão" o factor 2:

$$\int e^{2x}dx = \int \frac{1}{2} \times 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Exemplo 1.8

Calculemos uma primitiva de $f = x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. A derivada do argumento do seno é $3x^2$, que é *quase* o que está a multiplicar do lado de fora. Precisamos só de acertar as constantes, introduzindo "à mão" o factor 3:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \int \frac{1}{3} \times 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \frac{1}{3}\cos(x^3).$$

Exemplo 1.9

Calculemos uma primitiva de $f = 1/(4 + x^2)$. A expressão é semelhante à da fórmula da primitivação do arco-tangente: em vez de 4, deveria estar 1. Vamos então colocar o 4 em evidência:

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^2/4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx.$$

A derivada do que está dentro do quadrado é $1/2$, pelo que precisamos de acertar constantes:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{4}\int 2\frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x/2)'}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan(x/2).$$

Nota 1.2. Para o cálculo de primitivas, é importante relembrar algumas identidades de trigonometria:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, &\qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \\ \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x, &\qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x. \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) &\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \end{aligned}$$

IV. Primitivação por Partes. A fórmula para a derivada do produto de duas funções u e v,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \iff u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v\,,$$

dá origem à:

Fórmula de primitivação por partes:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função u, cuja derivada é mais simples do que u, com uma função v' com primitiva imediata ou quase-imediata v.

Exemplo 1.10:

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$, fazendo $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x$.

(2) Para calcular $\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\, dx$, escolhemos $u(x) = x^2$ e $v'(x) = \operatorname{sen}(2x)$, e depois fazemos outra primitivação por partes (exercício).

(3) $\int x^2 \ln(x)\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$, fazendo $u(x) = \ln x$ e $v'(x) = x^2$.

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x)\, dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$

Quando $\ln x$ ou $\arctan x$ figuram num produto, é frequentemente útil escolhê-los como $u(x)$, isto é, como termos a derivar (mas isto não é uma regra para aplicar às cegas, atenção!).

Há dois truques que são usados de forma frequente na primitivação por partes. O primeiro é escrever $\int f(x)\, dx = \int 1 \cdot f(x)\, dx$ e considerar $u = f$ e $v' = 1$. Obtém-se então que

$$\int f(x)\, dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\, dx\,.$$

Por exemplo,

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x\,.$$

O segundo truque é usar primitivação por partes para encontrar $\int f$ e reencontrar de novo $\int f$ com outros coeficientes, resolvendo-se depois a equação obtida em ordem à incógnita $\int f$. Por exemplo, para $x > 0$,

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Note-se que reencontrámos do lado direito a nossa incógnita $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ com coeficiente -1, pelo que

$$2\int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\,.$$

Exemplo 1.11:

(1) $\int e^t \operatorname{sen} t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \left(e^t \cos t + \int e^t \operatorname{sen} t\, dt\right)$, e portanto

$$\int e^t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{1}{2}e^t(\operatorname{sen} t - \cos t). \qquad (2)$$

(2) $\int \arctan(x)\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$. [Exercício, por partes]

(3) $\int \operatorname{arcsen}(x)\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$. [Exercício, por partes]

V. Primitivas de Funções Racionais.

É possivel primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função $f = p/q$ com p e q polinómios, em termos de funções elementares (cf. livro de Spivak, que consta na bibliografia da cadeira). Aqui mostramos como proceder num caso particular, o que nos guiará para perceber o que acontece no caso geral.

Caso particular. Primitiva de
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$
quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio de grau 3 da forma $q(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. **Note-se que o grau do denominador é maior que o do numerador.**

A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza do polinómio em denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raízes reais distintas, i.e.
$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$
Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma
$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$
pelo que
$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C\ln|x-\gamma|\,.$$

Exemplo 1.12

Decompondo em fracções simples,
$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\\ &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$
Logo,
$$x + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2),\ \forall x$$
Para determinar A,B e C, temos essencialmente duas técnicas: *comparar coeficientes* (note-se que temos uma igualdade entre dois polinómios) ou *dar valores a x*. Usemos a segunda técnica: fazendo $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ temos $A = 1, B = -3$, $C = 2$. Assim,
$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}\right) dx\\ &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-3}\,dx\\ &= \ln|x-1| - 3\ln|x-2| + 2\ln|x-3|.\end{aligned}$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.
$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$
Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma
$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$
pelo que
$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Exemplo 1.13

Decompondo,

$$\begin{aligned}\frac{3}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \\ &= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}\end{aligned}$$

Logo,

$$3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1),\ \forall x,$$

e fazendo, por exemplo, $x = -1 \Rightarrow A = 1/3$, $x = 2 \Rightarrow C = 1$ e vendo o coeficiente de x^2 temos $0 = A + B \Rightarrow B = -1/3$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(x+1)(x-2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1/3}{x+1} - \frac{1/3}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2}.\end{aligned}$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,,\ \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,,\ \text{com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2 + b^2)\,,\ \text{com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,,\ \text{com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente.

Exemplo 1.14

Mostremos que $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan(x/2)$

Decomposição:

$$\frac{x+2}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)}$$

Logo,

$$x + 2 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

e, comparando coeficientes, vem $A = 1/2, C = 1$ e $A + B = 0 \Rightarrow B = -1/2$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x(x^2+4)} &= \int \frac{1/2}{x}\,dx + \int \frac{-x/2+1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{4+x^2}\,dx,\end{aligned}$$

donde o resultado segue.

Caso Geral. O que acabamos de ver é um exemplo particular do seguinte resultado geral:

Teorema 1.15: Decomposição em Fracções Parciais

Seja $n < m$, e considere-se a função racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}.$$

Então o denominador pode ser factorizado na forma:

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}([x-a_1]^2+b_1^2)^{s_1}\cdots([x-a_l]^2+b_l^2)^{s_l},$$

e a função racional pode ser decomposta na forma:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = &\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] + \\ &+ \left[\frac{A_{1,1}+B_{1,1}x}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}+B_{1,s_1}x}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{s_1}}\right] + \cdots + \\ &+ \left[\frac{A_{l,1}+B_{l,1}x}{(x-a_l)^2+b_l^2} + \cdots + \frac{A_{l,s_l}+B_{l,s_l}x}{((x-a_l)^2+b_l^2)^{s_l}}\right].\end{aligned}$$

Notem que a factorização de $q(x)$ dada pelo teorema tem o seguinte significado:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes reais de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $r_1, \ldots, r_k$;
- $a_1 \pm i\,b_1, \ldots, a_l \pm i\,b_l$ são as raízes complexas de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $s_1, \ldots, s_l$;

Não demonstraremos este teorema, mas sublinhamos o facto de ser importante o grau do polinómio em denominador ser estritamente maior que o grau do numerador (veja-se mais à frente o que fazer se isto não acontecer). **Este resultado reduz o cálculo da primitiva de uma função racional a primitivas que já conhecemos**, pois temos

(a) Para as raízes reais:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^r}\,dx = \begin{cases} a\ln(x-\alpha)\,, & \text{se } r = 1, \\ \frac{a}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}\,, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

(b) Para as raízes complexas:

$$\int \frac{A+Bx}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx + (A+aB)\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^s}\,dx.$$

A primeira primitiva pode ser calculada recorrendo à substituição $t = (x-a)^2 + b^2$ (ver a secção VI à frente). A segunda primitiva pode ser calculada por aplicação sucessiva de primitivação por partes, como no exercício seguinte:

Exercício 1.3. Usando primitivação por partes, mostre que, para $s > 1$,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^s}\,dx = \frac{1}{2s-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{s-1}}\,dx.$$

Exemplo 1.16

Calculemos uma primitiva de $\int \frac{4}{x^2-1}\,dx = \int \frac{4}{(x-1)(x+1)}\,dx$.
Escrevemos
$$\frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
logo $4 = A(x+1)+B(x-1)$. Fazendo $x=1$ temos $4 = 2A \Rightarrow A = 2$ e fazendo $x=-1$, temos $4 = -2B$, logo $B = -2$. Temos assim
$$\int \frac{4}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Exemplo 1.17

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x-2+2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$$

Exemplo 1.18

Calculemos a primitiva de
$$\frac{4x}{x^4-1}.$$
Em primeiro lugar, devemos factorizar o denominador:
$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
Decompondo em fracções simples,
$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$
Logo,
$$4x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$
e, fazendo $x = 1 \Rightarrow A = 1$, $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $x = 0 \Rightarrow 0 = A - B - D \Rightarrow D = 0$, vendo o coeficiente de x^3, $0 = A + B + C \Rightarrow C = -2$. Assim sendo,
$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x^2+1|.\end{aligned}$$

E se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador? Ao primitivar uma função racional $p(x)/q(x)$ **no caso de o grau de p ser maior ou igual ao de q**, é possível reduzir aos casos anteriores através de manipulações algébricas, como a **divisão de polinómios.** Veja-se desde já um exemplo simples:

Exemplo 1.19

Considere-se o cálculo de $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. Como o grau dos polinómios em numerador e denominador são iguais, deveremos primeiramente manipular a fração:
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \arctan x.$$

Para ver o caso geral, comecemos por recordar que, dados dois números naturais D (o dividendo) e d (o divisor), podemos escrever

$$D = dQ + R, \quad Q, R \in \mathbb{N},\ R < d, \quad Q \text{ quociente},\ R \text{ resto}.$$

Esta decomposição implica

$$\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}, \quad R < d.$$

Para obtermos Q e R, aplicamos o algoritmo clássico de divisão. **O mesmo pode ser feito para polinómios**:

Dados dois polinómios $p(x)$ e $q(x)$, se p tiver grau igual ou superior a q, podemos escrever

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}, \quad \text{com grau de } R(x) < \text{grau de } q(x).$$

Assim, teremos

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\, dx.$$

A primitiva $\int Q(x)\, dx$ é simples de calcular (Q é um polinómio) e para calcular $\int \frac{R(x)}{q(x)}\, dx$, como o grau de q já é maior que o de R, podemos aplicar a decomposição vista anteriormente.

Exemplo 1.20

Pretendemos calcular $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1}\, dx$. Queremos para isso dividir $x^3 - 3x + 1$ por $x^2 - 1$. Escrevemos então

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & x^2 - 1 \\ \hline \end{array}$$

Em x^3, quantas vezes cabe x^2? Cabe x vezes, pelo que escrevo

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & x^2 - 1 \\ \cline{8-8} -x^2 \times x & + & 0 & + & 1 \times x & & & x \end{array}$$

Agora faço a doma no lado esquerdo:

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & x^2 - 1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & 0 & + & x & & & x \\ \cline{1-7} 0 & + & 0 & - & 2x & + & 1 & \end{array}$$

Como o resto tem grau menor que o divisor, o algoritmo pára e obtemos

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{-2x + 1}{x^2 - 1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{-2x + 1}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x + 1}{(x - 1)(x + 1)}\, dx = (\ldots)$$

(termine agora as contas e determine a primitiva).

Exemplo 1.21

Pretendemos calcular $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x - 1}\, dx$. Queremos dividir $x^3 + 2x^2 - 4$ por $x - 1$. Escrevemos então

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x - 1 \\ \hline \end{array}$$

Em x^3, quantas vezes cabe x? Cabe x^2 vezes, pelo que escrevo

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x & & & & & x^2 \end{array}$$

Agora faço a soma no lado esquerdo:

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x^2 & & & & & x^2 \\ \cline{1-7} 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \end{array}$$

Como o resto tem grau maior que o divisor, o algoritmo continua. Em $3x^2$, quantas vezes cabe x? Cabe $3x$ vezes:

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+3x \\ \cline{1-7} 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \\ & & -3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{1-7} & & 0 & + & 3x & - & 4 & \end{array}$$

Como o resto tem grau igual ao do divisor, o algoritmo continua. Em $3x$, quantas vezes cabe x? Cabe 3 vezes:

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+3x+3 \\ \cline{1-7} 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \\ & & -3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{1-7} & & 0 & + & 3x & - & 4 & \\ & & & & -3x & + & 3 & \\ \cline{1-7} & & & & 0 & - & 1 & \end{array}$$

Como o resto tem grau menor que o divisor, o algoritmo pára e obtemos

$$\frac{x^3+2x^2-4}{x-1} = x^2+3x+3+\frac{-1}{x-1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3+2x^2-4}{x-1}\,dx = \int (x^2+3x+3)\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x-\ln|x-1|.$$

VI. Primitivação por Substituição.

A fórmula para a derivada da função composta, já referida nestes apontamentos em (1), dá origem à:

Fórmula de primitivação por substituição:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

O procedimento associado à utilização desta fórmula para determinar $\int f(x)\,dx$ pode ser resumido nos seguintes 3 passos:

(i) considerar a substituição $x = u(t)$ na função e multiplicar por $u'(t) = \frac{dx}{dt}$, ou seja 'substituir' $dx = u'(t)\,dt$ [1] em $\int f(x)\,dx$;

(ii) encontrar $\int f(u(t))u'(t)\,dt$ como função elementar da variável t;

(iii) fazer a substituição inversa $t = u^{-1}(x)$ na função elementar obtida em (ii).

Estamos obviamente a assumir que $u(t)$ admite inversa.

[1] Uma mnemónica para decorar isto é a seguinte: fazendo $x = u(t)$, vem $\frac{dx}{dt} = u'(t)$, donde (formalmente) $dx = u'(t)dt$.

Exemplo 1.22

Calculemos a primitiva de $x\sqrt[3]{x+2}$, fazendo $t=\sqrt[3]{x+2}$, ou seja, $x=t^3-2=u(t)$. Assim, $u'(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2$ e portanto (formalmente) $dx=3t^2dx$. Aplicando a regra de primitivação por substituição,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{x+2}dx &= \int u(t)\sqrt[3]{u(t)+2}\cdot u'(t)dt=\int (t^3-2)t\times 3t^2dt\\ &= \int 3t^6-6t^3dt=\frac{3}{7}t^7-\frac{6}{4}t^4.\end{aligned}$$

Agora temos de ter o cuidado de regressar à variável original x. Como $t=\sqrt[3]{x+2}$, obtemos então

$$\int x\sqrt[3]{x+2}dx=\int 3t^6-6t^3\,dt=\frac{3}{7}t^7-\frac{3}{2}t^4=\frac{3}{7}(\sqrt[3]{x+2})^7-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2})^3.$$

Exemplo 1.23

Calculemos a primitiva de $\operatorname{sen}\sqrt{x}$, através da substituição $x=u(t)=t^2$ $(t>0)$, assim $u'(t)=\frac{dx}{dt}=2t$, o que implica que $dx=2tdt$:

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx=\int \operatorname{sen}(\sqrt{u(t)})u'(t)dt=\int 2t\operatorname{sen}tdt.$$

Esta primitiva parece mais fácil do que a anterior, pelo que continuamos o cálculo. Esta nova primitiva não é imediata, mas facilmente se resolve com uma primitivação por partes:

$$\int 2t\operatorname{sen}tdt=-2t\cos t-\int -2\cos tdt=-2t\cos t+2\operatorname{sen}t.$$

Como $t=\sqrt{x}$, obtemos então

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx=-2t\cos t+2\operatorname{sen}t=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\operatorname{sen}\sqrt{x}.$$

Exemplo 1.24

Calculemos a primitiva de $e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}$. Vamos escrever $x=\operatorname{sen}t=u(t)$, para $t\in\,]-\pi/2,\pi/2[$ (porque $1-x^2=1-\operatorname{sen}^2t=\cos^2t$). Assim, $u'(t)=\cos t$ e $dx=\cos tdt$. Aplicando a regra de primitivação por substituição,

$$\int e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}dx=\int e^{\arccos(\sqrt{1-u^2(t)})}u'(t)\,dt=\int (e^t\cos t)\,dt.$$

Esta já foi calculada na secção anterior (cf. (2)):

$$\int e^t\cos tdt=\frac{e^t\cos t+e^t\operatorname{sen}t}{2}.$$

Regressando à variável original x, como $t=\operatorname{arcsen}x$, obtemos então

$$\begin{aligned}\int e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}dx &= \frac{e^t\cos t+e^t\operatorname{sen}t}{2}=\frac{e^{\operatorname{arcsen}x}\cos(\operatorname{arcsen}x)+e^{\operatorname{arcsen}x}\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}x)}{2}\\ &= \frac{e^{\operatorname{arcsen}x}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)}{2}.\end{aligned}$$

Mais exemplos de primitivação por substituição:

Exemplo 1.25

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\,dx$

Fazendo $y=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=y^2$, temos $\frac{dx}{dy}=2y$ $(dx=2ydy)$ e

$$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\,dx=\int \frac{y+3}{y+y^2}\,2y\,dy=2\int \frac{y+3}{1+y}\,dy=2y+4\ln|y+1|=2\sqrt{x}+4\ln|\sqrt{x}+1|$$

Em geral, para funções racionais de $\sqrt[p]{x}$, faz-se: $y=\sqrt[p]{x} \Leftrightarrow x=y^p$.

(2) $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

Fazendo $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$, temos $dx=\frac{1}{y}dy$ e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx=\int \frac{2y^2}{y^2+2y+2}\,\frac{1}{y}\,dy=\int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy$$

Notando que y^2+2y+2 não tem raizes, pode ser escrito como $(y+1)^2+1$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy&=\int \frac{2(y+1)}{(y+1)^2+1}\,dy-\int \frac{2}{(y+1)^2+1}\,dy\\&=\ln((y+1)^2+1)-2\arctan(y+1)\end{aligned}$$

e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx=\ln((e^x+1)^2+1)-2\arctan(e^x+1).$$

Em geral, para funções racionais de e^x, faz-se: $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$.

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx=\int \frac{1}{1-y^2}\,dy$, com $y=\ln x$. Como (ver exemplos de funções racionais)

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$$

temos

$$\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right|.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x(4+\ln^2 x)}\,dx=\int \frac{1}{y(4+y^2)}\,dy$, com $y=\ln x$.

(5) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx$

Fazendo $y=\tan x \Leftrightarrow x=\arctan y$ (assumindo $x\in]-\pi/2,\pi/2[$), temos $dx=\frac{1}{1+y^2}dy$ e

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx=\int \frac{y}{(y+1)(1+y^2)}\,dy$$

Primitivando a função racional obtida (Exercício!) temos

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx=-\frac{1}{2}\ln|\tan x+1|+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x).$$

VII. Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos.

Para calcular primitivas de funções polinomiais de senos e cossenos:

$$\int \operatorname{sen}^n x\cos^m x\;dx,$$

usaremos as fórmulas trigonométricas conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Há vários casos a considerar:

Caso 1. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx \text{ ou } \int \cos^n x \, dx,$$

onde $n = 2k$ é par. As fórmulas trigonométricas acima permitem obter, sucessivamente, uma expressão em potências mais baixas de seno ou cosseno, que eventualmente sabemos como primitivar.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \, dx \\
&= \int \frac{1}{4} \, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x) \, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x) \, dx \\
&= \int \frac{1}{4} \, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x) \, dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x)) \, dx
\end{aligned}$$

e nesta última expressão sabemos calcular todas as primitivas.

Caso 2. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx \text{ ou } \int \cos^n x \, dx,$$

onde $n = 2k+1$ é ímpar. Neste caso, utilizamos a fórmula trigonométrica fundamental seguida de uma substituição.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2k+1} x \, dx &= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx \\
&= \int (1-u^2)^k \, du \quad (u = \operatorname{sen} x).
\end{aligned}$$

Caso 3. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx,$$

onde n ou m são ímpares, são tratados de forma análoga ao anterior.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\
&= \int u^4 (1-u^2)^2 \, du \quad (u = \operatorname{sen} x).
\end{aligned}$$

Caso 4. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde n e m são ambos pares. Neste caso, utilizamos as fórmulas trigonométricas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, de forma análoga ao Caso 1.

Exemplo 1.26

(1) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)' \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x.$

Outra resolução:

$\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) \, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x).$

NOTA: reparem que $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$ e $-\frac{1}{4}\cos(2x)$ diferem de uma constante.

(2) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x.$

(OU por partes)

(4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.$

Usamos $\cos(2x) = \cos^2 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ou seja

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Nota 1.4. Estas técnicas também resultam para produtos de funções hiperbólicas, usando $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

VIII. Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos.

Suponhamos que queremos calcular uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; dx.$$

Existe uma substituição (talvez um pouco inesperada!) que permite reduzir esta primitiva a uma primitiva de uma função racional usual. Como já vimos, é possível primitivar qualquer função racional usual.

Consideremos então a substituição:

$$t = \tan(x/2) \iff x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Observamos que:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

e depois

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(x/2) \cos(x/2) = 2 \tan(x/2) \cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Em conclusão:

A substituição $x = 2\arctan t$ fornece:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Concluímos, tal como tínhamos afirmado, que esta substituição transforma uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos numa primitiva de uma função racional usual.

Exemplo 1.27

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3+5\,\mathrm{sen}\,x} &= \int \frac{1}{3+5\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (t=\tan\frac{x}{2})\\ &= \int \frac{1+t^2}{3t^2+10t+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+10t+3}\,dt.\end{aligned}$$

Há dois casos particulares de funções racionais de senos e cossenos em que uma substituição bastante mais simples as transforma também em funções racionais usuais:

Caso 1.

$$\int R(\mathrm{sen}\,x)\cdot\cos x\ dx = \int R(t)\,dt\,,\ \text{em que } t=\mathrm{sen}\,x \text{ e portanto } dt=\cos x\,dx.$$

Caso 2.

$$\int R(\cos x)\cdot\mathrm{sen}\,x\ dx = -\int R(t)\,dt\,,\ \text{em que } t=\cos x \text{ e portanto } dt=-\,\mathrm{sen}\,x\ dx.$$

Exemplo 1.28

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\mathrm{sen}^2\,x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\mathrm{sen}^2\,x}\,dx.$

Fazendo $t=\mathrm{sen}\,x \Leftrightarrow x=\mathrm{arcsen}\,t$ (assumindo $x\in]-\pi/2,\pi/2[$), temos

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+\mathrm{sen}\,x| + \frac{1}{2}\ln|1-\mathrm{sen}\,x|.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^2\,x+2\cos x-2}\,dx$: fazer $t=\cos x$ (Exercício.)

IX. Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis.

As técnicas de primitivação que vimos permitem-nos responder à seguinte questão: dada uma função $f(x)$, que funções $y: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com I intervalo, satisfazem

(3) $$y'(x)=f(x)?$$

Trabalhe-se um exemplo simples que já foi tratado no início deste capítulo, mas utilizando desta vez uma linguagem ligeiramente diferente. Procuremos responder à questão:

(4) "Quais são as funções $y(x)$ que verificam $y'(x)=1+x^2$?"

Vimos que

$$y(x)=\int 1+x^2dx+C = x+\frac{x^3}{3}+C, \quad C\in\mathbb{R}$$

(não nos podemos esquecer da constante de integração, já que queremos *todas* as funções que verificam (4)!). Se porventura conhecermos o valor de y num dado ponto, podemos determinar o valor de C. Assim, se, por exemplo, conhecermos o valor de y para $x=0$ e a questão colocada for

"Qual é a função $y(x)$ que verifica $y'(x)=1+x^2$ e $y(0)=3$?"

Então

$$3=y(0)=\left[x+\frac{x^3}{3}+C\right]_{x=0}=C$$

e a resposta à última pergunta é:

$$y(x) = x + \frac{x^3}{3} + 3. \tag{5}$$

Considera-se sempre como domínio da solução o chamado *intervalo maximal*, ou seja, o maior intervalo contendo $x = 0$ (o ponto onde é dada a condição) onde a expressão (5) esteja definida. Neste caso, portanto, o domínio da solução é $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.29

Determinemos a solução de $y'(x) = 1/x^2$ e $y(1) = 4$. Primitivando,

$$y(x) = \int y'(x)dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como $y(1) = 2$, temos $4 = -1 + C$ e portanto $C = 5$. Logo a expressão analítica de y é

$$y(x) = -\frac{1}{x} + 5.$$

Consideramos como domínio $]0, +\infty[$, uma vez que é o maior intervalo que contém $x = 1$ onde a solução está definida.

Em geral, podemos colocar a questão de determinar quais são *as funções cujas derivadas satisfazem uma determinada equação*. Ou seja, dada um identidade que envolva as derivadas de uma função real de variável real desconhecida, o que é que podemos saber sobre essa função? Estas equações chamam-se **equações diferenciais ordinárias**[2] (abreviadas para EDO). A informação extra $y(x_0) = y_0$, que nos permite determinar a constante de primitivação, é denominada condição inicial[3]. Ao problema completo "EDO + condição inicial" chama-se **problema de valores iniciais** (PVI).

São exemplos de EDO as relações

$$y'(x) = 3y^2(x)\operatorname{sen} x, \quad y'(x) = e^{-y(x)} + 1 + y(x) + x, \quad y'(x) + y(x) = \cos 2t, \quad xe^{y(x)} = 2y'(x)$$

que podem ser escritas abreviadamente na forma

$$y' = 3y^2 \operatorname{sen} x, \quad y' = e^{-y} + 1 + y + x, \quad y' + y = \cos 2x, \quad xe^y = 2y'. \tag{6}$$

São exemplos de PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = 3y^2(x)\operatorname{sen} x \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} + 1 + y(x) + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Nesta secção estudaremos uma família específica de equações diferenciais ordinárias, chamadas de

Equações com variáveis separáveis: Dadas duas funções contínuas f, g, pretende determinar-se as soluções $y = y(x)$ que satisfazem

$$g(y(x))y'(x) = f(x). \tag{7}$$

Usualmente a equação de cima escreve-se simplesmente

$$g(y)y' = f(x),$$

ficando implícito neste último formato o facto de se pretender uma solução que é função de x, isto é, que $y = y(x)$.

[2] Quando a função incógnita tem várias variáveis, podemos considerar equações envolvendo as derivadas nas várias variáveis, chamadas derivadas parciais (esperem por Cálculo II!). Nesse caso, o problema é o de resolver equações com derivadas parciais.

[3] Esta denominação é mais clara se imaginarmos que x é uma variável temporal e que $x_0 = 0$. A condição inicial diz-nos o valor da função no instante inicial e permite-nos determinar o valor da função em instantes futuros

Nota 1.5. Das equações apresentadas em (6), apenas a primeira e a última são de variáveis separáveis. De facto, são equivalentes, respetivamente, a

$$\frac{y'}{3y^2} = \operatorname{sen} x \text{ (se } y \neq 0\text{)}, \qquad \text{e} \qquad x = 2y'e^{-y}$$

Ambas são da forma $g(y)y' = f(x)$, no primeiro caso com $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(y) = 1/(3y^2)$, no segundo com $f(x) = x$, $g(y) = 2e^{-y}$.

Nota 1.6. Não devem ficar agarrados às variáveis x e y, já que as letras usadas dependem usualmente do contexto do problema (t é a variável usada quando se representa o tempo, x, y representam usualmente posição/deslocamento; outras letras usadas de forma comum para variável dependente são u, v ou f). Assim, para todos os efeitos, a equação $x = 2y'(x)e^{-y(x)}$ representa a mesma equação que $t = 2x'(t)e^{-x(t)}$ ou $t = 2u'(t)e^{-u(t)}$.

Reparem que, se em (7) tivermos a função $g(y) = 1$, obtemos o caso (3), que se reduz a determinar uma primitiva.

Para resolver o caso geral, se F e G forem primitivas de f e g, respectivamente, então

$$G(y(x)) = \int g(y(x))y'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

(se tiverem dúvidas, derivem cada termo e vejam que são iguais). Concluímos então que

$$G(y(x)) = F(x) + C.$$

Esta fórmula dá-nos as possíveis soluções de forma **implícita**. Em alguns casos, G é invertível e podemos determinar a expressão analítica de forma **explícita**:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C).$$

Uma mnemónica para este método é a seguinte manipulação (que não tem sentido rigoroso!):

$$g(y)y' = f(x) \iff g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \implies g(y)dy = f(x)dx.$$

Integrando ambos os membros, a solução (na forma implícita) é dada por:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Exemplo 1.30

Calculemos a solução do PVI $yy' = x$, $y(3) = -2$. Primitivando,

$$y\frac{dy}{dx} = x \implies ydy = xdx \implies \int ydy = \int xdx \implies \frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + C,$$

para uma certa constante C. De outra forma:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2C}, \text{ para uma certa constante } C.$$

Esta é a solução geral da equação $yy' = x$. Como $y(3) = -2$, concluímos que

$$y(x) = -\sqrt{x^2 - 5}$$

com domínio da solução (intervalo maximal) $]\sqrt{5}, +\infty[$. Na figura abaixo estão representadas as soluções para diferentes valores de C.

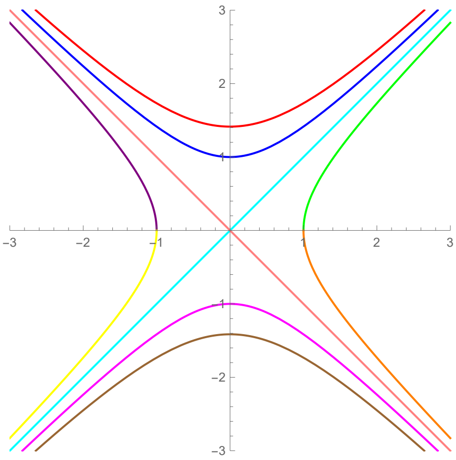

FIGURA 3. Os gráficos de várias soluções de $yy' = x$. As soluções com $C > 0$ não se anulam e têm domínio $\mathbb{R}$. Para $C < 0$, as soluções anulam-se uma vez e o domínio é uma semi-recta com extremo no zero da solução.

Exemplo 1.31

Para determinar a solução do PVI $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$, fazemos

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \implies \frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Assim, integrando:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1\ dx \Rightarrow \arctan(y(x)) = x + C.$$

Como $y(0) = 1$, vemos que $C = \pi/4$ e portanto

$$y(x) = \tan(x + \pi/4).$$

O domínio da solução (intervalo maximal) é

$$I = x \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Vamos agora tomar 3 exemplos concretos retirados (juntamente com as imagens utilizadas) do livro *Differential Equations for Engineers*, de Wei-Chau Xie (Cambridge University Press, 2010).

Exemplo aplicado 1 (Lei de Newton do Arrefecimento). Quando um objeto arrefece num meio onde a temperatura é constante, a **taxa de variação da temperatura** desse objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do meio envolvente e a temperatura do objeto. Assim, se T_a for a temperatura (constante) do meio e $T(t)$ representar a temperatura do objeto no instante t, esta lei afirma que existe uma constante $k > 0$ tal que

$$T'(t) = k(T_a - T(t)).$$

Se, por exemplo, $T_a = 20°C$ e $k = 2$, e o objeto está inicialmente a $T(0) = 10°C$, pretendemos revolver o PVI:

$$T' = 2(20 - T), \qquad \text{T(0)=10.}$$

Esta é uma equação com variáveis separáveis: assumindo que $T \neq 20$, vem

$$dT = 2(20-T)dt \iff \frac{1}{20-T}\,dT = 2dt \implies \int \frac{1}{20-T}\,dT = \int 2\,dt + C$$

$$\iff -\ln|20-T| = 2t + C \iff |20-T| = e^{-2t-C}$$
$$\iff 20 - T = \pm e^{-C}e^{-2t} \iff T = \pm e^{-C}e^{-2t} + 20.$$

Observe-se que, para $C \in \mathbb{R}$, e^{-C} pode assumir qualquer valor positivo, enquanto $-e^{-C}$ pode assumir qualquer valor negativo. Concluimos então que, para $T \neq 20$, a solução geral é da forma

$$T(t) = 20 + ke^{-2t} \tag{8}$$

para $k \neq 0$. Como por outro lado $T(t) = 20$ é solução do problema, que é da forma (8) com $k = 0$, deduzimos que a solução geral de $T' = 2(20 - T)$ é (8) com $k \in \mathbb{R}$.
Como $T(0) = 10$, então $20 + k = 10$, donde $k = -10$ e

$$T(t) = 20 - 10e^{-2t}$$

é a solução do nosso problema.

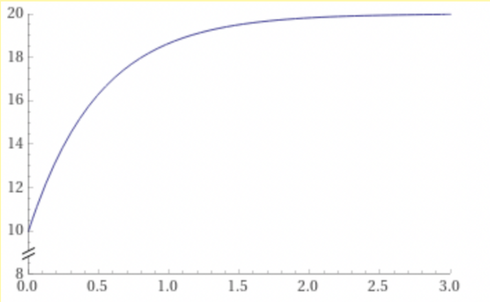

FIGURA 4. Gráfico da solução.

Observe-se que, como seria de esperar, a temperatura do objeto converge para a temperatura ambiente (pensem no que acontece à comida se a deixarmos no prato durante muito tempo).

Exemplo Aplicado 2 (Bala a atingir uma placa). Uma bala de massa m gramas atinge uma placa a uma velocidade de v_0 m/s. Sabe-se (experimentalmente) que a resistência de uma placa é proporcional ao quadrado da velocidade da bala. Pretendemos determinar a velocidade da bala dentro da placa ao longo do tempo. Se $x(t)$ denota a trajetória da bala e $v(t) = x'(t)$ a velocidade, sabemos que a resistência é da forma $R = \beta v^2(t)$ para uma certa constante de proporcionalidade $\beta > 0$ que depende do material da placa (tem unidades $grama/metros$).

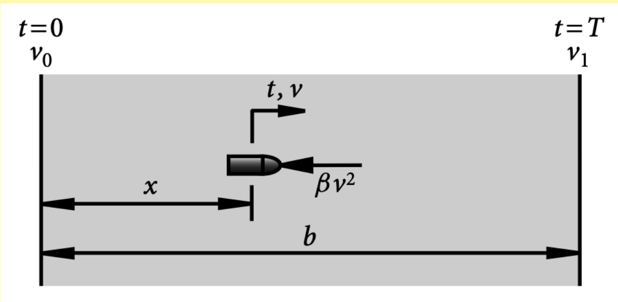

FIGURA 5. Diagrama do problema.

Assim, da segunda lei de Newton, concluímos que

$$mv'(t) = -\beta v^2(t),$$

que é uma equação com variáveis separadas. Assumindo que $v \neq 0$, temos

$$\frac{1}{v^2}dv = -\frac{\beta}{m}\,dt \implies \int \frac{1}{v^2}dv = \int -\frac{\beta}{m}\,dt + C \implies -\frac{1}{v} = -\frac{\beta}{m}t + C,$$

ou seja, a expressão geral para a velocidade da bala em função do tempo é:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{m}t - C}, \qquad \text{onde } C \text{ é uma constante arbitrária.}$$

Como $v(0) = v_0$, vem $C = -1/v_0$, e portanto a expressão final é:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{m}t + \frac{1}{v_0}}$$

(repare-se como, naturalmente, a velocidade da vala vai diminuindo ao longo do tempo).
Exercício: Dispomos de um material para o qual $k = 12$, e queremos construir uma placa de modo a que, se uma bala de 4 gramas a atingir de um lado a $340m/s$, saia do outro no pior dos casos a $10m/s$. Qual deverá ser a espessura mínima de uma placa com estas características?

Exemplo Aplicado 3 (Barco a atravessar um rio). Um barco está a atravessar um rio de largura a do ponto A ao ponto O como mostra a figura abaixo. Sabe-se que o barco está sempre a apontar na direção do ponto O. O rio corre de baixo para cima com uma velocidade constante v_R. Já o barco segue a velocidade constante v_B (mais precisamente, a velocidade aqui é um vetor que aponta sempre para O, sendo tangente à curva traçada pelo movimento, com comprimento v_B e componentes (v_x, v_y)). Pretende-se determinar a trajetória que o barco leva de A até O, que será dada por uma função $y(x)$.

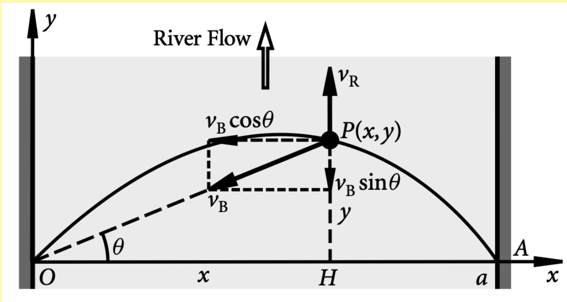

FIGURA 6. Esquema do problema.

Vamos deduzir a equação que traduz o movimento (como esta dedução é algo complicada e envolve conhecimentos um pouco mais avançados, numa primeira leitura podem saltar diretamente para a equação final (9) e entender a sua resolução). Suponhamos que, no instante t, o barco se encontre na posição (x, y). De acordo com a figura,

$$v_x = -v_B \cos\theta = -v_B \frac{OH}{OP} = -v_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$v_y = v_R - v_B \operatorname{sen}\theta = v_R - v_B \frac{PH}{OP} = v_R - v_B \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se descrevermos numa primeira fase o movimento $(x(t), y(t))$ em função do tempo, vem

$$\frac{dx}{dt}(t) = v_x = -v_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{dy}{dt}(t) = v_y = v_R - v_B \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Considerando agora y como função de x, pelo Teorema da Derivada da Função Composta vem que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_R - v_B\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-v_B\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = -\frac{k\sqrt{x^2+y^2}-y}{x} = -k\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

para $k = v_R/v_B$. Usando a substituição $u(x) = y(x)/x$, ou seja $y(x) = xu(x)$, vem

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \qquad \text{e portanto (usando a equação)} \qquad u + x\frac{du}{dx} = -k\sqrt{1+u^2} + u,$$

ou seja, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$x\frac{du}{dx} = -k\sqrt{1+u^2}. \tag{9}$$

A solução geral é dada por

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -k\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + D \Longrightarrow \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = -k\ln x + D$$

logo

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx^{-k}$$

(notem que $x > 0$). Recordando que $u = y/x$,

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx^{-k} \implies \sqrt{x^2+y^2} = Cx^{1-k} - y$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x^2 + y^2 = C^2x^{2(1-k)} - 2Cx^{1-k}y + y^2 \implies x^2 = C^2x^{2(1-k)} - 2Cx^{1-k}y$$

Para determinar a constante C (positiva), usamos a condição inicial $y(a) = 0$ e vem:

$$a^2 = C^2a^{2(1-k)} - 0 \iff C = a^k.$$

Em conclusão, o caminho seguido pelo barco é o gráfico da função:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(a^kx^{1-k} - a^{-k}x^{1+k}\right) = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v_R}{v_B}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v_R}{v_B}}\right], \quad x \in [0, a].$$