Probabilidades e Estatística

— TODOS OS CURSOS —

2^{o}semestre – 2019/2020
18/07/2020 – **09:00**

Duração: 60 minutos **1^{o}teste**

Pergunta 1

Num arranha-céus a% das portas de segurança funcionam por controlo remoto. Durante um processo de inspeção regular, verificou-se que a probabilidade de uma porta não abrir é igual a b se esta opera remotamente, e igual a c caso não opere remotamente.

Considere que uma das portas foi selecionada ao acaso para inspeção.

Qual é a probabilidade de a porta selecionada operar por controlo remoto, sabendo que ela abriu durante a inspeção?

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
R = porta opera por controlo remoto	$P(R) = a$
A = porta abrir	$P(A) = ?$
	$P(\bar{A} \mid R) = b$
	$P(\bar{A} \mid \bar{R}) = c$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(R \mid A) &\overset{teo.\ Bayes}{=} \frac{P(A \mid R) \times P(R)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A \mid R) \times P(R)}{P(A \mid R) \times P(R) + P(A \mid \bar{R}) \times P(\bar{R})} \\
&= \frac{(1-b) \times \frac{a}{100}}{(1-b) \times \frac{a}{100} + (1-c) \times (1 - \frac{a}{100})} \\
&= \frac{(1-b) \times a}{(1-b) \times a + (1-c) \times (100-a)}.
\end{aligned}
$$

Pergunta 2

Numa produção em série, o número total de peças fabricadas por hora segue uma distribuição de Poisson. A probabilidade de não ser fabricada qualquer peça numa hora é igual a a.

Qual é a probabilidade de serem fabricadas b peças numa hora, sabendo que foi fabricada pelo menos uma peça nesse período de tempo?

Indique o resultado com, pelo menos, quatro casas decimais.

- **V.a. de interesse**

  X = número total de peças fabricadas por hora

- **Distribuição e f.p. de X**

  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$,

  onde $a = P(X=0) = \exp(-\lambda) \Leftrightarrow \lambda = -\log a$.

  $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{a(-\log a)^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X = b \mid X > 0) &= \frac{P(X = b)}{1 - P(X = 0)} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{b}}{b!}}{1 - a} \\
&= \frac{a\,(-\log a)^{b}}{b!\,(1 - a)}
\end{aligned}
$$

Pergunta 3

Para um dado modelo de avião, o tempo de voo experimental (X) segue uma distribuição normal com desvio padrão igual a 1 hora. Sabe-se ainda que a% dos voos demoram no máximo c horas.

Qual é a probabilidade de o tempo médio de 100 destes voos experimentais ser superior a c horas? Assuma que estes tempos de voo são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X.

Indique o resultado com, pelo menos, quatro casas decimais.

- **V.a. auxiliares, distribuição**

$$
\begin{aligned}
X_i &= \text{tempo de voo experimental } i,\ i = 1, \ldots, 100 \\
X_i &\overset{i.i.d.}{\sim} X \\
X &\sim \text{normal}(\mu, 3^2) \\
\mu &: \quad P(X \le c) = \frac{a}{100} \\
& \qquad \mu = c - \Phi^{-1}\left(\frac{a}{100}\right)
\end{aligned}
$$

- **V.a. de interesse, distribuição exacta**

  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i =$ tempo médio de 100 voos experimentais

  $E(\bar{X}) = \cdots = \mu \qquad V(\bar{X}) = \cdots = \frac{1}{100} \qquad \bar{X} \sim \text{normal}(\mu, \frac{1}{100})$

- **Prob. pedida**

$$
P(\bar{X} > c) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{100}}} \le \frac{c - \mu}{\sqrt{\frac{1}{100}}}\right) = 1 - P\left(\frac{c - \left[c - \Phi^{-1}\left(\frac{a}{100}\right)\right]}{\sqrt{\frac{1}{100}}}\right) = 1 - \Phi\left[10 \times \Phi^{-1}\left(\frac{a}{100}\right)\right]
$$

Pergunta 4

Seja X (respetivamente, Y) a variável aleatória que descreve a pressão do pneu dianteiro (respetivamente, traseiro) de um motociclo, quando cheio. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta dada por

	Y		
X	10	12	14
13	a	b	a
14	a	a	b
15	b	a	a

Calcule o valor esperado de $X - Y$ condicional a $X = x$.

Indique o resultado com, pelo menos, quatro casas decimais.

- **Valor esperado de** $X - Y \mid X = x$

  Como $X \sim \text{uniforme}(\{13, 14, 15\})$ e $2a + b = 1/3$, temos

$$
\begin{aligned}
E(X-Y \mid X=x) &= E(X \mid X=x) - E(Y \mid X=x) = x - \sum_y y \times P(Y=y \mid X=x) = x - \sum_y y \times \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} \\
&= \begin{cases}
13 - \left(10 \times \frac{a}{2a+b} + 12 \times \frac{b}{2a+b} + 14 \times \frac{a}{2a+b}\right) = 13 - \frac{1}{2a+b}(10a + 12b + 14a) & \\
\quad = 13 - 3 \times (24a + 12b) = 13 - 36 \times (2a+b) & x = 13 \\
14 - \left(10 \times \frac{a}{2a+b} + 12 \times \frac{a}{2a+b} + 14 \times \frac{b}{2a+b}\right) = 14 - \frac{1}{2a+b}(10a + 12a + 14b) & \\
\quad = 12 - 3 \times [(28a + 14b) - 6a] = 14 - 42 \times (2a+b) + 18a, & x = 14 \\
15 - \left(10 \times \frac{b}{2a+b} + 12 \times \frac{a}{2a+b} + 14 \times \frac{a}{2a+b}\right) = 15 - \frac{1}{2a+b}(10b + 12a + 14a) & \\
\quad = 14 - 3 \times [(20a + 10b) + 6a] = 15 - 30 \times (2a+b) - 18a, & x = 15
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
1, & x = 13 \\
18a, & x = 14 \\
5 - 18a, & x = 15
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Pergunta 5

Considere que foram examinadas todas as componentes de três painéis, selecionados casualmente e com a, b e c componentes respetivamente. Admita que uma componente escolhida ao acaso é defeituosa com probabilidade p, independentemente das restantes componentes.

Qual é a probabilidade de serem detetadas no máximo uma componente defeituosa, ao serem examinadas todas as componentes destes três painéis?

Indique o resultado com, pelo menos, quatro casas decimais.

- **V.a. auxiliares**

  X_i = no. de componentes defeituosas entre as n_i componentes do painel i, $\quad i = 1, 2, 3$

  $X_i \sim_{indep} \text{binomial}(n_i, p), \quad i = 1, 2, 3$

  $n_1 = a, \quad n_2 = b, \quad n_3 = c$

- **V.a. de interesse, f.p.**

  $Y = \sum_{i=1}^3 X_i$ = no. total de componentes defeituosas nos 3 painéis

  $Y \sim \text{binomial}(n, p)$

  $n = \sum_{i=1}^3 n_i = a + b + c$

  $P(Y = y) = \binom{a+b+c}{y} p^y (1-p)^{a+b+c-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, a+b+c$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(Y \le 1) &= \sum_{y=0}^{1} P(Y = y) \\
&= (1-p)^{a+b+c} + (a+b+c)\, p\, (1-p)^{a+b+c-1}.
\end{aligned}
$$