3^{a} LISTA DE EXERCÍCIOS

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2^{o} semestre 2019/2020

Problema 1. (Versão aditiva das raízes de $x^{2^n}-1=0$ em $\mathbb{C}$.)
Para $n \geq 0$, considere os $\mathbb{Z}$-módulos

$$W_n = \{a/2^i,\ a \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i \leq n\} \quad \text{e} \quad M_n = W_n/W_0.$$

Mostre que $M = \bigcup_{n\geq 0} M_n$ é um $\mathbb{Z}$-módulo que não é Noetheriano, mas é um $\mathbb{Z}$-módulo Artiniano.

Problema 2. Encontre um exemplo de um anel não Noetheriano (e logo, não Artiniano), e de dimensão zero.

Assim, se R não for um anel Noetheriano, 2) $\Rightarrow$ 1) do último teorema do capítulo 2 não é necessariamente verdadeiro.

Problema 3.

i) Seja M um R-módulo Noetheriano e $f: M \longrightarrow M$ um homomorfismo de R-módulos. Mostre que se f é sobrejectivo, então f é um isomorfismo.

ii) Seja M um R-módulo Artiniano e $f: M \longrightarrow M$ um homomorfismo de R-módulos. Mostre que se f é injectivo, então f é um isomorfismo.

Problema 4. Seja (R, m) um anel local, tal que o seu ideal maximal m é um ideal principal, e

$$\bigcap_{n\geq 1} m^n = (0).$$

Mostre que R é um anel Noetheriano e que todo o ideal não nulo de R é uma potência de m.

Problema 5. Seja M um R-módulo. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

i) $M = \{0\}$.

ii) $M_P = \{0\}$, para todo o ideal primo P de R.

iii) $M_m = \{0\}$, para todo o ideal maximal m de R.

Problema 6. Seja R um anel tal que

i) R_m é um anel Noetheriano, para todo o ideal maximal m de R;

ii) se $x \in R$ e $x \neq 0$, então só há um número finito de ideais maximais de R que contêm x.

Mostre que R é um anel Noetheriano.

Sugestão: Seja $I \neq (0)$ um ideal de R. Queremos mostrar que I é finitamente gerado. Consideramos $x \neq 0$, $x \in I$, e $m_1, \ldots, m_{r+s}$ os ideais maximais de R que contêm x, dos quais $m_1, \ldots, m_r$ contêm I. Construimos um ideal de R finitamente gerado, J, tal que $J \subseteq I$ e $I_m = J_m$, para todo o ideal maximal m de R. Pelo Problema 5, $I = J$.