TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ÁLGEBRA LINEAR
EXAME/ TESTES DE RECUPERAÇÃO - 15/1/2020 - MEAER

(1) Usando o método de Gauss-Jordan, calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) Determine o conjunto das soluções $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ da equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^6$$

(3) Considere a base $B = ((1,0,1),(-1,2,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$
   (a) Determine as coordenadas do vetor $(1,3,1) \in \mathbb{R}^3$ com respeito à base B.
   (b) Sendo $B' = ((1,3,1),(0,1,1),(-1,2,0))$, determine a matriz de mudança de coordenadas $S_{B'\to B}$.

(4) Defina transformação linear.

(5) Determine a expressão geral da transformação linear $T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifica as seguintes condições:
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de T com valor próprio 2,
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de T com valor próprio -1,
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y+x & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset N(T)$.

(6) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$$

Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^3$ tais que a equação $T(T(x,y,z)) = b$ tem solução e, para cada um desses valores de b, determine o conjunto das soluções.

(7) Seja U o espaço vetorial dos polinómios reais de grau ≤ 3, V o espaço vetorial dos polinómios de grau ≤ 4 e $W = \{p(t) \in U : p(0) + p''(0) = 0\}$. Considere a transformação linear $T\colon W \to V$ definida por

$$(T(p))(t) = \int_0^t p(x)dx$$

(ou seja, $T(p)$ é o integral indefinido de p).
   (a) Mostre que W é um subespaço vetorial de U e determine uma base B_1 para W.
   (b) Calcule A_{T,B_1,B_2} onde $B_2 = (1, t, t^2, t^3, t^4)$ é a base canónica de V. *Se não resolveu a alínea anterior pode considerar* $B_1 = (1+t, t-t^2, t^3)$ *(que não é uma das respostas possíveis).*
   (c) Determine em função de $\alpha \in \mathbb{R}$ a dimensão do subespaço de V dado por

$$\mathrm{Im}(T) \cap L(\{1+\alpha t^4, \alpha t - t^2\})$$

(8) Sejam U, V espaços vetoriais de dimensão finita e $T, S\colon U \to V$ transformações lineares. Mostre que se $\dim N(T) = \dim N(S)$ então existem isomorfismos $\phi\colon U \to U$ e $\psi\colon V \to V$ tais que

$$S \circ \phi = \psi \circ T$$

Segunda parte (correspondente ao terceiro teste)

(9) Determine o volume do paralelipípedo em $\mathbb{R}^3$ que tem um vértice na origem e arestas $(1,0,-1)$, $(-1,2,-2)$ e $(0,1,-2)$.

(10) Determine o conjunto dos valores de x para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível.

(11) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine uma forma canónica de Jordan J para A, assim como uma matriz S tal que $A = SJS^{-1}$.

(12) Considere o subespaço

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x - y + w = 0\}$$

com (a restrição d)o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine uma base ortogonal para W.

(b) Calcule a distância em W entre $(1,1,2,0)$ e o plano

$$P = \{(x,y,z,w) \in W \colon x + y = 3\}.$$

(13) Considere o espaço $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \colon A = A^T\}$ das matrizes simétricas com o produto interno para o qual

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada. Determine o conjunto das matrizes que são perpendiculares a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e fazem um ângulo de 30 graus com $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(14) Determine todas as matrizes unitárias $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ que satisfazem $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -i \end{bmatrix}$.

(15) Considere a forma quadrática $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,u,v) = x^2 + y^2 - 4xy - 2u^2 + uv + 3v^2$$

(a) Classifique f.

(b) Existe algum subespaço $U \subset \mathbb{R}^4$ de dimensão 3 tal que a restrição de f a U seja definida positiva? Justifique.

(16) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz tal que $A^2 = 0$. Que valores pode tomar a característica de A? Justifique.