Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, LEIC-T, MA, MEMec

2º semestre – 2017/2018
05/05/2018 – **09:00**

Duração: 90 minutos **1º Teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Uma loja comercializa telemóveis das marcas A e B. De acordo com os registos desta loja: 40% e 60% dos telemóveis em *stock* são das marcas A e B (respetivamente); 5% e 1% dos telemóveis das marcas A e B (respetivamente) possuem defeitos. Admitindo que inspeciona um telemóvel escolhido ao acaso:

(a) Calcule a probabilidade de ele possuir defeitos. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$A = \{$telemóvel selecionado da marca $A\}$	$P(A) = 0.4$
$B = \{$telemóvel selecionado da marca $B\}$	$P(B) = 0.6$
$D = \{$telemóvel selecionado defeituoso$\}$	$P(D) = ?$
	$P(D \mid A) = 0.05$
	$P(D \mid B) = 0.01$

- **Probabilidade pedida**
  Tirando partido da lei da probabilidade total, segue-se

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) \\ &= 0.05 \times 0.4 + 0.01 \times 0.6 \\ &= 0.026. \end{aligned}$$

(b) Obtenha a probabilidade de ele ser da marca A sabendo que possui defeitos. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Ao invocar-se o teorema de Bayes, tem-se

$$\begin{aligned} P(A \mid D) &= \frac{P(D \mid A) \times P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.05 \times 0.4}{0.026} \\ &= \frac{0.02}{0.026} \\ &\simeq 0.769231. \end{aligned}$$

2. A localização de fraturas capilares nas bordas de vigas de aço segue um processo de Poisson com taxa de 4 fraturas por metro.

(a) Obtenha a probabilidade de a distância (em metro) entre duas fraturas capilares adjacentes exceder 30 cm. (3.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  $T =$ distância (em metro) entre duas fraturas capilares adjacentes
- **Distribuição de T**
  Uma vez que lidamos com um processo de Poisson com taxa de 4 fraturas capilares por metro, temos $T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, com $\lambda = 4$.

- **F.d.p. de T**
  $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4 \times e^{-4t}, & t \geq 0 \end{cases}$

- **Probabilidade pedida**
$$\begin{aligned} P(T > 0.3) &= \int_{0.3}^{+\infty} 4 \times e^{-4t} dt \\ &= -e^{-4t}\Big|_{0.3}^{+\infty} = e^{-1.2} \\ &\simeq 0.301194. \end{aligned}$$
  [Em alternativa, $P(T > 0.3) = P(X_{0.3} = 0) = \frac{e^{-4\times 0.3}(4\times 0.3)^0}{0!} \simeq 0.301194$ com $X_{0.3}$ = no. de fraturas num segmento de 0.3 m de uma viga e $X_{0.3} \sim \text{Poisson}(4 \times 0.3)$.]

(b) Qual é a probabilidade de um segmento de 25 cm de uma viga de aço possuir pelo menos duas fraturas capilares ? (2.0)

- **V.a. de interesse**
  X_t = número de fraturas num segmento de t metros de uma viga $\quad (t > 0)$

- **Distribuição de X_t**
  Uma vez que lidamos com um processo de Poisson com taxa igual a 4 fraturas por metro, temos $X_t \sim \text{Poisson}(4 \times t)$.

- **F.p. de $X_{0.25}$**
  $P(X_{0.25} = x) = \frac{e^{-4\times 0.25}(4\times 0.25)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Probabilidade pedida**
$$\begin{aligned} P(X_{0.25} \geq 2) &= 1 - P(X_{0.25} \leq 1) \\ &= 1 - F_{Poisson(1)}(1) \\ &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1 - 0.7358 \\ &\simeq 0.2642. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. O tempo (em hora) de reparação de peças mecânicas de um dado tipo é representado pela variável aleatória X com distribuição uniforme contínua no intervalo $]0, 2[$.

(a) Determine a probabilidade de o tempo de reparação de uma dessas peças mecânicas vir a exceder 90 minutos sabendo que a reparação de tal peça está em curso há 30 minutos. (1.5)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = tempo (em hora) de reparação da peça mecânica

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Uniforme}(0, 2)$

- **F.d.p. de X**
  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

- **Prob. pedida**
$$\begin{aligned} P(X > 1.5 \mid X > 0.5) &= \frac{P(X > 1.5, X > 0.5)}{P(X > 0.5)} \\ &= \frac{P(X > 1.5)}{P(X > 0.5)} \\ &= \frac{\int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\, dx}{\int_{0.5}^{2} \frac{1}{2}\, dx} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X > 1.5 \mid X > 0.5) &= \frac{\frac{x}{2}\Big|_{1.5}^{2}}{\frac{x}{2}\Big|_{0.5}^{2}} \\
&= \frac{1/4}{3/4} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

(b) Obtenha $E(40+30\sqrt{X})$, o custo esperado da reparação de uma dessas peças mecânicas. (1.5)

- **Valor esperado pedido**

$$
\begin{aligned}
E(40+30\sqrt{X}) &= 40+30\times E(\sqrt{X}) \\
&= 40+30\times \int_0^2 \sqrt{x}\times\frac{1}{2}\,dx \\
&= 40+30\times \left.\frac{x^{1.5}}{2\times 1.5}\right|_0^2 \\
&= 40+10\times 2^{1.5} \\
&= 40+20\times\sqrt{2} \\
&\simeq 68.284271.
\end{aligned}
$$

(c) Calcule um valor aproximado para a probabilidade de o tempo total de reparação de 100 dessas peças mecânicas não exceder 100 horas. Admita que os tempos de reparação das peças são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = tempo (em hora) de reparação da peça mecânica i, $\quad i=1,\ldots,n$
  $n = 100$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, \quad i=1,\ldots,n$
  $E(X_i)=E(X) \stackrel{form.}{=} \frac{0+2}{2} = 1, \quad i=1,\ldots,n$
  $V(X_i)=V(X) \stackrel{form.}{=} \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}, \quad i=1,\ldots,n$

- **V.a. de interesse**
  $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ = tempo total (em hora) de reparação de n peças mecânicas

- **Valor esperado e variância de S_n**
  $E(S_n)=E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{X_i\sim X}{=} n\,E(X) = 100\times 1 = 100$
  $V(S_n)=V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{X_i\,indep.}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{X_i\sim X}{=} n\,V(X) = 100\times\frac{1}{3}=\frac{100}{3}$

- **Distribuição aproximada de S_n**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se
  $$\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n-n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$
\begin{aligned}
P(S_n\le 100) &= P\left(\frac{S_n-n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}} \le \frac{100-n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}}\right) \\
&\stackrel{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{100-100}{\sqrt{\frac{100}{3}}}\right) \\
&= \Phi(0) \\
&= 0.5.
\end{aligned}
$$

2. Considere que seleciona casualmente e sem reposição 3 baterias de um lote constituído por 3 baterias de tipo A, 4 baterias de tipo B e 5 baterias de tipo C. Caso X (respetivamente Y) represente o número de baterias selecionadas de tipo A (respetivamente de tipo B), então as variáveis aleatórias X e Y possuem função de probabilidade conjunta dada pela tabela seguinte:

	Y			
X	0	1	2	3
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0

(a) Determine a mediana de $X \mid Y = 1$. (2.0)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = número de baterias selecionadas de tipo A
  Y = número de baterias selecionadas de tipo B

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X = x, Y = y)$, $P(X = x) = \sum_{y=0}^{3} P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_{x=0}^{3} P(X = x, Y = y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

	Y				
X	0	1	2	3	$P(X = x)$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
$P(Y = y)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

- **F.p. de** $X \mid Y = 1$

$$
\begin{aligned}
P(X = x \mid Y = 1) &= \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
&= \begin{cases} \frac{\frac{40}{220}}{\frac{112}{220}} = \frac{40}{112}, & x = 0 \\ \frac{\frac{60}{220}}{\frac{112}{220}} = \frac{60}{112}, & x = 1 \\ \frac{\frac{12}{220}}{\frac{112}{220}} = \frac{12}{112}, & x = 2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **F.d. de** $X \mid Y = 1$

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y=1}(x) &= P(X \leq x \mid Y = 1) \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{40}{112}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{100}{112}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Mediana de** $X \mid Y = 1$
  Representemos a mediana de $(X \mid Y = 1)$ por me. Então

$$
\begin{aligned}
me \quad : \quad & \frac{1}{2} \leq F_{X|Y=1}(me) \leq \frac{1}{2} + P(X = me \mid Y = 1) && (1) \\
& \frac{1}{2} \leq F_{X|Y=1}(me) \leq \frac{1}{2} + [F_{X|Y=1}(me) - F_{X|Y=1}(me^{-})] \\
& F_{X|Y=1}(me^{-}) \leq \frac{1}{2} \leq F_{X|Y=1}(me). && (2)
\end{aligned}
$$

Ora, tirando partido da definição de mediana em (1) e de

$$\frac{1}{2} \leq F_{X|Y=1}(1) = \frac{100}{112} \quad \leq \quad \frac{1}{2} + P(X=1 \mid Y=1) = \frac{56}{112} + \frac{60}{112} = \frac{116}{112},$$

concluímos que 1 é uma mediana de $X \mid Y = 1$[; a prova da sua unicidade é deixada como exercício].

[Alternativamente, notemos que

$$F_{X|Y=1}(1^-) = F_{X|Y=1}(0) = \frac{40}{112} \leq \frac{1}{2} \leq F_{X|Y=1}(1) = \frac{100}{112}.$$

Logo (2), permite-nos a concluir que 1 é uma mediana de $X \mid Y = 1$; a prova da sua unicidade é deixada como exercício.]

(b) Obtenha a covariância entre X e Y. Poderá concluir que as variáveis aleatórias X e Y são dependentes? (2.0)

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{3} x \times P(X=x) \\ &= 0 \times \frac{84}{220} + 1 \times \frac{108}{220} + 2 \times \frac{27}{220} + 3 \times \frac{1}{220} \\ &= \frac{165}{220} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de Y**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{3} y \times P(Y=y) \\ &= 0 \times \frac{56}{220} + 1 \times \frac{112}{220} + 2 \times \frac{48}{220} + 3 \times \frac{4}{220} \\ &= \frac{220}{220} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de XY**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} xy \times P(X=x, Y=y) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{60}{220} + 2 \times 1 \times \frac{12}{220} + 1 \times 2 \times \frac{18}{220} \\ &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$

- **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) \\ &= \frac{6}{11} - \frac{3}{4} \times 1 \\ &= -\frac{9}{44} \end{aligned}$$

- **Comentário**

  É sabido que caso X e Y sejam v.a. independentes então $cov(X,Y) = 0$.

  Ora, $cov(X,Y) = -\frac{9}{44} \neq 0$ donde se pode afirmar que X e Y são efectivamente v.a. DEPENDENTES.