

Fiabilidade e Controlo de Qualidade

Notas de apoio — Controlo de Qualidade, Caps. 8–11, 13

Manuel Cabral Morais

Secção de Estatística e Aplicações

Instituto Superior Técnico

Lisboa, Fevereiro–Junho de 2007 (Revisão: Dezembro de 2015)

Índice

Lista de tabelas	iv
8 Controlo estatístico de processos	1
8.1 O significado de qualidade	1
8.2 Os custos e os aspectos legais da qualidade	5
8.3 Um apanhado da história do controlo de qualidade	9
8.3.1 Um apanhado geral	9
8.3.2 As guildas da Europa medieval	11
8.3.3 A Revolução Industrial	12
8.3.4 O início do sec. XX	14
8.3.5 A II Guerra Mundial	15
8.3.6 A qualidade total	17
8.3.7 Para além da qualidade total	20
8.3.8 Walter A. Shewhart — Pai do controlo estatístico de qualidade	22
9 Esquemas de controlo de qualidade do tipo Shewhart para atributos e variáveis	24
9.1 Introdução	24
9.2 Esquemas Shewhart	28
9.3 Desempenho de esquemas Shewhart	35

9.4	Cartas Shewhart para atributos	37	11.7	Ilustração: esquemas \bar{X} dos tipos FSI e VSI com limites 3σ	118
9.5	Cartas Shewhart para variáveis	51			
10	Esquemas de controlo de qualidade do tipo CUSUM e EWMA para atributos e variáveis	62	13	Amostragem de Aceitação	120
10.1	Esquemas CUSUM e EWMA	62	13.1	Introdução	120
10.2	Esquemas CUSUM para atributos	64	13.2	Planos de amostragem de aceitação simples por atributos	125
10.3	Desempenho de esquemas CUSUM para atributos	69	13.3	A norma Military Standard 105 (ANSI/ASQC Z1.4)	131
10.4	Esquemas EWMA para variáveis	79	13.4	Planos de amostragem de aceitação simples por atributos – com rectificação da inspecção	136
10.4.1	Esquema EWMA padrão para μ	79	13.5	Planos de amostragem de aceitação dupla por atributos – com e sem rectificação da inspecção	140
10.4.2	Esquema EWMA unilateral superior para σ^2	84	13.6	Planos de amostragem de aceitação para variáveis	147
10.5	Desempenho de esquemas individuais EWMA para variáveis	90	13.7	Planos de amostragem de aceitação para variáveis — distribuição gaussiana: desvio padrão conhecido	150
10.6	Desempenho de esquemas conjuntos para μ e σ^2	95	13.8	Planos de amostragem de aceitação para variáveis — distribuição gaussiana: desvio padrão desconhecido	153
10.6.1	Sinais erróneos — Misleading Signals	96	13.9	A norma Military Standard 414 (ANSI/ASQC Z1.9)	156
10.6.2	Probabilidades de Misleading Signal (PMS)	98			
11	Esquemas com intervalos amostrais variáveis	104			
11.1	Introdução	104			
11.2	Descrição das políticas amostrais FSI e VSI	106			
11.3	Características primárias	108			
11.4	Cálculo das características primárias dos esquemas Shewhart	109			
11.5	Obtenção numérica das características primárias para esquemas do tipo markoviano	111			
11.6	Comparabilidade sob controlo; característica primordial; comparação dos desempenhos de cartas FSI e VSI	115			

Lista de Tabelas

9.1	No. observado de defeituosos t_N com: $n = 100$; $p = p_0 = 0.05$, para $N = 1, \dots, 50$; e $p = p_0 + \theta = 0.056$, para $N = 51, \dots, 70$	30
9.2	Propriedades de RL (caso geométrico).	36
9.3	Descrição das cartas (padrão) np e c , com limites 3-sigma.	39
9.4	Valores de quantis de RL , ARL , $SDRL$, $CVRL$, $CSRL$ e $CKRL$ para carta- np unilateral superior ($n = 100$, $p_0 = 0.02$ e $UCL = 7$).	41
9.5	No. de artigos não conformes em 30 amostras de 100 peças soldadas.	43
9.6	No. de artigos defeituosos em 10 amostras de 100 peças.	45
9.7	No. de defeitos em 20 amostras de dimensão variável de rolos de papel.	45
9.8	No. de defeitos de 16 amostras de 4 transmissões manuais.	46
9.9	No. de defeitos à superfície de 25 lâminas de aço.	47
9.10	No. de defeitos na inspeção final de gravadores.	48
9.11	No. de artigos defeituosos em 20 amostras de dimensão variável.	49
9.12	Descrição das cartas (padrão) \bar{X} e S^2	52
9.13	Médias de 10 amostras de dimensão $n = 4$	54
9.14	Médias de 24 amostras de dimensão $n = 5$ de três últimas casas decimais do diâmetro de suportes metálicos.	56
9.15	Valores de $\xi_\sigma(\theta)$ para esquemas S^2 com $\sigma_0^2 = 1$ e $\alpha = 0.002$ (i.e., $ARL_\sigma(1) = 500$).	57
9.16	Médias e desvios-padrão corrigidos de 20 amostras de dimensão 5.	60
10.1	Características de esquemas <i>Shewhart</i> e <i>CUSUM/EWMA</i>	63
10.2	No. observado de defeituosos (y_N) e valor observado da estatística <i>CUSUM</i> (z_N) para: $n = 100$, $p = p_0 = 0.05$, para $N = 1, \dots, 50$, $p = p_0 + \theta = 0.056$, para $N = 51, \dots, 70$; $k = 5.29$, $u = 0$ e $UCL_C = 18.3$	67
10.3	Algumas propriedades de $RL^u(\theta)$	73
10.4	Esquemas <i>Shewhart</i> vs. <i>CUSUM</i>	74
10.5	Alguns quantis do RL e valores de ARL , $SDRL$, $CVRL$, $CSRL$ e $CKRL$ para os esquemas unilaterais superiores <i>CUSUM</i> e np ($n = 100$, $p_0 = 0.02$, $p_1 = 0.0427685$).	77
10.6	Pesos médios de saquetas de produto químico.	83
10.7	Pesos médios de latas de óleo para motor de carro.	84
10.8	Temperaturas de reagente químico.	87
10.9	Médias e variâncias corrigidas do diâmetro de fibra têxtil.	88
10.10	Caracterização dos esquemas individuais	90
10.11	Médias (\bar{x}), variâncias (s^2) e $\max\{\sigma_0^2, s^2\}$ das temperaturas do reagente.	98
10.12	Expressões exactas das <i>PMSs</i> de Tipos III e IV para os esquemas conjuntos SS e SS^+	100
10.13	Valores das <i>PMSs</i> dos Tipos III e IV para esquemas conjuntos SS^+ e EE^+	101

11.1	Tempo até sinal para esquemas Shewhart	111
11.2	Valor esperado, variância e coeficiente de variação do tempo até sinal	119
13.1	Planos de amostragem obtidos por uso da norma ANSI/ASQC Z1.4-1981 e por recurso à distribuição hipergeométrica, para $N = 800$, $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.1$. . .	133
13.2	Alguns planos de amostragem para variáveis com σ desconhecido ($\beta = 0.10$), recorrendo norma ANSI/ASQC Z1.9-1980 e a (13.38).	157

Capítulo 8

Controlo estatístico de processos

8.1 O significado de qualidade

É tradicional afirmar-se no meio industrial que a **qualidade** e a **produtividade** não podem andar de mãos dadas: ao desejarmos mais qualidade, sacrificaremos a produtividade e vice-versa.

À semelhança de muitos lugares comuns, aceites e produto de pouca reflexão, este é também falso. Na realidade ao melhorar-se a qualidade, por **aperfeiçoamento** do processo de **produção** e **maior uniformidade do produto**, há, de um modo geral, **melhorias na produtividade** já que se reduzem desperdícios de mão de obra, de equipamento e de matéria-prima e, conseqüentemente, diminuem-se os custos de produção bem como os prejuízos.

Definição informal 8.1 — Qualidade

Significa frequentemente **adequação do produto/serviço** ao consumidor/utilizador (*fitness for use*), i.e., satisfação de requisitos considerados essenciais para o consumidor/utilizador. •

A **qualidade** é, nos dias de hoje, um **critério básico que influencia a decisão** pela **aquisição/utilização** de qualquer **produto/serviço**.

Montgomery (1985, p.1-2) acaba por distinguir **dois tipos de qualidade**. Nada melhor que ilustrá-los com exemplos.

Todos os bens e serviços são intencionalmente produzidos com diversos níveis de qualidade pensados para tipos distintos de consumidores. Estas diferenças de qualidade devem-se, por exemplo, às diferenças de materiais usados na confecção dos estofos dos assentos de um carro (cabedal, napa, tecido, etc.). Estes aspectos prendem-se com a **quality of design** (qualidade do design).

A qualidade no que diz respeito à adequação às especificações e tolerâncias exigidas pelo produtor tem a ver com **quality of conformance**.¹

Definição informal 8.2 — Características de qualidade

Qualquer produto possui um grupo de características que **descrevem conjuntamente a sua adequação** ao consumidor. Estas são designadas de características de qualidade, não passam de v.a. e podem ser, por exemplo, dos tipos:

- **físico** — voltagem, viscosidade, peso e diâmetro;
- **sensorial** — gosto, cor e aparência;
- **temporal** — fiabilidade, operacionabilidade e manutenção. •

Controlo estatístico de qualidade — Não há processos de produção perfeitos ou sem **variabilidade** por mais cuidadosos que sejam no seu planeamento e a sua manutenção. A presença dessa variabilidade torna necessário o **uso de métodos estatísticos** dos quais destacamos:

- **Planeamento de experiências** (*experimental design*) — É amplamente reconhecida a necessidade desta técnica *off-line* que consiste do planeamento cuidadoso do produto e da identificação dos **níveis óptimos** dos **factores** que claramente influenciam as **características de qualidade** (por exemplo, a pressão atmosférica, temperatura de cozedura, tipo de catalisador usado, etc.).
- **Controlo estatístico de processos** (*statistical process control, SPC*) — Técnica *on-line* cujo objectivo principal é o **acompanhamento do processo de produção** e pressupõe de um modo geral o uso de **esquemas** (ou cartas) **de controlo de qualidade**.
- **Amostragem de aceitação** (*acceptance sampling*) — técnica *off-line* frequentemente utilizada para avaliar a “qualidade à saída” dos produtos, por **inspecção dos lotes** destinados aos consumidores.

Assim, pode afirmar-se que o controlo de qualidade é uma actividade pertencente aos domínios da **engenharia**, da **gestão** e, sobretudo, da **Estatística**, que permite:

- avaliar o produto e confrontá-lo com as **especificações** e **tolerâncias** requeridas pelo produtor e com os requisitos do consumidor;

¹Termo que aqui traduzimos livremente para “qualidade da adequação”.

- tomar medidas capazes de **corrigir** situações caracterizadas por **diferenças acentuadas** entre o que é produzido e o que é requerido pelo produtor ou pelo consumidor.

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, pp. 1–4); Montgomery (1985, pp. 1–3).

8.2 Os custos e os aspectos legais da qualidade

Por tratar-se, como referimos, de critério que de um modo geral determina a aquisição de bens/serviços, a qualidade influencia substancialmente o êxito e o crescimento de uma empresa e vem reforçar e melhorar a posição da mesma no mercado.

Os **programas** de garantia de **qualidade** têm associados por vezes **custos** (nem sempre negligenciáveis) que devem ser encarados como uma estratégia que a prazo resultará em maior penetração de mercado, em maior produtividade e em menores custos de produção. Senão vejamos um exemplo (Montgomery (1985, pp. 3–4)).

Exemplo 8.3 — Um fabricante de produz componentes mecânicas a uma taxa de aproximadamente 100 componentes por dia, a um custo de 20 USD por componente.

Por diversas razões, o processo de produção opera de modo que somente 75% das componentes satisfazem as especificações do produtor e estão em condições de ser vendidas. 60% das componentes que não satisfazem tais especificações podem ser retrabalhadas (“reworked”) — a um custo adicional de 4 USD — de modo a poderem ser vendidas, sendo as restantes 40% transformados em sucata (“scrapped”).

Deste modo, após ter-se retrabalhado as componentes, somente $90\% = 75\% \times 100 + 60\% \times (0.25 \times 100)$ da produção é passível de ser vendida a um custo por componente igual a

$$22.89 \text{ USD} = \frac{20 \text{ USD} \times 100 + 4 \text{ USD} \times (0.6 \times 0.25 \times 100)}{90}.$$

Assuma-se que estudos revelaram que a elevada percentagem de componentes não conformes pode ser diminuída, caso se implemente

um par de cartas de controlo de qualidade que permitem minimizar desvios no valor esperado e na variância do diâmetro das componentes.

Assuma-se agora que a implementação de tal par de cartas tem custos adicionais negligenciáveis e resultou num aumento da percentagem inicial de componentes conformes às especificações do produtor de 75% para 95%, mantendo-se a percentagem de componentes que, embora não conformes podem vir a ser retrabalhadas e posteriormente vendidas, em 60%.

Deste modo aumentou-se a percentagem de componentes passíveis de venda para $98\% = 95\% \times 100 + 60\% \times (0.05 \times 100)$ e reduziu-se o respectivo custo por componente para

$$20.53 \text{ USD} = \frac{20 \text{ USD} \times 100 + 4 \text{ USD} \times (0.6 \times 0.05 \times 100)}{98}.$$

O acompanhamento do processo de produção resultou pois numa redução de 10.3% dos custos de produção por unidade. •

Montgomery (1985, p.5–6) identifica quatros **categorias de custos de qualidade** e as respectivas subcategorias. A saber:

- **custos de prevenção** (“prevention costs”);
- **custos de avaliação** (“appraisal costs”);
- **custos devidos a falhas anteriores à venda** (tradução livre de “internal failure costs”);
- **custos devidos a falhas ulteriores à venda** (tradução livre de “external failure costs”).

Os **custos de prevenção** estão associados aos esforços durante o planeamento e a manufactura no sentido de prevenir a produção de

artigos não conformes, i.e., de **produzir bem à primeira** (“do it right the first time”).²

Os **custos de avaliação** dizem respeito à medição e inspecção de produtos, componentes e matérias-primas de forma a garantir o cumprimento das especificações do produtor.³

Quando os produtos, componentes, materiais e serviços não cumprem os requisitos do produtor e este se apercebe de tal facto antes de os fazer chegar ao consumidor, o produtor incorre em **custos devidos a falhas anteriores à venda**.⁴

Caso o desempenho dos produtos não seja satisfatório quando já foram fornecidos ao cliente, o produtor terá que suportar os **custos devidos a falhas ulteriores à venda**.⁵

Ao analisar estes custos é fundamental ter em mente que, por exemplo, o lucro do investimento de uma unidade monetária em custos de prevenção é de longe superior ao da mesma unidade monetária em custos de avaliação.

O **consumismo** e a **responsabilidade legal pelo produto** que se coloca no mercado são razões mais que suficientes para a qualidade deva ser encarada como uma estratégia empresarial importante.

O **consumismo** é em parte devido ao aparente aumento do número de falhas durante a utilização dos produtos pelos consumidores. Mais, quando estas falhas se tornam demasiado evidentes, rapidamente nos

²*Prevention costs: quality planning and engineering; new products review; product/process design; process control; burn-in; training; quality data acquisition and analysis.*

³*Appraisal costs: inspection and test of incoming material; production and test; material and services consumed; maintaining accuracy of test equipment.*

⁴*Internal failure costs: scrap; rework; retest; failure analysis; downtime; yield losses; downgrading/off-specing.*

⁵*External failure costs: complaint adjustment; returned product/material; warranty charges; liability costs; indirect costs.*

questionamos se os produtos de hoje não têm qualidade inferior aos seus predecessores e se a qualidade é uma verdadeira preocupação dos fabricantes de hoje.⁶ Não surpreende pois que os fabricantes estejam particularmente preocupados em reduzir tais falhas; com efeito, ao diminuir o número de tais falhas reduzem os custos ulteriores à venda e os ameaças à sua competitividade no mercado.

A **responsabilidade legal por um produto** lançado no mercado deve ser encarada de forma séria quer pelos produtores, quer pelos distribuidores e vendedores. A obrigação legal de compensar o cliente caso ocorram danos devidos a produtos defeituosos não é um fenómeno recente e a ênfase que lhe tem sido dada tem aumentado substancialmente. Para além disso, as afirmações feitas acerca de um produto quando este é publicitado e promovido devem ser consubstanciadas por dados que as validem. Como seria de esperar estes dois aspectos da responsabilidade legal por um produto exercem uma pressão enorme sobre produtores, distribuidores e vendedores.

Texto de apoio: Montgomery (1985, pp. 3–11, 17–19).

⁶A explosão do número de produtos e os lançamentos prematuros de alguns nos dias de hoje também contribuem para esta sensação.

8.3 Um apanhado da história do controlo de qualidade

8.3.1 Um apanhado geral

O movimento para a promoção da qualidade encontra as suas raízes na **Europa medieval** onde os artesãos começam por organizar-se em associações/sindicatos denominados de guildas (“guilds”) no final do **sec. XIII**. A manufactura no mundo dito industrializado tende a seguir este modelo até ao início do **sec. XIX**.

O **sistema fabril**, que enfatiza a inspecção dos produtos, teve início no Reino Unido em **meados** da década de 50 do **sec. XVIII** e floresce, tendo por resultado a **Revolução Industrial** no **início** do **sec. XIX**.

No **início** do **sec. XX**, os produtores incluem, por fim, a noção de **processo de qualidade** nas suas práticas de qualidade.

Com a participação dos **EUA** na **II Guerra Mundial**, a qualidade torna-se crucial no esforço de guerra: por exemplo, as balas/munições produzidas num estado/fábrica devem ser adequar-se às espingardas fabricadas noutra/a. Inicialmente, as forças armadas inspeccionam virtualmente todas as unidades produzidas; a seguir, de modo a simplificar e acelerar este processo sem comprometer a segurança, começam a recorrer a **técnicas de amostragem de aceitação**, impulsionadas pela publicação de tabelas com especificações e regras de decisão e pelos cursos de formação baseados nas técnicas de **controlo estatístico de processos** de **Walter A. Shewhart**.

O nascimento da noção de **Qualidade Total** (“total quality”) nos EUA surge como uma resposta directa à revolução que a Qualidade sofreu no **Japão após a II Guerra Mundial**. Os

japoneses mostram-se receptivos às contribuições de dois especialistas americanos em Qualidade, Joseph M. **Juran** and W. Edwards **Deming**, e, ao invés de se concentrarem na inspecção dos produtos, apostam na **melhoria dos processos de produção** por intermédio das pessoas que neles intervêm.

Na **década de 70 do século passado**, sectores dos EUA, tais como a indústria automóvel ou electrónica, não resistem à **competição feroz dos produtos japoneses** de qualidade largamente superior. A resposta dos EUA, que enfatiza não só a Estatística mas também abordagens que abarcam a organização no seu todo, vem a designar-se de **Gestão da Qualidade Total** (“total quality management”, TQM).

Na **última década do sec. XX**, o termo **TQM** cai em desuso, particularmente nos EUA, no entanto, a sua prática mantém-se.

Poucos anos **após o final do século passado**, o movimento da Qualidade parece ter amadurecido para além da noção de “total quality”. Surgem **novos sistemas de qualidade** dos contributos fundamentais de Deming, Juran e de especialistas japoneses como **G. Taguchi**, e a **qualidade é aplicada em áreas bem distintas da indústria**, tais como a **saúde**, a **educação** e a **função pública**, entre muitas outras.

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/overview.html>

8.3.2 As guildas da Europa medieval

Entre o **final do sec. XIII** e o **início do sec. XIX**, os **artesãos da Europa medieval** organizam-se em **cooperativas/associações/sindicatos** denominados de **guildas**. Estas guildas são responsáveis pelo estabelecimento de **regras rigorosas** que **garantem a qualidade** dos **produtos** fornecidos e dos **serviços** prestados. Para o efeito existem **comissões de inspecção** que verificam os produtos um a um e de certo modo forçam ao cumprimento das referidas regras já que **marcam os artigos sem defeitos com um símbolo** que serve de garantia de qualidade.

É frequente os artesãos acrescentarem uma **segunda marca** ou símbolo aos artigos por eles produzidos. Inicialmente esta marca é usada para identificar a origem de artigos com defeitos. Posteriormente, esta marca **passou a simbolizar a boa reputação do artesão**. Por exemplo, as marcas dos pedreiros simbolizam a obrigação de cada membro da guilda de satisfazer a clientela e melhorar a reputação do respectivo ofício.

As marcas brandidas pelas comissões de inspecção e pelos mestres artesãos servem de prova de qualidade para os clientes pela Europa medieval fora.

Esta **abordagem à qualidade** dos produtos manufacturados e dos serviços prestados é a **dominante até à Revolução Industrial no início do sec. XIX**.

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/guilds.html>

8.3.3 A Revolução Industrial

As práticas de qualidade americanas no sec. XIX são moldadas pelas mudanças nos métodos de produção dominantes:

- **O modelo de manufatura dos artesãos** (*craftsmanship*) — no início do sec. XIX, a produção nos EUA tende a seguir o modelo de manufatura dos artesãos vigente em países europeus. Segundo este modelo, os jovens aprendem um ofício enquanto aprendizes de um mestre, por vezes durante diversos anos.

Uma vez que os artesãos vendem os seus artigos localmente, acabam por pôr em risco a sua reputação profissional e também pessoal caso não consigam ir ao encontro das necessidades dos clientes. Caso os requisitos de qualidade não sejam cumpridos, o artesão corre o risco de perder a clientela que dificilmente pode ser substituída. Assim, os mestres mantêm uma espécie de controlo de qualidade ao inspeccionarem os artigos antes de os venderem.

- **O sistema fabril** — Este sistema, fruto da Revolução Industrial, acaba por transformar os diversos **ofícios** dos artesãos em diversas **tarefas especializadas**. Esta transformação não só força os **artesãos** a tornarem-se **operários fabris** e os **donos de lojas** a passarem a ser **supervisores da produção**, mas marca também o início do **declínio do sentido de autonomia** e da **confiança nas próprias capacidades** (“empowerment”) por parte dos empregados no local de trabalho.

A **qualidade** no **sistema fabril** é **assegurada** pela **perícia** dos **operários** complementada pelas **revisões sistemáticas** ou pelas **inspeções**. Os **produtos** considerados **defeituosos** são ou

retrabalhados (“reworked”), i.e., voltam à linha de produção ou **transformados em sucata** (“scrapped”).

- **O sistema tayloriano** — No final do sec. XIX os EUA afastam-se da tradição europeia e adoptam uma nova abordagem de gestão desenvolvida por Frederick W. Taylor. O objectivo de Taylor é **aumentar a produtividade sem aumentar o número de artesãos especializados**. Ele atinge este objectivo ao atribuir a tarefa de **planeamento da fábrica** a **engenheiros especializados** e ao usar **artesãos** e **supervisores**, que foram entretanto transferidos com o aumento de fábricas, como **inspectores** e **gestores** que executam os planos dos engenheiros. A abordagem de Taylor conduz a **aumentos notáveis da produtividade** mas levanta alguns problemas: os trabalhadores são despojados do seu já diminuto sentido de autonomia e de confiança nas suas próprias capacidades, pelo que a nova ênfase na produtividade tem um **efeito negativo na qualidade**.

De modo a remediar o **declínio da qualidade**, os gestores das fábricas criam **departamentos de inspeção** que impedem que os artigos defeituosos cheguem às mãos dos clientes. Caso um artigo defeituoso chegue a um cliente, é comum os gestores interrogarem o inspector “Como pôde deixar isto chegar ao cliente?” ao invés de perguntar ao gestor da produção “Por que produzimos artigos defeituosos?”

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/industrial-revolution.html>

8.3.4 O início do sec. XX

O início do sec. XX é marcado pela inclusão da **noção de “processo”** nas práticas de qualidade.

Um “processo” é definido por um **grupo de actividades** que, tendo como ponto de partida **matéria-prima** (“input”), valoriza-a e transforma-a num **produto acabado** (“output”), da mesma maneira que um mestre de cozinha transforma um conjunto de ingredientes numa bela refeição.

Walter A. Shewhart, um estatístico dos “Bell Laboratories”, começa por concentrar-se no controlo de processos em meados dos anos 20 do sec. passado, tornando a **qualidade relevante** não só **para o produto final** mas também **para os processos responsáveis pela sua produção**.

Shewhart reconhece que os **processos industriais produzem dados**. Por exemplo, um processo em que um metal é cortado em folhas às quais estão associadas medições, tais como o comprimento, a espessura e o peso das folhas de metal. Shewhart entende que estes **dados** podem ser **analisados** usando **técnicas de Estatística** de modo a verigar se o **processo** está estável ou **sob controlo**, ou se pelo contrário, está **fora de controlo** por estar a ser afectado por causas assinaláveis. Ao fazê-lo, **Shewhart** fundou os **alicerces da carta de controlo**, uma ferramenta essencial para a qualidade nos dias de hoje.

Os conceitos de Shewhart são usualmente designados por **controlo estatístico de qualidade**. Diferem de qualquer sistema orientado para o produto na medida em que tornam a qualidade relevante quer para o produto final, quer para o processo que o processo que o criou.

W. Edwards **Deming**, um estatístico do “U.S. Department of Agriculture and Census Bureau”, torna-se um **defensor e promotor dos métodos de controlo estatístico de qualidade** propostos por W. Shewhart e mais tarde vem a ser a tornar-se **mais tarde o líder do movimento para a qualidade** quer no **Japão**, quer nos **EUA**.

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/20th-century.html>

8.3.5 A II Guerra Mundial

Ao entrarem na II Guerra Mundial em Dezembro de 1941, os EUA promulgam **leis** de modo a ajustar a **economia civil à produção de armas**. **Até então**, os **contratos militares** são geralmente atribuídos ao **fabricante** que produz **mais barato**. Os **produtos** são **inspeccionados antes de serem entregues** de modo a garantir a sua conformidade com os requisitos.

Durante este conflito, a **qualidade** torna-se uma **questão de segurança crucial** no esforço de guerra. O equipamento militar inseguro é claramente inaceitável e as **forças armadas americanas inspeccionam** virtualmente **todas as unidades produzidas** de forma a garantir a segurança durante a operação das mesmas. Este procedimento requer imensos recursos humanos dedicados exclusivamente à inspeção da produção e causa problemas no recrutamento; mais, manter o pessoal competente revela-se tarefa difícil dado o carácter temporário/transitório do serviço militar.

De forma a **diminuir os problemas sem comprometer a segurança** dos produtos, as forças armadas começam a recorrer à **amostragem de aceitação** ao invés da inspeção a 100%.

Com a ajuda de consultores da indústria, em particular dos “Bell Laboratories”, adaptam-se e publicam-se **tabelas de amostragem** sob a forma de uma **norma militar** (“military standard”) denominada **Mil-Std-105**. Estas **tabelas** são **incorporadas nos contratos militares** de forma a que os fornecedores compreendam de facto o que espera que produzam.

As forças armadas ajudam também os fornecedores a melhorar a qualidade ao promoverem **cursos de formação** nas **técnicas de controlo estatístico de qualidade** de Walter A. Shewhart.

Se por um lado estes cursos de formação conduzem a alguma melhoria da qualidade em algumas organizações, por outro a maioria das companhias sentem-se pouca motivadas a integrarem plenamente tais técnicas. Desde que o governo efectue os pagamentos previstos pelos contratos, a prioridade máxima das organizações é, sem sombra de dúvida, o cumprimento dos prazos de produção. Mais, a **maioria dos programas de controlo estatístico de qualidade é cessada** mal terminam os contratos com o governo dos EUA.

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/wwii.html>

8.3.6 A qualidade total

Após a II Guerra Mundial os fabricantes japoneses abandonam a **produção de artigos militares** para uso interno e **apostam na produção e exportação de artigos quotidianos**.

Inicialmente, o Japão goza da reputação de produtor de artigos de qualidade inferior e estes são ignorados no mercado internacional. Isto leva as organizações japonesas a explorar novas formas de pensar a qualidade.

Deming, Juran e o Japão — Os japoneses são receptivos à informação dada pelas companhias estrangeiras e aos contributos de conferencistas estrangeiros, entre eles dois peritos americanos:

- W. Edwards Deming, frustrado com os gestores americanos por terem posto um termo aos programas de controlo estatístico de processos aquando do fim da II Guerra Mundial e dos contratos governamentais de fornecimento de armas;
- Joseph M. Juran, que prediz que a qualidade dos bens de consumo japoneses vai ultrapassar a dos produzidos nos EUA em meados dos anos 70 do século passado graças à taxa revolucionária a que a qualidade melhora no Japão.

De acordo com Bartmann (1986, p.5), os **métodos estatísticos de controlo de qualidade** são introduzidos em 1947 no Japão, aquando da fundação da “União Japonesa para a Ciência e Engenharia” (*JUSE*). Em 1949, esta instituição convida **Deming** para proferir uma série de conferências alusivas ao tema. Estas contaram na altura com a presença de 400 engenheiros em 1950 e foram rapidamente seguidas por outras quantas promovidas por **Ishikawa** (então presidente da

“Federação das Sociedades Económicas”) e dirigidas a executivos da indústria. Estes esforços foram, mais tarde, estendidos a trabalhadores de todos os níveis e áreas da indústria. Esta estratégia japonesa representa a nova **abordagem** para a qualidade total. Ao invés de contarem somente com a inspeção dos produtos, os produtores japoneses centram-se na melhoria de todos os processos organizacionais com a intervenção das pessoas envolvidas nesses mesmos processos. Com efeito, na década de 60 do sec. XX surgem os **Círculos de Controlo de Qualidade** da autoria de **Ishikawa**, que consistem em grupos de trabalhadores treinados em técnicas elementares de controlo de qualidade. Estes círculos desempenham um papel crucial no aperfeiçoamento dos processos de produção. Como resultado, o Japão passa a produzir e a exportar artigos de qualidade elevada a preços baixos, beneficiando os consumidores de todo o mundo e conseguida à custa do **aperfeiçoamento contínuo** dos processos de produção, de inúmeras **inovações tecnológicas** e muita **Estatística**.

O impacto dos métodos introduzidos por Deming no Japão é enorme e tal facto é há muito reconhecido pelo Japão onde se atribui um prémio de extremo prestígio com o nome de Deming.

A **indústria americana**, que ocupara um lugar dominante nos **anos 50 e início da década de 60** do século anterior, rapidamente se vê a braços com a competição feroz da **indústria japonesa** e da de outros países asiáticos e de países europeus. Os gestores americanos não se apercebem à partida das profundas transformações na indústria japonesa e assumem que toda e qualquer competição vinda do Japão se reduziria a uma questão de preço e não de qualidade. Entretanto os produtores japoneses aumentam as suas quotas no mercado americano,

com **consequências** económicas evidentes nos EUA: os produtores americanos perdem quotas de mercado, as organizações começam a transferir as suas unidades fabris para paragens onde a mão-de-obra é mais barata, e a economia americana sofre um grande revés, provando que as profundas transformações da economia mundial no sec. XX mostram claramente que a **“selecção natural”** também se aplica à indústria (Bartmann (1986, pp.2–3)). Um exemplo extremo da **perda de competitividade da indústria americana** relatado por Bartmann (1986) é a inexistência de fábricas de CDs nos EUA (à data de Março de 1986).

Este quadro geral nada favorável à economia americana leva, felizmente, os EUA a reagirem. Com efeito, o nascimento da qualidade total nos EUA é a resposta directa à revolução da qualidade que ocorre no Japão logo após a II Guerra Mundial.

A resposta americana — Inicialmente os produtores americanos assumem que o sucesso japonês se deve ao preço dos seus artigos e adoptam estratégias de redução dos custos da produção doméstica e restrições das importações nomeadamente do Japão. É claro que isto em nada melhora a competitividade dos produtos americanos no que diz respeito à qualidade.

Com o decorrer dos anos, a competição de preços diminui ao passo que a competição ao nível da qualidade aumenta. No **final dos anos 70 do sec. XX**, a **crise da qualidade nos EUA** atinge proporções enormes, atraindo a atenção de legisladores, administradores e dos meios de comunicação social. Um programa da cadeia americana NBC intitulado **“If Japan Can... Why Can't We ?”** chama a atenção para a forma como o Japão conquistou os mercados mundiais de automóveis e de equipamento electrónico. Os EUA caem, por fim, em si.

Os administradores de topo das maiores companhias americanas dão um passo em frente e assumem a liderança do movimento para a qualidade. A resposta americana, que enfatiza não só a Estatística mas também estratégias que envolvem a organização como um todo, passa a ser conhecida por **Gestão da Qualidade Total** (TQM).

Seguem-se diversas iniciativas no âmbito da qualidade. Em **1987** publica-se a série **ISO 9000** de normas de gestão da qualidade. O “Baldrige National Quality Program” e o “Malcolm Baldrige National Quality Award” são promovidos pelo **congresso americano** nesse mesmo ano. As companhias americanas levam inicialmente algum tempo a adoptar estas novas normas mas acabam eventualmente por render-se às mesmas.

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/total-quality.html>

8.3.7 Para além da qualidade total

No **final** dos **anos 90** do sec. passado a **gestão da qualidade total** é considerada por alguns líderes do mundo de negócios dos EUA **pouco mais de uma moda**, apesar de ter mantido a sua importância na Europa.

Apesar do termo TQM ter caído, de algum modo, em desuso, em particular nos EUA, a perita em qualidade Nancy Tague afirma: “Muitas organizações usam a TQM com sucesso.”

O movimento para a qualidade amadurece no início do sec. XXI. A perita Tague afirma ainda que os novos sistemas de qualidade evoluíram muito para além do que Deming, Juran e os primeiros defensores do movimento para a qualidade no Japão. Eis alguns

exemplos de tal maturação:

- Em 2000 a série **ISO 9000** de normas de gestão da qualidade é revisto de modo a dar mais ênfase à satisfação do cliente.
- O “Malcolm Baldrige National Quality Award” passa a incluir, a partir de 1995, os resultados da empresa entre os vários critérios para a atribuição deste galardão.
- A metodologia “Six-Sigma”, desenvolvida pela Motorola com o objectivo de minimizar o número de defeitos e assim melhorar os processos de produção, evolui consideravelmente e conduz a resultados significativos. A Motorola recebe o “Baldrige Award” em 1988 e partilha as suas boas práticas de qualidade com outras empresas.
- A função de qualidade é desenvolvida por Yoji Akao como uma forma de se concentrar no que o cliente pretende ou necessita no planeamento de um produto ou serviço.
- São desenvolvidas versões específicas da série **ISO 9000** de normas de gestão da qualidade para sectores tais como a indústria automóvel (QS-9000), a aeroespacial (AS9000) e a de telecomunicações (TL9000 e ISO/TS 16949) e a gestão ambiental (ISO 14000).
- A qualidade estabelece-se em sectores bem distintos da indústria tais como a administração, a saúde, a educação e o governo.
- O “Malcolm Baldrige National Quality Award” acrescenta a educação e a saúde às categorias originais (manufatura,

pequenas empresas e serviços). Muitos advogam que se acrescente a categoria de “organizações sem fins lucrativos”.

Fonte: <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/overview/beyond-total-quality.html>

8.3.8 Walter A. Shewhart — Pai do controlo estatístico de qualidade

Shewhart simulated theoretical models by marking numbers on three different sets of metal-rimmed tags. Then he used an ordinary kitchen bowl — the Shewhart bowl — to hold each set of chips as different sized samples were drawn from his three different populations. There was a bowl, and it played a vital role in the development of ideas and formulation of methods culminating in the Shewhart control charts.

Ellis R. Ott, Tribute to Walter A. Shewhart, 1967

Tinham decorrido cerca de dois séculos de revolução industrial, quando o jovem engenheiro **Walter Andrew Shewhart** (1891–1967) altera o curso da história da Indústria ao celebrar aquilo que se pode considerar um **casamento perfeito entre Estatística, Engenharia e Economia**.

Shewhart publica numerosos trabalhos, mas é entre os seus manuscritos que se encontra o fruto mais duradouro e tangível desta curiosa união. Com efeito, no histórico **memorandum** de **16 de Maio de 1924** (ASQ), Shewhart propõe aos seus superiores hierárquicos a **carta** ou esquema **de controlo**, uma ferramenta gráfica fundamental na **distinção entre causas aleatórias e causas**

assinaláveis de variação de um processo de produção que representa um passo inicial para aquilo que Shewhart designa por “formulação de uma base científica para assegurar o controlo económico”.

A vida de Shewhart está cheia de concretizações que não são alheias à sua forte preparação em ciências e em engenharia. Licenciase na University of Illinois e obtém o grau de **Doutor em Física** pela University of California at **Berkeley** em 1917. Lecciona nestas duas universidades e lidera brevemente o Departamento de Física da Wisconsin Normal School in LaCrosse.

A sua carreira profissional compreende também o exercício da Engenharia na companhia Western Electric de 1918 a 1924, e nos **Bell Telephone Laboratories**, onde exerce vários cargos enquanto membro do pessoal técnico de 1925 até à sua reforma em 1956, Lecciona controlo de qualidade e estatística aplicada na University of London, no Stevens Institute of Technology, na Graduate School of the U.S. Department of Agriculture, e na Índia. É professor honorário da Rutgers University e colabora em comités em Harvard e do Departamento de Matemática de Princeton.

É frequentemente consultor do Departamento de Guerra dos EUA, das Nações Unidas e do Governo indiano. Membro activo do National Research Council e do International Statistical Institute, nos EUA. Membro honorário da Royal Statistical Society (Reino Unido) e da Calcutta Statistical Association (India). É **editor** principal da **Mathematical Statistics Series** publicada pela John Wiley & Sons durante mais de vinte anos.

Fonte:

http://www.asq.org/about-asq/who-we-are/bio_shewhart.html

Capítulo 9

Esquemas de controlo de qualidade do tipo Shewhart para atributos e variáveis

9.1 Introdução

Concentrar-nos-emos doravante no **controlo estatístico de processos**, muito em particular em **esquemas de controlo de qualidade**, e posteriormente na **amostragem de aceitação**.

O **acompanhamento de processos de produção** pressupõe, de um modo geral:

- a escolha de uma **característica de qualidade** (e.g. número de defeitos, diâmetro, etc.);
- a selecção de **parâmetro**(s) a controlar (e.g. valor esperado, variância, probabilidade de selecção de artigo defeituoso);
- a recolha regular de **amostras** (e.g. de hora em hora);
- o **registo sequencial** dos valores observados de uma **estatística** (e.g. média, variância amostrais ou percentagens observadas de defeituosos), em gráfico com **limite(s) apropriado(s)**.

O dispositivo gráfico resultante denomina-se

- **esquema/carta de controlo**.

Esta **ferramenta estatística** foi proposta por **Walter A. Shewhart** dos “Bell Telephone Laboratories”, em **1924**, com o intuito de **vigiar** e **reduzir a variabilidade** dos processos de produção.

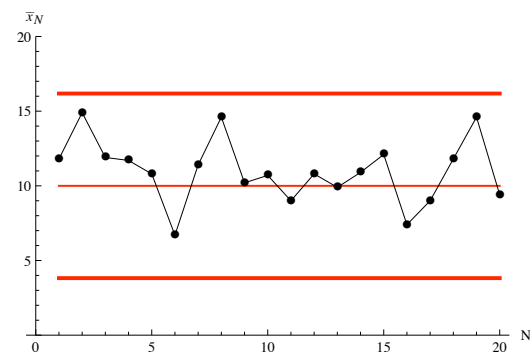


Figura 9.1: Carta de controlo — No. amostra (abscissa) vs. **média da amostra** (ordenada); **limite superior de controlo**, **linha central** e **limite inferior de controlo** (**UCL**, **LC** e **LCL**; de cima para baixo).

Segundo Shewhart a variabilidade da característica de qualidade pode ter duas origens:

- **causas aleatórias** (*chance causes*) — o efeito destas resulta em **variações negligenciáveis**, incontroláveis e **intrínsecas** à natureza aleatória da característica de qualidade (*background noise*);
- **causas assinaláveis** (*assignable causes*) — traduzem-se em **alterações inaceitáveis** da característica de qualidade; e podem dever-se ao ajustamento incorrecto da maquinaria, a erros dos operadores, de matéria prima inadequada, etc.

A ocorrência de uma **causa assinalável** pode, por exemplo, resultar na **alteração de** um ou mais **parâmetros** da distribuição da característica de qualidade. Estudar-se-ão somente

- **shifts** — alterações bruscas do valor de um ou mais parâmetros, do nível desejado para um outro distinto.

Exemplo 9.1 — O valor esperado μ toma valor μ_0 num primeiro turno de 8 horas um processo de fabrico, tendo passado a tomar valor μ_1 ($\mu_1 \neq \mu_0$) em todos os turnos seguintes. Assim, se a recolha de amostras ocorresse de uma em uma hora teríamos $\mu = \mu_0$, nos instantes $N = 1, \dots, 8$, e $\mu = \mu_1$, para $N = 9, 10, \dots$ •

Podem ocorrer também

- **drifts** — alterações graduais do(s) valor(es) do(s) parâmetros, ou ainda alterações do(s) parâmetros — durante curto espaço de tempo — seguidas de retorno ao nível alvo.

Exemplo 9.2 — Um *drift* linear pode ser descrito do seguinte modo para o exemplo anterior: $\mu = \mu_0$, $N = 1, \dots, 8$, e $\mu = \mu_0 + aN$, $a \neq 0$ e $N = 9, 10, \dots$ •

Estados estatísticos de processos de produção — Um processo de produção diz-se

- **sob controlo** (*in control*) na presença exclusiva de causas aleatórias.

Se para além destas estiverem presentes causas assinaláveis o processo dir-se-á

- **fora de controlo** (*out of control*).

Objectivo dos esquemas de controlo de qualidade — Têm por **fim** auxiliar-nos na **deteção de causas assinaláveis**, que, por traduzirem-se num **desvio do(s) parâmetro(s) do seu valor alvo**, resultam de um modo geral na **deterioração da qualidade** dos produtos. A **deteção** deverá ser o mais **rápida** possível de forma a iniciar **acções de correcção** que tragam o(s) parâmetro(s) de novo ao(s) seu(s) **alvo(s)**.

Graças à sua simplicidade e utilidade o esquema de controlo tornou-se uma ferramenta clássica e ainda hoje muito popular em **controlo estatístico de processos/gestão da qualidade**.

Aplicações dos esquemas de controlo — A utilização de esquemas de controlo não se confina à indústria:

- a **administração** (Hawkins e Olwell (1998, p.v) — preenchimento incorrecto de documentos),
- a **epidemiologia** (Blacksell *et al.* (1994) — diagnóstico de doenças veterinárias),
- a **deteção de fraudes** (Johnson (1984) — roubo sistemático pelos caixas de supermercado),
- **gestão de pessoal** (Olwell (1997) — “avaliação” de comportamento no local de trabalho),

e também o **atletismo**, a **biologia**, as **ciências do ambiente**, a **genética** e as **finanças** (Hawkins e Olwell (1998) e Stoumbos *et al.* (2000)) são algumas das áreas de aplicação corrente dos esquemas de controlo de qualidade.

Texto de apoio: Montgomery (1985, pp.99–102).

9.2 Esquemas Shewhart

Os esquemas de controlo de qualidade mais divulgados são os propostos por Walter A. Shewhart (1931) e justamente designados de **esquemas Shewhart**: os esquemas \bar{X} (*mean*) e R (*range*) para a detecção de eventuais **alterações** no **valor esperado** μ e **desvio-padrão** σ de uma característica de qualidade de um processo, respectivamente.

Esquema Shewhart — Um esquema típico do tipo Shewhart para um parâmetro (e.g. o valor esperado μ) tem as seguintes características:

- em **abcissa** representa-se o **número da amostra** N (ou o instante da respectiva recolha);
- em **ordenada** regista-se o valor observado de uma **estatística** (usualmente suficiente para o parâmetro sob vigilância), valor esse calculado com base numa amostra de dimensão n .

É costume unir os pontos com segmentos de recta para uma melhor visualização da evolução das observações.

A carta de controlo possui ainda três linhas:

- **CL** — linha central (*central line*) representando o valor **alvo** do parâmetro sob vigilância;
- **LCL** e **UCL** — limite inferior de controlo (*lower control limit*) e limite superior de controlo (*upper control limit*)

As designações destes dois limites tem a sua razão de ser como poderemos ver de seguida.

Emissão de sinal — O operador de um esquema de controlo é alertado para a possível presença de uma **causa assinalável** assim que se registar **observação para além dos limites de controlo**, seguindo-se a **emissão de sinal**, tal como se ilustra no Exemplo 9.3.

Tipos de sinal — À semelhança de um teste de hipóteses podem ocorrer:

- **falsos alarmes** — emissão de sinal na ausência de desvio no parâmetro (erro de tipo I dos testes de hipóteses);
- **sinais válidos** — emissão de sinal na presença de desvio no parâmetro.

Escolha dos limites de controlo — Os limites de controlo devem ser escolhidos tendo em conta a distribuição amostral da estatística utilizada e de tal forma que seja **muito pouco provável** que esta **estatística** tome valores **para além dos limites de controlo**, quando o processo de **produção** está **sob controlo**.

Nesta escolha deve ter-se em consideração que o esquema **deve** emitir **falsos alarmes** por períodos o mais **espaçados** possível quando o processo está sob controlo, contribuindo assim para a **redução da frequência de falsos alarmes**. Por outro lado, a carta de controlo deverá possuir limites escolhidos de forma a emitir **sinais o mais depressa** possível caso o **processo** de produção esteja **fora de controlo**.

Exemplo 9.3 — Foram simuladas 70 observações do **número de artigos defeituosos em amostras de dimensão** $n = 100$ numa carta de controlo- np .¹

Tabela 9.1: No. observado de defeituosos t_N com: $n = 100$; $p = p_0 = 0.05$, para $N = 1, \dots, 50$; e $p = p_0 + \theta = 0.056$, para $N = 51, \dots, 70$.

N	t_N	N	t_N	N	t_N	N	t_N	N	t_N	N	t_N
1	2	11	7	21	7	31	4	41	4	51	7
2	1	12	2	22	4	32	2	42	9	52	12*
3	3	13	5	23	1	33	2	43	8	53	8
4	6	14	6	24	5	34	9	44	6	54	7
5	7	15	7	25	8	35	9	45	7	55	6
6	4	16	2	26	4	36	3	46	6	56	15*
7	3	17	7	27	1	37	2	47	3	57	12*
8	2	18	5	28	4	38	8	48	6	58	11
9	5	19	4	29	7	39	3	49	1	59	11
10	15†	20	4	30	6	40	5	50	3	60	12*

† 1o. falso alarme; * 1o.-7o. sinais válidos

As **primeiras 50 observações** foram recolhidas enquanto o processo de **produção** operava **sob controlo** ao nível alvo/nominal $np_0 = 100 \times 0.05$.

As **20 observações seguintes** foram recolhidas do mesmo processo **após a ocorrência** de um **shift** para $n(p_0 + \theta) = 100 \times (0.05 + 0.006)$.

Os valores observados da estatística T_N encontram-se na tabela acima. Os limites inferior e superior de controlo deste esquema *Shewhart* são iguais a $LCL = \max\{0, np_0 - 3 \times \sqrt{np_0(1 - p_0)}\} = 0$ e $UCL = np_0 + 3 \times \sqrt{np_0(1 - p_0)} = 11.53$, respectivamente.

¹Ver a descrição desta carta para atributos na Secção 9.4.

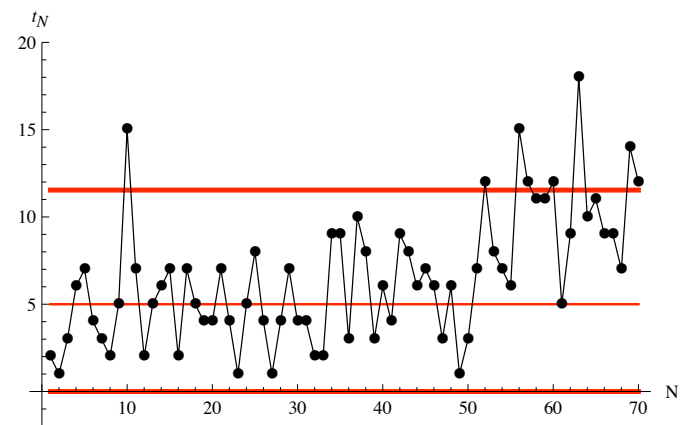


Figura 9.2: Carta de controlo (unilateral superior) — No. amostra (abscissa) vs. de defeitos por amostra (ordenada); **limite superior de controlo, linha central e limite inferior de controlo (UCL LC e LCL; de cima para baixo)**.

Convém referir que este esquema foi responsável por: **um falso alarme** (sinais emitidos antes da ocorrência do *shift*); **sete sinais válidos**, sendo que o 1o. foi emitido pela 52a. amostra, i.e., 2 observações após a ocorrência da alteração do parâmetro np . •

Convém ainda referir que um **esquema de controlo** pode ser utilizado como um **dispositivo de estimação** de parâmetros, desde que o processo esteja sob controlo.

Mais, os **esquemas de controlo** têm uma **longa história de utilização** na indústria. Montgomery (1985, p.107) nomea **cinco razões** para tal facto. Com efeito, os esquemas de controlo:

- constituem **técnica estatística** que contribui para **aumento da produtividade** pois reduzem a quantidade de artigos que necessitam de ser retrabalhados ou transformados em sucata;

- são forma eficiente de prevenir a produção de artigos defeituosos e como tal consistente com a filosofia “do it right the first time”;
- contribuem para a **diminuição de ajustamentos desnecessários do processo de produção** já que são capazes de distinguir as causas aleatórias das assinaláveis;
- **fornecem informação essencial para o diagnóstico do tipo de causa assinalável** por parte de um operador experiente;
- **fornecem informação sobre a evolução dos processos de produção** e como tal permitem a (re)estimação de parâmetros cruciais desses mesmos processos.

Dimensão da amostra, frequência amostral e recolha das unidades amostrais — Ao escolher a dimensão da amostra deve ter-se em mente a magnitude do *shift* que se pretende detectar. Assim, caso a **magnitude** dos *shifts* seja **grande**, deve recorrer-se a uma **amostra pequena** (e vice-versa).

Acrescente-se também que na **indústria** tende a recorrer-se a **amostras pequenas recolhidas muito frequentemente**, em particular, quando se lida com elevadas taxas de produção ou com a possibilidade de ocorrência de vários tipos de causas assinaláveis.

A forma como são recolhidas as unidades que constituem cada **amostra** (“rational subgroup”) é crucial. Uma abordagem possível passa pela constituição de uma amostra com **unidades produzidas sensivelmente ao mesmo tempo**; esta abordagem é recomendada quando se tem por objectivo principal a detecção de *shifts*. Outra abordagem consiste em formar uma amostra com **unidades do**

produto que sejam representativas de todas as unidades produzidas desde a recolha da última amostra; esta abordagem é particularmente recomendada quando o esquema de controlo é usado para tomar decisões sobre a aceitação de todas as unidades produzidas desde a recolha da última amostra.

Regras/emissões de sinal alternativas — É essencial que as observações da carta de controlo se disponham de **modo aleatório em torno do alvo**.

Quando estas apresentam um **comportamento sistemático ou não aleatório** deve emitir-se também sinal. Por comportamento sistemático entenda-se séries de observações (**runs**) para além dos limites de controlo (3-sigma) ou todas acima/abaixo do alvo, dos *warning limits* (2 ou 1-sigma), etc.²

Estas regras usualmente denominadas de *run rules* ou **Western Electric rules** sugerem a emissão de sinal caso:

- uma ou mais observações estejam para além dos limites de controlo 3-sigma;
- sete ou oito observações consecutivas se encontrem ou todas acima ou todas abaixo do alvo;
- duas de três observações consecutivas estejam para além dos *warning limits* 2-sigma (mas ainda entre os limites de controlo 3-sigma);
- se **verifiquem** quatro de cinco observações consecutivas para além os *warning limits* 1-sigma;
- se registe um padrão pouco usual e não aleatório de observações.

²Este tipo de limites será posteriormente descrito em mais detalhe.

Para mais detalhes acerca das *Western Electric rules* veja-se Montgomery (1985, p. 112–115).

Como seria de esperar as diversas regras de emissão de sinal conduzem a diferentes probabilidades de emissão de **sinal**. Mais, o uso de uma mais de uma destas regras aumenta não só a probabilidade de emissão de sinais válidos como a de falsos alarmes, pelo que não se deve exagerar na adopção de regras de emissão de sinal sob pena de emitir sinal sempre se recolha uma amostra.

É sobre o desempenho dos esquemas de controlo que nos debruçaremos na próxima secção.

Textos de apoio: Montgomery (1985, pp 102–107); Morais (2001, pp. 16–23, 56–57).

9.3 Desempenho de esquemas Shewhart

Comece-se por destacar alguns **parâmetros relevantes** na descrição do **desempenho de esquemas de controlo** antes mesmo de passarmos a exemplos de cartas do tipo Shewhart.

Magnitude do shift — Diferença relativa (ou rácio) entre os níveis sob controlo, e.g. μ_0 (σ_0), e fora de controlo, e.g. μ_1 (σ_1), do parâmetro de localização (escala) sob vigilância, e.g. μ (σ).

Exemplo 9.4 — No controlo do valor esperado é costume considerar-se $\delta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$; e $\delta = 0$ ($\delta \neq 0$) significa que o processo está sob controlo (fora de controlo).

Por seu lado, no controlo do desvio-padrão é frequente considerar-se $\theta = \sigma/\sigma_0$; e $\theta = 1$ ($\theta \neq 1$) significa que o processo está sob controlo (fora de controlo). •

Average Run Length (ARL) — Na literatura de controlo de qualidade é usual recorrer ao **no. esperado de amostras recolhidas até à emissão de sinal** na avaliação do desempenho de esquemas de controlo. (Assume-se que a magnitude do *shift* se mantém constante durante a contabilização deste número de amostras.)

Por um lado é desejável que os **falsos alarmes** sejam emitidos com **pouca frequência** → **ARL grande**. Por outro a emissão de **sinal válido** deverá ocorrer com a **maior brevidade** → **ARL pequeno**.

Run Length (RL) — A distribuição do **no. de amostras recolhidas até sinal** é relevante na avaliação do desempenho dos esquemas de controlo. Esta **medida de desempenho** depende da magnitude do *shift*, da distribuição da estatística utilizada, etc.

Proposição 9.5 — O desempenho de um esquema Shewhart usual — condicional ao facto da magnitude do *shift* no parâmetro sob vigilância ser igual a δ , $RL(\delta)$ — possui **distribuição geométrica** com parâmetro

$$\begin{aligned}\xi(\delta) &= P(\text{emissão de sinal}|\delta) \\ &= 1 - P(LCL \leq T \leq UCL|\delta),\end{aligned}\quad (9.1)$$

onde T representa a estatística usada pela carta Shewhart. Assim tem-se

$$P[RL(\delta) = m] = [1 - \xi(\delta)]^{m-1} \xi(\delta), \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

$$ARL(\delta) = \frac{1}{\xi(\delta)}, \quad (9.3)$$

bem como outras propriedades de $RL(\delta)$ na Tabela 9.2. •

Tabela 9.2: Propriedades de RL (caso geométrico).

F.p.	$P_{RL(\delta)}(m) = [1 - \xi(\delta)]^{m-1} \xi(\delta), \quad m \in \mathcal{N}$
F.s.	$\bar{F}_{RL(\delta)}(m) = P[RL(\delta) > m] = \begin{cases} 1, & m < 1 \\ [1 - \xi(\delta)]^{\lfloor m \rfloor}, & m \geq 1 \end{cases}$
F. taxa de falha	$\lambda_{RL(\delta)}(m) = \frac{P[RL(\delta)=m]}{P[RL(\delta) \geq m]} = \xi(\delta), \quad m \in \mathcal{N}$
Quantil de ordem p	$F_{RL(\delta)}^{-1}(p) = \inf\{m \in \mathcal{R} : F_{RL(\delta)}(m) \geq p\}, \quad 0 < p < 1$
F.g.p.	$PG_{RL(\delta)}(z) = z\{1 - z[1 - \xi(\delta)]\}^{-1} \xi(\delta), \quad 0 \leq z < [1 - \xi(\delta)]^{-1}$
Momento fact. ordem s	$FM_{RL(\delta)}(s) = s! \times [1 - \xi(\delta)]^{s-1} [\xi(\delta)]^{-s}, \quad s \in \mathcal{N}$
Valor esperado	$ARL(\delta) = [\xi(\delta)]^{-1}$
Desvio-padrão	$SD[RL(\delta)] = [1 - \xi(\delta)]^{1/2} [\xi(\delta)]^{-1}$
Coef. de variação	$CV[RL(\delta)] = [1 - \xi(\delta)]^{1/2}$
Coef. de assimetria	$CS[RL(\delta)] = [2 - \xi(\delta)][1 - \xi(\delta)]^{-1/2}$
Coef. de achatamento	$CK[RL(\delta)] = 5 + [1 - \xi(\delta)]^{-1} - \xi(\delta)$

Texto de apoio: Morais (2002, pp. 16–23).

9.4 Cartas Shewhart para atributos

Em muitas situações práticas é usual classificar cada artigo inspeccionado de conforme ou não conforme com um conjunto de especificações relativas à qualidade de um produto.

Defeito — Cada **especificação não satisfeita** constitui um defeito do artigo (e.g. irregularidade à superfície de painel).

Artigo defeituoso — Um artigo inspeccionado não conforme é uma unidade que não satisfaz pelo menos uma dessas especificações, i.e., com **pelo menos um defeito**.

Cartas para atributos — É costume designar as cartas que resumem informação relativa ao número/percentagem de artigos defeituosos numa amostra, ou ao número (total) de defeitos numa amostra/artigo, de cartas para atributos.

Serão descritas duas cartas para características de qualidade do tipo qualitativo:

- **carta- np** — com este tipo de esquema pretende controlar-se a probabilidade (p) de um artigo seleccionado do fabrico ser defeituoso;
- **carta- c** — esta carta controla o número esperado de defeitos (λ) numa amostra de dimensão n .

As cartas- np e - c têm como estatística:

- **carta- np** — o número de artigos defeituosos na amostra de dimensão n ;
- **carta- c** — o número total de defeitos nos n artigos de uma amostra.

Para além destas cartas pode considerar-se a **carta-p** para a percentagem observada de artigos defeituosos numa amostra ou ainda a **carta-u** para o número observado de defeitos por artigo.

De notar que as **distribuições** usualmente associadas a estas duas estatísticas pertencem aos modelos uniparamétricos:

- **carta-np** — $\{Binomial(n, p), 0 < p < 1\}$;
- **carta-c** — $\{Poisson(\lambda), \lambda > 0\}$.

Importa referir que o **modelo** de **Poisson** faz sentido quando se admite que

- os defeitos ocorrem de modo independente em qualquer artigo produzido e de um artigo para outro — isto é, a ocorrência de um defeito não torna nem mais, nem menos provável, a ocorrência de um outro defeito, nesse mesmo artigo e nos restantes que constituem a amostra, e que
- o número máximo de defeitos é muito maior que o número esperado de defeitos em cada artigo produzido.

Na Tabela 9.3 encontram-se mais detalhes acerca de ambas as cartas, assumindo que

- na N -ésima recolha se obteve amostra de dimensão n , (x_{1N}, \dots, x_{nN}) , proveniente de população X , e
- considerando **limites** de controlo do tipo **3-sigma**.

Convém notar que, na **carta-np**, ao perder-se o controlo da produção, a probabilidade de um artigo seleccionado ser defeituoso tomará valor p , onde $p \neq p_0$. Caso $p > p_0$ ($p < p_0$), a perda de controlo tem como consequência o **agravamento** (melhoramento) da **qualidade** dos artigos produzidos.

Tabela 9.3: Descrição das cartas (padrão) np e c , com limites 3-sigma.

	Carta-np	Carta-c
População		
<i>sob controlo</i>	$X \sim Bernoulli(p_0)$	$X \sim Poisson(\lambda_0/n)$
<i>fora de controlo</i>	$X \sim Bernoulli(p), p \neq p_0$	$X \sim Poisson(\lambda/n), \lambda \neq \lambda_0$
Shift	$\delta = p - p_0$	$\delta = \lambda - \lambda_0$
Estatística	$\sum_{i=1}^n X_{iN} \sim binomial(n, p)$ número de artigos defeituosos	$\sum_{i=1}^n X_{iN} \sim Poisson(\lambda)$ número total de defeitos
LCL	$\max\{0, np_0 - 3\sqrt{np_0(1-p_0)}\}$	$\max\{0, \lambda_0 - 3\sqrt{\lambda_0}\}$
CL	np_0	λ_0
UCL	$np_0 + 3\sqrt{np_0(1-p_0)}$	$\lambda_0 + 3\sqrt{\lambda_0}$

Exercício 9.6 — Justifique a adopção dos limites de controlo na Tabela 9.3.

Que consequências terá o facto de estes limites de controlo não estarem associados a uma sequência de testes de hipóteses uniformemente mais potentes centrados (*UMPU*). •

Exercício 9.7 — Identifique a distribuição (e respectivo parâmetro) do desempenho *RL* destas duas cartas para atributos. •

Exemplo 9.8 (carta-np unilateral superior) — Na fase final da produção de **gravadores de CDs**, um gravador é considerado defeituoso se possuir mais de duas **inconsistências cromáticas** à superfície do seu painel frontal.³

Para além disso, o **número esperado de gravadores defeituosos**, em amostras de 100, não deve exceder 2. I.e.,

³Estas imperfeições, embora não afectem o funcionamento do gravador, são perceptíveis e podem afectar o preço do gravador de CDs.

sob controlo a característica de qualidade possui distribuição $Bernoulli(p_0)$ com $p_0 = 0.02$.

A presença de uma causa assinalável é responsável por um **aumento do número esperado de defeituosos** em amostras de dimensão n — de np_0 para $n(p_0 + \delta)$, onde $0 < np_0 < n(p_0 + \delta) < n$.

Os limites de controlo da **carta-np unilateral superior** são

$$C = [LCL, UCL] = [0, \lfloor np_0 + \gamma\sqrt{np_0(1-p_0)} \rfloor] \quad (9.4)$$

onde γ é uma constante real positiva, escolhida de tal forma que a **taxa de falsos alarmes** emitidos pela carta de controlo tome um **valor específico** — **preferencialmente pequeno**.

Por exemplo, se $\gamma = 5/\sqrt{1.96}$ então $UCL = 7$ e um falso alarme ocorre com probabilidade

$$\begin{aligned} \xi(0) &= P(\text{emitir falso alarme}) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_{iN} > UCL \mid \delta = 0\right) \\ &= 1 - F_{bin(100,0.02)}(7) \simeq 0.000932. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Note que, uma vez que a distribuição dos dados é $Bernoulli(0.02 + \delta)$, o RL deste esquema de controlo possui distribuição geométrica com parâmetro

$$\xi(\delta) = 1 - F_{bin(100,0.02+\delta)}(7), \quad (9.6)$$

independentemente do valor de γ no intervalo $[5/\sqrt{1.96}, 6/\sqrt{1.96}]$.

A Tabela 9.4 descreve o comportamento estocástico de $RL(\delta)$, através da inclusão de várias características relacionadas com RL , para o valor nominal e diversos valores fora de controlo de np associados a $\delta = 0, 0.001, 0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.02, 0.03$.

Esta tabela ilustra também **quão pouco fiável é ARL como medida de desempenho** de um esquema, quando o processo está

Tabela 9.4: Valores de quantis de RL , ARL , $SDRL$, $CVRL$, $CSRL$ e $CKRL$ para carta-np unilateral superior ($n = 100$, $p_0 = 0.02$ e $UCL = 7$).

Quantis RL	$\delta = p - p_0$							
	0	0.001	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.02	0.03
5%	56	41	27	14	8	5	2	1
25%	309	227	148	78	45	27	6	3
Mediana	744	546	355	187	107	65	15	6
75%	1487	1092	710	374	214	130	29	11
90%	2470	1813	1179	621	355	216	48	17
95%	3214	2359	1534	808	461	281	62	22
<i>ARL</i>	1073.030	787.737	512.346	270.112	154.275	94.128	21.047	7.815
<i>SDRL</i>	1072.530	787.237	511.846	269.611	153.774	93.627	20.541	7.298
<i>CVRL</i>	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.976	0.934
<i>CSRL</i>	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.001	2.005
<i>CKRL</i>	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.002	6.019

sob controlo. Por exemplo, a probabilidade de um sinal ser emitido pelas primeiras 309 amostras é de pelo menos 0.25, apesar do ARL sob controlo pouco exceder as 1073 amostras. Para além disso, na ausência de um *shift* em p , o desvio-padrão de RL ($SDRL$) é igual a cerca de 1072 amostras, logo é possível registar observações para além dos limites de controlo **muito** mais cedo **ou muito** mais tarde **do** que o esperado.

Podem ainda acrescentar-se que os coeficientes de assimetria ($CSRL$) e achatamento ($CKRL$) aumentam ligeiramente com o valor de δ quando se usa o esquema unilateral superior np . •

Exercício 9.9 — Num processo de produção de frigoríficos recorreu-se a carta de controlo np com as seguintes características:

- $n = 100$, $LCL = 0$, $UCL = 16.1$ e $p_0 = 0.080$.

- Determine o número esperado de amostras recolhidas até falso alarme. Comente o resultado.
- Qual a probabilidade de uma amostra arbitrária detectar um *shift* para $p = 0.2$?
- Obtenha a probabilidade do *shift* referido em b) ser detectado o mais tardar pela 4a. amostra recolhida a seguir à ocorrência do *shift*. •

Exercício 9.10 — Uma carta de controlo np (padrão) indica que a um determinado processo de fabrico está associada a produção de 2% de itens defeituosos.

- Qual a probabilidade da carta detectar um *shift* para 4% no dia a seguir à ocorrência do *shift*, caso se inspeccione diariamente 50 itens?
- E ao fim do 4o. dia a seguir à ocorrência do *shift*? •

Exercício 9.11 / Exemplo — Os dados abaixo dizem respeito ao número de artigos defeituosos em 30 amostras de 100 peças soldadas por uma máquina recentemente adquirida, totalizando 237 artigos defeituosos (De Vor *et al.* (1992, p.440)).

- Utilizando a estimativa de MV da verdadeira fracção de peças defeituosas, $\hat{p}_0 = 0.079$, construa e desenhe uma carta de controlo conveniente, com limites 3-sigma.

As estimativas de LCL , CL e UCL obtêm-se substituindo p_0 por \hat{p}_0 nas respectivas expressões. Assim:

$$\widehat{LCL} = n\hat{p}_0 - 3\sqrt{n\hat{p}_0(1 - \hat{p}_0)} = -0.19 < 0 \rightarrow LCL = 0;$$

$$\widehat{CL} = n\hat{p}_0 = 7.9;$$

$$\widehat{UCL} = n\hat{p}_0 + 3\sqrt{n\hat{p}_0(1 - \hat{p}_0)} = 16.00.$$

Tabela 9.5: No. de artigos não conformes em 30 amostras de 100 peças soldadas.

Amostra	Não conformes	Amostra	Não conformes	Amostra	Não conformes
1	7	11	7	21	8
2	8	12	9	22	10
3	6	13	8	23	4
4	8	14	7	24	10
5	6	15	8	25	7
6	8	16	10	26	7
7	3	17	10	27	9
8	5	18	5	28	8
9	9	19	12	29	10
10	7	20	11	30	10

- Assumindo doravante que p_0 é igual a \hat{p}_0 , diga se terá ocorrido algum sinal de perda de controlo?

Qual o número esperado de amostras recolhidas até à emissão de um falso alarme?

- Determine a probabilidade de uma amostra arbitrária ser responsável pela emissão de um sinal quando a fracção de defeituosos passa a ser igual a $p = 10\%$ e ao utilizar-se a carta de controlo construída em a).

Determine o valor de ARL nessa situação?

- Qual o valor de ARL caso haja um melhoramento da qualidade associado a $p = 0.05$?

Compare este valor com os anteriores e comente a adequação da carta para a detecção de diminuições em p .

- e) Elabore um programa para obter o gráfico de $\log[ARL(\delta)]$ com $\delta \in (-p_0, 1 - p_0)$ ou em outros intervalos que entender mais convenientes. •

Exercício 9.12 — Uma carta de controlo p (padrão) para a fracção de defeituosos é utilizada para controlar um processo que se julga produzir $p_0 = 1.6\%$ de peças defeituosas. Admitindo que se recolhe diariamente uma amostra de 100 peças:

- Calcule os limites de controlo desta carta;
- Obtenha a probabilidade de um *shift* para $p = 2.0\%$ ser detectado pela carta no primeiro dia a seguir à ocorrência do *shift*;
- Determine a probabilidade desse mesmo *shift* ser detectado 3 dias depois da sua ocorrência.
- Qual o menor valor da dimensão da amostra à qual corresponde uma carta de controlo p (padrão) com o respectivo limite inferior de controlo positivo? •

Exercício 9.13 — Procura-se construir uma carta de controlo para a fracção de defeituosos que possua alvo igual a 10% e limites de controlo 3-sigma.

Que dimensão deverão possuir as amostras que irá recolher de modo a que a detecção de um *shift* para 16% seja detectada por uma dessas amostras com probabilidade não inferior a 0.50? •

Exercício 9.14 — Pretende controlar-se um processo de fabrico através da utilização de uma carta de controlo (padrão com limites 3-sigma) para a fracção de defeituosos. Para o efeito foram inicialmente recolhidas 10 amostras de dimensão 100 tendo-se obtido o conjunto de resultados da tabela seguinte.

Tabela 9.6: No. de artigos defeituosos em 10 amostras de 100 peças.

Amostra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Defeituosos	3	2	6	2	7	2	1	2	0	5

- Estabeleça e desenhe uma carta para controlar futuramente a produção.
- Qual é a dimensão amostral mínima a adoptar de modo a obter uma carta de controlo com um limite inferior positivo? •

Exercício 9.15 — Numa fábrica de papel pretende usar-se uma carta de controlo para vigiar o processo de produção de rolos de papel. A produção foi inspeccionada durante 20 dias consecutivos tendo-se registado o número total de imperfeições dos rolos produzidos diariamente.

Tabela 9.7: No. de defeitos em 20 amostras de dimensão variável de rolos de papel.

Amostra	No. rolos	Defeitos	Amostra	No. rolos	Defeitos
1	18	12	11	18	8
2	18	14	12	18	14
3	18	20	13	18	9
4	22	18	14	20	10
5	22	15	15	20	14
6	22	12	16	20	13
7	20	11	17	24	16
8	20	15	18	24	18
9	20	12	19	22	20
10	20	10	20	21	17

a) Use este conjunto de dados para determinar uma estimativa de MV do alvo da carta de controlo c para o número de defeitos por rolo de papel.

Obtenha também os limites de controlo 3-sigma da mesma carta e desenhe-a utilizando para o efeito as 20 observações de que dispõe.

b) Acha que a recolha das 20 amostras foi efectuada com o processo de produção sob controlo? Justifique a sua resposta.

c) Que alvo e limites de controlo recomendaria para controlar a produção futura de rolos de papel de forma a que a emissão de um falso alarme ocorra com probabilidade menor ou igual a 0.002? •

b) Serão os dados provenientes de um processo sob controlo? Em caso negativo, assuma que as causas assinaláveis responsáveis por todos os pontos para além dos limites de controlo foram detectadas e posteriormente eliminadas, e volte a calcular os parâmetros da carta.

c) Qual a estimativa do valor esperado e do desvio-padrão do número de amostras recolhidas até à detecção de um *shift* do valor nominal para 5 defeitos? •

Exercício 9.16 — Um fabricante de automóveis pretende controlar o número esperado de defeitos das transmissões manuais. Para isso recolhe 16 amostras de 4 unidades cada tendo obtido o conjunto de resultados da Tabela 9.8.

Tabela 9.8: No. de defeitos de 16 amostras de 4 transmissões manuais.

Amostra	Defeitos	Amostra	Defeitos
1	2	9	2
2	4	10	1
3	3	11	3
4	1	12	4
5	0	13	5
6	2	14	4
7	1	15	2
8	8	16	3

a) Construa e desenhe uma carta c (padrão) para controlar futuramente o número esperado de defeitos por amostra.

Exercício 9.17 — Os dados da Tabela 9.9 dizem respeito ao número de defeitos à superfície de 25 lâminas de aço.

Tabela 9.9: No. de defeitos à superfície de 25 lâminas de aço.

Amostra	Defeitos	Amostra	Defeitos
1	1	14	0
2	0	15	2
3	4	16	1
4	3	17	3
5	1	18	5
6	2	19	4
7	5	20	6
8	0	21	3
9	2	22	1
10	1	23	0
11	1	24	2
12	0	25	4
13	8		

a) Com base nestes dados construa uma carta 3-sigma para controlar o número de defeitos em lâminas de aço. Considere amostras diárias de uma lâmina de aço.

- b) Será que o processo está sob controlo?
- c) Qual a probabilidade de uma amostra arbitrária ser responsável pela emissão de um falso alarme? •

Exercício 9.18 — O número de defeitos detectados na inspecção final de gravadores foi registado na Tabela 9.10.

Tabela 9.10: No. de defeitos na inspecção final de gravadores.

Gravador	Defeitos	Gravador	Defeitos
2412	0	2421	1
2413	1	2422	0
2414	1	2423	3
2415	0	2424	2
2416	2	2425	5
2417	1	2426	1
2418	1	2427	2
2419	3	2428	1
2420	2	2429	1

- a) Estará o processo de produção sob controlo? Justifique convenientemente a sua resposta desenhando uma carta u obtida com as observações de que dispõe.
- b) Que carta de controlo para número de defeitos por unidade recomendaria para vigiar a produção futura de gravadores? •

Exercício 9.19 — Numa linha de produção procede-se à inspecção dos televisores fabricados com o objectivo de detectar imperfeições à superfície dos mesmos.

O gestor da linha de produção pretende que seja construída uma carta u que cumpra os seguintes requisitos:

- caso o número esperado de defeitos por unidade seja igual a 8, a probabilidade do processo ser declarado como sob controlo seja superior ou igual a 0.99;
- a carta não deverá possuir limite inferior de controlo.

Qual o tipo de carta de controlo mais apropriado e o respectivo limite superior de controlo? •

Exercício 9.20 — O seguinte conjunto de dados diz respeito a um processo de produção que se pretende controlar à custa da utilização de uma carta para a fracção de defeituosos.

Tabela 9.11: No. de artigos defeituosos em 20 amostras de dimensão variável.

Amostra	Dimensão	Defeituosos	Amostra	Dimensão	Defeituosos
1	200	6	11	100	1
2	250	8	12	100	0
3	250	9	13	100	1
4	250	7	14	200	4
5	200	3	15	200	5
6	200	4	16	200	3
7	150	2	17	200	10
8	150	1	18	200	4
9	150	0	19	250	7
10	150	2	20	250	6

- a) Determine uma estimativa para o alvo da carta de controlo para a fracção de defeituosos.
- b) Adoptando o procedimento descrito no Exercício 9.11, obtenha os limites de controlo da carta e desenhe-a. Atente que as dimensões das amostras são variáveis.

- c) Qual a estimativa da probabilidade de uma amostra com dimensão 200, recolhida imediatamente a seguir à ocorrência de um *shift* para $p = 0.15$, detectar semelhante alteração? •

Textos de apoio: Morais (2001, pp.27–29); Montgomery (1985, pp.119–157).

9.5 Cartas Shewhart para variáveis

Cartas para variáveis — Muitas características de qualidade, como o peso, o diâmetro, a pressão arterial, o consumo de combustível e prémios de seguros, são expressas à custa de medidas numéricas e não são definidas de acordo com a presença ou ausência de determinado atributo.

Os esquemas para tais características de qualidade são denominados de **esquemas de controlo para variáveis** e **fornecem** de um modo geral **mais informação** sobre o processo de produção e são mais eficientes que os esquemas para atributos.

Serão apresentados **esquemas para o valor esperado** e a **variância** de uma **característica de qualidade normalmente distribuída**, i.e., esquemas do tipo \bar{X} e S^2 cujas estatísticas sumárias são naturalmente:

- **carta \bar{X}** — média (reduzida) da amostra;
- **carta S^2** — variância corrigida da amostra.

Na Tabela 9.12 encontra-se uma descrição mais detalhada de ambas as cartas nas suas versões padrão, ou seja, usadas na literatura para a detecção de qualquer tipo de alteração no valor esperado ou variância (Montgomery (1995, p. 188, 200)).

A constante γ (resp. α) é escolhida de forma que o valor de *ARL* sob controlo, $ARL_\mu(\delta = 0, \theta = 1)$ (resp. $ARL_\sigma(\theta = 1)$) tome um valor elevado e considerado razoável. Assim, $\gamma = \Phi^{-1}(1 - [2ARL_\mu(0, 1)]^{-1})$ (resp. $\alpha = 1/ARL_\sigma(1)$).

Distribuição do desempenho — O número de amostras recolhidas até à emissão de um sinal por parte da carta \bar{X} (resp. S^2), $RL_\mu(\delta, \theta)$

Tabela 9.12: Descrição das cartas (padrão) \bar{X} e S^2 .

	Carta \bar{X}	Carta S^2
População		
<i>sob controlo</i>	$X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$	$X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
<i>fora de controlo</i>	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Shift	$\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma_0$	$\theta = \sigma/\sigma_0$
Estatística	$\bar{X}_N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{iN}$ média da a.a.	$S_N^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [X_{iN} - \bar{X}_N]^2$ variância corrigida da a.a.
LCL	$\mu_0 - \gamma\sigma_0/\sqrt{n}$	$\frac{\sigma_0^2}{n-1} \times F_{\chi_{(n-1)}^2}^{-1}(\alpha/2)$
Alvo	μ_0	σ_0^2
UCL	$\mu_0 + \gamma\sigma_0/\sqrt{n}$	$\frac{\sigma_0^2}{n-1} \times F_{\chi_{(n-1)}^2}^{-1}(1 - \alpha/2)$

(resp. $RL_\sigma(\theta)$), é também uma v.a. com distribuição geométrica. O parâmetro é, neste caso, igual a

$$\xi_\mu(\delta, \theta) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{\gamma - \delta}{\theta}\right) - \Phi\left(\frac{-\gamma - \delta}{\theta}\right) \right] \quad (9.7)$$

(resp.

$$\xi_\sigma(\theta) = 1 - \left\{ F_{\chi_{(n-1)}^2} \left[\frac{F_{\chi_{(n-1)}^2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\theta^2} \right] - F_{\chi_{(n-1)}^2} \left[\frac{F_{\chi_{(n-1)}^2}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\theta^2} \right] \right\}. \quad (9.8)$$

Exercício 9.21 — Justifique os resultados (9.7) e (9.8). •

Exercício 9.22 / Exemplo — O esquema de controlo \bar{X} mais utilizado é, sem dúvida, o esquema padrão com $\gamma = 3$, i.e., com **limites 3-sigma**.

A probabilidade de emissão de sinal **condicional ao valor da magnitude do *shift*** em μ , $\delta = \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma_0$, e ao facto de σ estar sob controlo (i.e., $\theta = 1$), é dada por

$$\xi(\delta, 1) = 1 - [\Phi(3 - \delta) - \Phi(-3 - \delta)], \quad (9.9)$$

logo aproximadamente igual a 0.0027, 0.00287, 0.02267, 0.8413, para $\delta = 0, 0.1, 1.0, 4.0$.

A função $ARL_\mu(\delta, 1)$ encontra-se representada no gráfico seguinte e permite concluir que se trata de função simétrica em torno da origem.

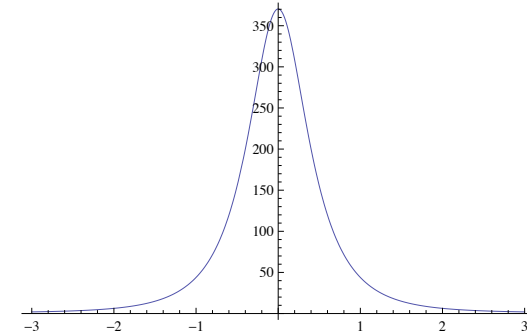


Figura 9.3: ARL de esquema \bar{X} com limites 3-sigma.

Prove que $ARL_\mu(\delta, 1)$ e $\bar{F}_{RL_\mu(\delta, 1)}(m), m \in \mathbb{R}$, são funções decrescentes de $|\delta|$. •

Importa notar a carta \bar{X} com limites 3-sigma é extremamente lenta (resp. rápida) a detectar *shift* de pequena (resp. média e grande) magnitude, tal como ilustra o gráfico da função $ARL_\mu(\delta, 1)$. Daí que para a detecção de *shift* de pequena e média magnitude se recorra a cartas de controlo mais sofisticadas que estudaremos mais tarde.

Exercício 9.23 — Um fabricante produz peças cujo diâmetro externo se admite ser normalmente distribuído com valor esperado sob controlo igual a $\mu_0 = 3mm$ e desvio-padrão constante e igual a $\sigma_0 = 0.1mm$ independentemente do estado do processo de produção.

Um conjunto de 10 amostras sucessivas de 4 peças conduziram às seguintes médias amostrais:

Tabela 9.13: Médias de 10 amostras de dimensão $n = 4$.

Amostra	Média	Amostra	Média
1	3.01	6	3.02
2	2.97	7	3.10
3	3.12	8	3.14
4	2.99	9	3.09
5	3.03	10	3.20

- Construa e desenhe uma carta com limites 3-sigma que permita controlar o valor esperado do diâmetro externo da peça fabricada.
- Que conclusões pode tirar acerca do estado do processo de produção ao utilizar a carta construída em a)?
- Obtenha novos limites de controlo de modo que a probabilidade da carta emitir um falso alarme seja igual a 0.002.
- Ao adoptar a carta construída em c), determine a probabilidade de um *shift* para $\mu = 3.3mm$ ser detectado pela amostra recolhida imediatamente a seguir ao instante de ocorrência desse mesmo *shift*. •

Exercício 9.24 — Uma carta \bar{X} é utilizada para controlar o valor esperado da resistência à tracção do aço A400 que se assume possuir distribuição normal com desvio-padrão conhecido e igual a $\sigma_0 = 6.0$. A esta carta estão associadas amostras de dimensão $n = 4$, $\mu_0 = 200$, $LCL = 191$ e $UCL = 209$.

Determine a probabilidade da carta descrita emitir um sinal aquando da ocorrência um *shift* para:

a) $\mu = 188$ e $\mu = 212$.

b) Compare e comente os dois resultados anteriores. •

Exercício 9.25 — Elabore o gráfico de $ARL_\mu(\delta, 1)$ de uma carta unilateral superior \bar{X} e $ARL_\mu(0, 1) = 500$, para o valor esperado de uma característica normalmente distribuída.

Compare-o com o do desempenho esperado do esquema \bar{X} padrão com o mesmo ARL sob controlo e adiante qual das cartas lhe parece ser mais rápida a detectar aumentos em μ . E para detectar diminuições em μ ? •

Exercício 9.26 — Os dados da Tabela 9.14 dizem respeito a médias de 24 amostras de dimensão $n = 5$ recolhidas num processo de produção de suportes metálicos.

As medidas são referentes às três últimas casas decimais do diâmetro de tais suportes (por exemplo, 34.5 corresponde a 0.50345). Mais, assumo que a característica de qualidade possui distribuição normal com variância conhecida e igual 49.

- Construa e desenhe uma carta \bar{X} com limites 3-sigma recorrendo ao conjunto de dados obtidos. Será que as 24 amostras foram recolhidas sob controlo? Caso ache necessário, recalcule os limites de controlo.

Tabela 9.14: Médias de 24 amostras de dimensão $n = 5$ de três últimas casas decimais do diâmetro de suportes metálicos.

Amostra	Média	Amostra	Média
1	34.5	13	35.4
2	34.2	14	34.0
3	31.6	15	37.1
4	31.5	16	34.9
5	35.0	17	33.5
6	34.1	18	31.7
7	32.6	19	34.0
8	33.8	20	35.1
9	34.8	21	33.7
10	33.6	22	32.8
11	31.9	23	33.5
12	38.6	24	34.2

- b) Determine a probabilidade de uma amostra arbitrária emitir um falso alarme.
- c) Qual a probabilidade da ocorrência de um *shift* (no valor esperado do diâmetro dos suportes) para 0.5045 ser assinalado somente pela 5a. amostra recolhida a seguir à ocorrência de semelhante *shift*?
- d) Admitindo que as especificações do diâmetro dos suportes metálicos são 0.5030 ± 0.0010 , determine uma estimativa da fracção de suportes defeituosos produzidos por um processo de produção sob controlo. •

Exercício 9.27 — Com o objectivo de controlar a variância do peso de latas de meio quilo de café, pretende recolher-se amostras com dimensão 5 e registar as respectivas variâncias corrigidas numa carta S^2 .

Admita que tal característica de qualidade possui distribuição normal com valor esperado constante, embora desconhecido independentemente do estado da produção, e variância, sob controlo, igual a $\sigma_0^2 = 4$.

- a) Obtenha os limites de controlo da carta de forma que o número esperado de amostras até falso alarme seja 200.
- b) Qual a probabilidade de um *shift* para $\sigma^2 = 6$ ser detectado pela amostra recolhida imediatamente a seguir à ocorrência de tal *shift*? •

Exemplo 9.28 — O esquema S^2 com os limites descritos na Tabela 9.12 é recomendado na literatura para controlar a variância σ^2 de dados normalmente distribuídos.

Tabela 9.15: Valores de $\xi_\sigma(\theta)$ para esquemas S^2 com $\sigma_0^2 = 1$ e $\alpha = 0.002$ (i.e., $ARL_\sigma(1) = 500$).

θ	n					
	4	5	7	10	15	100
0.50	0.007828	0.014624	0.042134	0.132929	0.406761	1.000000
0.75	0.002359	0.003089	0.005036	0.009313	0.020672	0.762450
0.80	0.001958	0.002409	0.003528	0.005751	0.011016	0.419837
0.90	0.001533	0.001652	0.001926	0.002391	0.003274	0.037724
0.95	0.001600	0.001628	0.001699	0.001819	0.002035	0.006949
1.00	0.002000	0.002000	0.002000	0.002000	0.002000	0.002000
1.10	0.004522	0.004874	0.005553	0.006569	0.008323	0.054761
1.20	0.010808	0.012654	0.016447	0.022530	0.033848	0.373172

No entanto, esta carta possui **probabilidades de emissão de sinais válidos menores que a probabilidade de emitir falso alarme** como ilustra a Tabela 9.15. Por exemplo, a função $ARL_\sigma(\theta)$ não possui valor máximo sob controlo.

Este comportamento traduz-se em **propriedades indesejáveis** como a velocidade de detecção de determinados *shifts* poder ser inferior à da emissão de um falso alarme, como ilustra o gráfico da Figura 9.4.

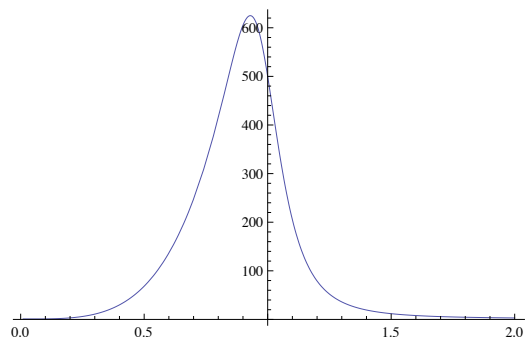


Figura 9.4: ARL de esquema S^2 padrão ($n = 5$).

Exercício 9.29 — Redefina os limites de controlo da carta S^2 por forma a que

$$ARL_{\sigma}(1) = \max_{\theta \in \mathbb{R}^+} ARL_{\sigma}(\theta). \quad (9.10)$$

- Considerando $\sigma_0^2 = 1$, $\alpha = 0.002$ e $n = 4, 5, 7, 10, 15, 100$, ilustre numericamente a obtenção dos quantis de probabilidade que definem o par de limites de controlo desta nova carta S^2 .
- Determine os correspondentes valores de $\xi_{\sigma}(\theta)$ por forma a preencher a Tabela 9.15 e elabore os gráficos de $ARL_{\sigma}(\theta)$ associados.

Nota 9.30 — As cartas \bar{X} e S^2 são frequentemente **utilizadas em conjunto** já que são raras as situações em que o valor esperado e a variância não se alteram separada ou simultaneamente.

Como alternativa ao esquema S^2 é costume recorrer ao esquema R para amplitude amostral (“range chart”) apesar do estimador da variância associado ser pouco eficiente, especialmente quando a dimensão da amostra é média ou grande. (Para uma descrição alongada sobre esta carta sugere-se a consulta de Montgomery (1985, pp.173–92).)

Exercício 9.31 — Caracterize a carta S para o desvio-padrão com limites do tipo $E(S) \pm 3DP(S)$, provando para o efeito que S não é estimador centrado de σ e que

$$E(S) = \sigma \times \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \quad (9.11)$$

$$DP(S) = \sigma \times \sqrt{1 - \frac{E^2(S)}{\sigma^2}} \quad (9.12)$$

(Ver Montgomery (1985, p.197).)

Exercício 9.32 — Estude os esquemas \bar{X} e S descritos em Montgomery (1985, pp.198–199) que fazem uso de **estimativas** de μ e σ .

Exercício 9.33 — Um processo de produção foi recentemente iniciado. De modo a construir cartas que controlassem o valor esperado e o desvio-padrão do diâmetro de pistões de automóveis que se assume ter distribuição normal, foram recolhidas 20 amostras de dimensão 5 tendo-se obtido o seguinte conjunto de resultados.

Construa e desenhe as cartas de controlo \bar{X} e S definidas em Montgomery (1985, pp.198–199), fazendo uso dos dados que constam

Tabela 9.16: Médias e desvios-padrão corrigidos de 20 amostras de dimensão 5.

Amostra	Média	Desvio-padrão	Amostra	Média	Desvio-padrão
1	35.1	4.2	11	38.1	4.2
2	33.2	4.4	12	37.6	3.9
3	31.7	2.5	13	38.8	3.2
4	35.4	3.2	14	34.3	4.0
5	34.5	2.6	15	43.2	3.5
6	36.4	4.5	16	41.3	8.2
7	35.9	3.4	17	35.7	8.1
8	38.4	5.1	18	36.3	4.2
9	35.7	3.8	19	35.4	4.1
10	27.2	6.2	20	34.6	3.7

após a ocorrência de um *shift* no valor esperado para o valor 25 (resp. no desvio-padrão para 2)? •

Textos de apoio: Montgomery (1985, pp.171-209); Morais (2001, pp.19–23).

da Tabela 9.16 e considerando limites de controlo 3-sigma para ambas as cartas. •

Exercício 9.34 — Amostras de dimensão $n = 6$ são recolhidas regularmente de um processo de enchimento de garrações de azeite. Assume-se que esta característica de qualidade tem distribuição normal e é medida e de seguida são calculadas as médias e desvio-padrão amostrais. Da análise de 50 subgrupos obtiveram-se

$$\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i = 1000, \quad \sum_{i=1}^{50} \bar{s}_i = 75. \quad (9.13)$$

- Estime os limites de controlo 3-sigma das cartas \bar{X} e S .
- Considerando os limites calculados em a) definitivos e os valores estimados para μ e σ como os verdadeiros valores destes dois parâmetros, determine a probabilidade de emissão de falso alarme de cada uma das cartas.
- Nas condições da alínea anterior, qual seria a estimativa da probabilidade da carta \bar{X} emitir sinal o mais tardar 5 amostras

Capítulo 10

Esquemas de controlo de qualidade do tipo CUSUM e EWMA para atributos e variáveis

10.1 Esquemas CUSUM e EWMA

As cartas de controlo mais frequentemente utilizadas são do tipo **Shewhart**. A sua popularidade deve-se, fundamentalmente, à simplicidade da sua construção e da caracterização do desempenho destas cartas de controlo. Contudo, por fazerem **uso exclusivo da informação mais recente**, desprezando toda a restante informação disponível, as cartas **Shewhart** são particularmente lentas a detectar algumas alterações de importância prática, as alterações ligeiras num processo de produção. Com efeito no capítulo anterior constatou-se que as cartas do tipo **Shewhart** são, em média, extremamente **lentas** a detectar **shifts** de **pequena e média magnitude**.

Em contrapartida, as cartas **Shewhart** são particularmente **rápidas** (mais uma vez em média) a detectar **shifts** de **grande magnitude**. Esta característica deve-se ao facto de a **estatística** de

qualquer carta **Shewhart** utilizar **somente** a informação respeitante à **última amostra, ignorando** as restantes amostras.

Uma forma de **aumentar a capacidade de detecção** de **shifts** passa pela **acumulação de informação** relativa às amostras sucessivas. Os esquemas de controlo dos tipos **CUSUM** (cumulative sum) e **EWMA** (exponentially weighted moving average) são disso exemplo e foram originalmente propostos por Page (1954) e Roberts (1959), respectivamente, para **detectar shifts** (quer aumentos, quer diminuições) do valor esperado de uma característica de qualidade normalmente distribuída. Nestas referências constatou-se que os **esquemas CUSUM e EWMA são mais rápidos**, em valor esperado, **que os esquemas Shewhart**, no que diz respeito à detecção de *shifts* de pequena e média magnitude do referido parâmetro, devendo-se isso ao facto deste tipo de carta de controlo conjugar a informação mais recente e toda a história passada do processo de produção.

Tabela 10.1: Características de esquemas *Shewhart* e *CUSUM/EWMA*.

Shewhart	CUSUM/ EWMA
Shewhart (1924)	Page(1954)/ Roberts (1959)
Estatística dependente da amostra mais recente	Estatística dependente de todas as amostras recolhidas
Simplicidade	Carácter recursivo $T_N = g(T_{N-1}, \underline{X}_N, \dots)$
Popularidade inquestionável	Popularidade crescente

Estes esquemas podem ser também definidos para os parâmetros de todas as distribuições usuais a que se recorre em controlo de qualidade, tal como o valor esperado do número total de artigos defeituosos numa amostra de dimensão n , à semelhança do que se ilustra a seguir.

Textos de apoio: Morais (1995, pp. 57–58); Morais (2001, p. 23).

10.2 Esquemas CUSUM para atributos

O esquema **CUSUM** é, sem sombra de dúvida, um dispositivo gráfico de controlo muito informativo uma vez que pode fornecer estimativas da magnitude do *shift* e valores preditos para o instante de ocorrência dessa mesma alteração (Hawkins e Olwell (1998, pp. 20–22)).

Nesta secção apresentaremos brevemente um esquema **CUSUM padrão** para dados binomiais que se presta à detecção quer de aumentos, quer de diminuições de p (ou equivalentemente de np).

Em adição debruçar-nos-emos longamente sobre esquemas **CUSUM unilaterais superiores** para p cuja utilização se presta à detecção exclusiva de aumentos no número esperado de artigos defeituosos numa amostra de dimensão fixa.

Definição 10.1 — O esquema **CUSUM padrão** para **dados binomiais** caracteriza-se pela utilização da estatística:

$$Z_N = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ \sum_{j=1}^N (Y_j - np_0) = Z_{N-1} + (Y_N - np_0), & N \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (10.1)$$

onde:

- 0 é o valor inicial atribuído à estatística (ao (re)iniciar-se o processo de controlo de produção);
- $Y_N \sim \text{binomial}(n, p = p_0 + \theta)$ é o número de artigos defeituosos na N -ésima amostra aleatória (de dimensão n), i.e., corresponde ao estimador de MV de np ; e
- np_0 o valor sob controlo de np . •

Nota 10.2 — A estatística Z_N acumula os desvios entre o número de artigos defeituosos e o respectivo valor esperado sob controlo. Mais, não é um estimador de np . •

Definição 10.3 — O esquema **CUSUM unilateral superior** para **dados binomiais** faz uso da seguinte estatística:

$$Z_N = \begin{cases} u, & N = 0 \\ \max\{0, Z_{N-1} + (Y_N - k)\}, & N \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (10.2)$$

onde:

- u é o valor inicial atribuído à estatística, também pertencente a $[LCL, UCL] = [0, UCL]$ para este esquema;
- Y_N é de novo o número de artigos defeituosos na N -ésima amostra aleatória (de dimensão n) e possui distribuição, condicional a θ , $\text{binomial}(n, p = p_0 + \theta)$; e
- k representa o que se chama de **valor de referência** necessariamente inferior a n já que Y_N toma valores em $\{0, 1, \dots, n\}$. •

Nota 10.4 — Lucas e Crosier (1982) recomendam a utilização de **head start (HS) values**, i.e, um valor inicial não nulo para a estatística do esquema **CUSUM** (ou **EWMA**). Esta recomendação prende-se com o seguinte:

- se o processo estiver a operar sob controlo, a estatística do esquema é rapidamente “forçada” a ficar perto da origem já que os desvios entre o observado e o esperado não são de grande monta, logo o efeito esperado do **head start** é mínimo no desempenho da carta;
- caso contrário, o operador do esquema é alertado para a situação de perda de controlo antes do que é habitual, prevenindo assim **start-up problems** (i.e., problemas quando se (re)inicia o processo de produção).

Nota 10.5 — Uma vez que a carta **CUSUM unilateral superior** se propõe à detecção exclusiva de aumentos no parâmetro p de nada adianta assinalar qualquer valor negativo da **estatística**.¹ Assim, altera-se imediatamente o valor observado da estatística para 0, sempre que ela tome valor negativo. Daí o uso da função **max**.

Nota 10.6 — Refira-se, por fim, que a **obtenção** não só dos **limites de controlo** como do valor de referência e de u será **discutida mais tarde**. Pode, no entanto, adiantar-se que a selecção destas constantes dependerá do desempenho desejado para o esquema sob e fora de controlo, assunto que discutiremos na próxima secção.

Exemplo 10.7 — Na Tabela 10.2 encontram-se os valores observados dos números de artigos defeituosos em amostras de dimensão $n = 100$.

As primeiras 50 observações foram recolhidas quando o processo operava ao nível nominal $np_0 = 100 \times 0.05$. As 20 observações seguintes foram recolhidas do mesmo processo após um *shift* para $n(p_0 + \theta) = 100 \times (0.05 + 0.006)$.

Os valores observados para a estatística *CUSUM*, Z_N , encontram-se igualmente na Tabela 10.2, para o valor de referência $k = 5.29$ e valor inicial $u = 0$ (i.e., não se atribuiu head start (*0%HS*) a este esquema). O limite superior de controlo do esquema *CUSUM* unilateral superior é igual a $UCL_C = 18.3$.

De notar que o esquema *CUSUM* unilateral superior para dados binomiais assinalou a perda de controlo somente à 60a. observação tal como confirmam a Tabela 10.2 e a Figura 10.1.

De referir também que o esquema não foi responsável por nenhum falso alarme antes da ocorrência do *shift*.

¹Valor este que se deveria ao acumular de desvios negativos entre o que se observa e o valor de referência.

Tabela 10.2: No. observado de defeituosos (y_N) e valor observado da estatística *CUSUM* (z_N) para: $n = 100$, $p = p_0 = 0.05$, para $N = 1, \dots, 50$, $p = p_0 + \theta = 0.056$, para $N = 51, \dots, 70$; $k = 5.29$, $u = 0$ e $UCL_C = 18.3$.

N	y_N	N	y_N	N	y_N	N	y_N	N	y_N	N	y_N	N	y_N
1	4	11	5	21	4	31	6	41	4	51	5	61	6
2	10	12	5	22	6	32	5	42	2	52	5	62	9
3	5	13	5	23	7	33	5	43	8	53	7	63	5
4	11	14	3	24	5	34	7	44	4	54	9	64	3
5	2	15	4	25	6	35	9	45	5	55	4	65	6
6	6	16	4	26	7	36	5	46	8	56	6	66	8
7	2	17	8	27	8	37	8	47	6	57	9	67	4
8	8	18	4	28	3	38	6	48	6	58	7	68	6
9	8	19	7	29	6	39	6	49	1	59	6	69	4
10	4	20	1	30	4	40	5	50	3	60	6	70	6

N	z_N	N	z_N	N	z_N	N	z_N	N	z_N	N	z_N	N	z_N
1	0	11	8.1	21	0.20	31	5.30	41	12.40	51	7.50	61	19.60
2	4.71	12	7.81	22	0.91	32	5.01	42	9.11	52	7.21	62	23.31
3	4.42	13	7.52	23	2.62	33	4.72	43	11.82	53	8.92	63	23.02
4	10.13	14	5.23	24	2.33	34	6.43	44	10.53	54	12.63	64	20.73
5	6.84	15	3.94	25	3.04	35	10.14	45	10.24	55	11.34	65	21.44
6	7.55	16	2.65	26	4.75	36	9.85	46	12.95	56	12.05	66	24.15
7	4.26	17	5.36	27	7.46	37	12.56	47	13.66	57	15.76	67	22.86
8	6.97	18	4.07	28	5.17	38	13.27	48	14.37	58	17.47	68	23.57
9	9.68	19	5.78	29	5.88	39	13.98	49	10.08	59	18.18	69	22.28
10	8.39	20	1.49	30	4.59	40	13.69	50	7.79	60	18.89*	70	22.99

* primeiro de 11 sinais válidos

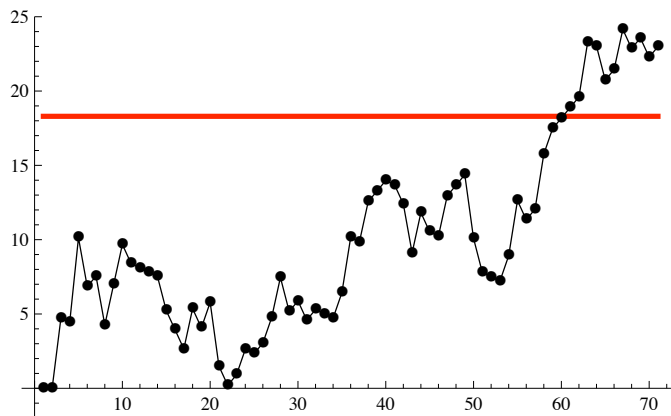


Figura 10.1: Valores observados da estatística $CUSUM(z_N)$.

Refira-se por último que a carta- np do tipo Shewhart, cujos limites são dados por $LCL_S = \max\{0, np_0 - 3 \times \sqrt{np_0(1-p_0)}\} = 0$ e $UCL_S = np_0 + 3 \times \sqrt{np_0(1-p_0)} = 11.53$, não emitiu quaisquer sinais, falsos alarmes ou sinais válidos. •

Exercício 10.8 — Obtenha os valores observados da estatística $CUSUM$ padrão para os dados do Exemplo 10.7 e averigue se, com $LCL = 3$ e $UCL = 17$, e esquema $CUSUM$ padrão teria emitido algum sinal válido.

Desenhe e comente o esquema com os valores observados desta estatística. •

Textos de apoio: Hawkins e Olwell (1998, pp.105–133); Morais (2001, pp. 55–58).

10.3 Desempenho de esquemas CUSUM para atributos

O esquema $CUSUM$ possui estatísticas sumárias *dependentes* e dado o carácter recursivo das mesmas pode ser vistas como constituindo uma **cadeia de Markov em tempo discreto com espaço de estados discreto**² uma vez que estamos a lidar neste caso com dados discretos.³

Apesar de os **esquemas CUSUM serem mais rápidos a detectar shifts de pequena e média magnitude** que os esquemas **Shewhart**, os esquemas $CUSUM$ não atingiram, até hoje, a popularidade das cartas do tipo *Shewhart*.

Uma das razões que se pode apontar é o facto dos esquemas $CUSUM$ (a par dos do tipo $EWMA$) não serem de fácil implementação e a caracterização do respectivo desempenho não ser necessariamente trivial, ao contrário do que acontece com os esquemas do tipo *Shewhart*.

A avaliação do desempenho do esquema $CUSUM$ tirando partido das estatísticas constituírem uma cadeia de Markov facto conduz àquilo que se designa usualmente de **abordagem markoviana**.

² $\{Z_N, N \in \mathbb{N}_0\}$ diz-se uma cadeia de Markov homogénea em tempo discreto com espaço de estados discreto S sse

$$\begin{aligned} P(Z_{N+1} = j \mid Z_N = i, Z_{N-1} = i_{N-1}, \dots, Z_1 = i_1, Z_0 = i_0) \\ &= P(Z_{N+1} = j \mid Z_N = i) \\ &= p_{ij}, \forall i_0, i_1, \dots, i_{N-1} \in S, N \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Ou seja, a probabilidade do estado vir a tomar certo valor no instante futuro ($N + 1$) — condicionalmente à informação sobre o estado no instante presente N e os estados nos instantes passados $N - 1, \dots, 0$ — depende exclusivamente do estado presente. À matriz $[p_{ij}]_{i,j \in S}$ dá-se o nome de matriz de probabilidades de transição (entre estados e a um passo). Note-se ainda que $p_{ij} = P(\text{transição do estado } i \rightarrow \text{estado } j)$ e $\sum_{j \in S} p_{ij} = \text{soma da linha } i = 1$.

³O espaço de estados seria contínuo para dados contínuos.

Esta abordagem, originalmente proposta por Brook e Evans (1972), permite determinar a **distribuição exacta** (ou aproximada) do número de amostras recolhidas até à emissão de sinal, **RL**, e consequentemente qualquer outra característica que diga respeito a *RL* como é o caso de **ARL**.

Exemplo 10.9 / Exercício — Considere um esquema *CUSUM* unilateral superior para dados binomiais cuja estatística é

$$Z_N \equiv Z_N(\theta) = \begin{cases} u, & N = 0 \\ \max\{0, Z_{N-1}(\theta) + [Y_N(\theta) - k]\}, & N \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10.4)$$

Caso k seja um inteiro positivo e u um inteiros não negativo, a estatística é regida por uma cadeia de Markov em tempo discreto com espaço de estados \mathbb{N}_0 , estado inicial u e **matriz de probabilidades de transição, dependente da magnitude do shift θ**

$$\tilde{\mathbf{P}}(\theta) = \begin{bmatrix} F_\theta(k) & P_\theta(k+1) & P_\theta(k+2) & \cdots \\ F_\theta(k-1) & P_\theta(k) & P_\theta(k+1) & \cdots \\ F_\theta(k-2) & P_\theta(k-1) & P_\theta(k) & \cdots \\ F_\theta(k-3) & P_\theta(k-2) & P_\theta(k-1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

onde $F_\theta(i) = F_{\text{binomial}(n, p_0 + \theta)}(i)$ e $P_\theta(i) = P_{\text{binomial}(n, p_0 + \theta)}(i)$ representam a função de distribuição e a função de probabilidade de $Y_N = Y_N(\theta)$ para qualquer inteiro não negativo i . (Justifique!)

Assuma agora que se emite um sinal assim que a estatística exceda o limite superior de controlo $UCL = x$, onde x é um inteiro positivo. Nestas circunstâncias, o **run length** deste esquema **CUSUM unilateral superior** pode ser representado pelo seguinte **tempo de primeira passagem**:

$$RL^u(\theta) = \min\{N : Z_N(\theta) > UCL = x \mid Z_0(\theta) = u\}. \quad (10.6)$$

De facto o *run length* tem exactamente a mesma distribuição que certo tempo de primeira passagem da seguinte cadeia de Markov absorvente em tempo discreto $\{S_N(\theta), N \in \mathbb{N}_0\}$, onde: $S_0(\theta) = Z_0(\theta) = u$; e, para $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N(\theta) = \begin{cases} Z_N(\theta), & \text{se } Z_N(\theta) \leq x \text{ e } S_{N-1}(\theta) \leq x \\ x + 1, & \text{c.c..} \end{cases} \quad (10.7)$$

Esta cadeia de Markov possui espaço de estados finito $\{0, 1, \dots, x + 1\}$ e estado absorvente $x + 1$. Para além disso, as suas transições são regidas pela matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}(\theta)$ dada por

$$\begin{bmatrix} F_\theta(k) & P_\theta(k+1) & P_\theta(k+2) & \cdots & P_\theta(k+x) & 1 - F_\theta(k+x) \\ F_\theta(k-1) & P_\theta(k) & P_\theta(k+1) & \cdots & P_\theta(k+x-1) & 1 - F_\theta(k+x-1) \\ F_\theta(k-2) & P_\theta(k-1) & P_\theta(k) & \cdots & P_\theta(k+x-2) & 1 - F_\theta(k+x-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_\theta(k-x) & P_\theta(k-x+1) & P_\theta(k-x+2) & \cdots & P_\theta(k) & 1 - F_\theta(k) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

Com efeito,

$$RL^u(\theta) =_{st} \min\{N : S_N(\theta) = x + 1 \mid S_0(\theta) = u\}. \quad (10.9)$$

Exercício 10.10 — Obtenha a matriz de probabilidades de transição associada a uma carta *CUSUM* padrão para dados binomiais com limites de controlo e valor de referência inteiros, $LCL = 2$, $UCL = 10$ e $np_0 = 6$, respectivamente e $Y_N \sim \text{binomial}(10, 0.5)$. •

Tal como se constatou no exemplo anterior lidaremos com uma cadeia de Markov absorvente em tempo discreto e com espaço de estados finito $\{0, 1, \dots, x + 1\}$, estado absorvente $x + 1$, estados

transeuntes $0, 1, \dots, x$ e matriz de probabilidades de transição, passível da seguinte representação:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\theta) & [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)] \mathbf{1} \\ \underline{\mathbf{0}}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

onde:

- $\mathbf{Q}(\theta) = [p_{ij}(\theta)]_{i,j=0}^x$, i.e., esta matriz $(x+1) \times (x+1)$ é obtida a partir da matriz $\tilde{\mathbf{P}}(\theta)$ por eliminação da última linha e da última coluna; esta matriz rege as transições entre os estados transeuntes da cadeia;
- $\mathbf{1}$ ($\underline{\mathbf{0}}^\top$) é um vector-coluna (vector-linha) com $x+1$ uns (zeros); e
- \mathbf{I} é a matriz identidade com característica $x+1$.

Exercício 10.11 — Considere agora que os dados possuem distribuição fora de controlo de *Poisson*(0.04), i.e., o número de defeitos em amostras aleatórias de dimensão 80 possuem distribuição de *Poisson*(3.2).

Prove que a carta *CUSUM* unilateral superior com valor de referência $k = 2$ e limite superior de controlo $UCL = 2$ está associada à matriz \mathbf{Q} :

$$\begin{bmatrix} 0.3799 & 0.2226 & 0.1781 \\ 0.1712 & 0.2087 & 0.2226 \\ 0.0408 & 0.1304 & 0.2087 \end{bmatrix}. \quad (10.11)$$

Tal como se viu no Exemplo 10.9, o **RL** do esquema de controlo *CUSUM* está relacionado com o **número de transições até absorção** da cadeia de Markov $\{S_N(\theta), N \geq 0\}$ descrita anteriormente.

Proposição 10.12 — Seja $RL^u(\theta)$ o *RL* de um esquema *CUSUM* cuja estatística toma valor inicial u , $u \in \{0, 1, \dots, x\}$. Então $RL^u(\theta)$ é uma v.a. inteira positiva com função de probabilidade dada por:

$$P_{RL^u(\theta)}(m) = \underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{Q}(\theta)]^{m-1} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)] \mathbf{1}, \quad m \in \mathcal{N}, \quad (10.12)$$

onde $\underline{\mathbf{e}}_u$ representa o $(u+1)$ -ésimo vector da base ortonormada de \mathbb{R}^{x+1} .

Nota 10.13 — A distribuição de $RL^u(\theta)$ é designada na literatura de **discrete phase-type distribution**.

Tabela 10.3: Algumas propriedades de $RL^u(\theta)$.

F.p.	$P_{RL^u(\theta)}(m) = \underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{Q}(\theta)]^{m-1} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)] \mathbf{1}, \quad m \in \mathcal{N}$
F.s.	$\bar{F}_{RL^u(\theta)}(m) = \begin{cases} 1, & m < 1 \\ \underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{Q}(\theta)]^{m-1} \mathbf{1}, & m \geq 1 \end{cases}$
F. taxa de falha	$\lambda_{RL^u(\theta)}(m) = 1 - \frac{\underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{Q}(\theta)]^m \mathbf{1}}{\underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{Q}(\theta)]^{m-1} \mathbf{1}}, \quad m \in \mathcal{N}$
Quantil de ordem p	$F_{RL^u(\theta)}^{-1}(p) = \inf\{m \in \mathcal{N} : F_{RL^u(\theta)}(m) \geq p\}, \quad 0 < p < 1$
F.g.p.	$PG_{RL^u(\theta)}(z) = z \times \underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{I} - z\mathbf{Q}(\theta)]^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)] \mathbf{1}, \quad 0 \leq z \leq 1$
Momento fact. ordem s	$FM_{RL^u(\theta)}(s) = s! \times \underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{Q}(\theta)]^{s-1} [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)]^{-s} \mathbf{1}, \quad s \in \mathcal{N}$
Valor esperado	$E[RL^u(\theta)] = \underline{\mathbf{e}}_u^\top [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)]^{-1} \mathbf{1}$

Para referência futura listamos na Tabela 10.3 algumas características de $RL^u(\theta)$. De notar que:

- $\bar{F}_{RL^u(\theta)}(m)$ representa a **probabilidade de se emitir um sinal após a recolha de mais de m amostras**;
- $\lambda_{RL^u(\theta)}(m)$ representa a **probabilidade da amostra m emitir um sinal, dado que as $m-1$ amostras anteriores não**

foram responsáveis por qualquer sinal, e pode ser entendida como uma “taxa de alarme” do esquema aquando da recolha da amostra m . •

Há algumas semelhanças entre estas características de $RL^u(\theta)$ e as do *run length* de uma carta *Shewhart*; para todos os efeitos $\mathbf{Q}(\theta)$ pode ser pensada como o análogo matricial de $1 - \xi(\theta)$.

Esta analogia era de certo modo de esperar pois as **discrete phase-type distributions** correspondem a uma generalização matricial da distribuição geométrica.

Tabela 10.4: Esquemas *Shewhart* vs. *CUSUM*

Shewhart	CUSUM
Estatísticas i.i.d.	Estatísticas regidas por Cadeia de Markov
$RL(\theta) =_{st}$ Geométrica ($\xi(\theta)$)	$RL^u(\theta) =_{st}$ Phase-type ($\mathbf{e}_u, \mathbf{Q}(\theta)$) $u =$ estado inicial
$1 - \xi(\theta) = P_\theta(T_N \in [LCL, UCL])$	$\mathbf{Q}(\theta)$ matriz sub-estocástica
Detecção lenta de desvios <i>pequenos ou moderados</i>	Detecção eficiente de desvios <i>pequenos ou moderados</i>

As distribuições **phase-type** são computacionalmente muito apelativas, como se pode constatar após a consulta da Tabela 10.3. Primeiro, porque as propriedades de $RL^u(\theta)$ expressam-se à custa de somente dois parâmetros (\mathbf{e}_u e $\mathbf{Q}(\theta)$). Segundo, porque a obtenção das propriedades de $RL^u(\theta)$ envolve operações triviais tais como:

- a multiplicação de matrizes (para obter, por exemplo, a f.p. e a f.s);
- a inversão de matrizes (para calcular momentos factoriais e *ARL*).

Por último, porque algumas destas propriedades podem ser calculadas de modo recursivo, como ilustram Champ e Rigdon (1991):

$$\begin{aligned} P_{\underline{RL}(\theta)}(m) &= [P[RL^u(\theta) = m]]_{u=0,\dots,x} \\ &= \mathbf{Q}(\theta) \times P_{\underline{RL}(\theta)}(m-1). \end{aligned} \quad (10.13)$$

No planeamento de um esquema de controlo é necessário estabelecer um compromisso entre um **RL grande sob controlo** e um **RL pequeno fora de controlo**, por forma a garantir falsos alarmes pouco frequentes e uma detecção rápida de uma alteração específica no parâmetro que se pretende controlar.

Tendo presente este compromisso, Gan (1993) sugere, por exemplo, que o valor de referência de um esquema *CUSUM* unilateral superior para dados binomiais seja seleccionado o mais próximo de

$$n \times \frac{\ln[(1-p_0)/(1-p_1)]}{\ln[(1-p_0)p_1/(1-p_1)p_0]}. \quad (10.14)$$

Recorde-se que np_0 é o valor esperado nominal do número de defeituosos por amostra aleatória de dimensão n , e np_1 denota o correspondente valor fora de controlo que se pretende detectar com a maior brevidade. Gan (1993) alega que resultados numéricos sugerem que o valor de referência em (10.14) conduz a esquemas *CUSUM* unilaterais superiores óptimos para dados binomiais — óptimos, em termos de *ARL* — na detecção de um aumento em p com magnitude $p_1 - p_0$.

Exemplo 10.14 — Considere um esquema *CUSUM* unilateral superior sem *head start* (i.e. $u = 0$) com $np_0 = 100 \times 0.02 = 2$, valor de referência $k = 3$ — que corresponde a $np_1 = 4.27685$ de acordo com a Equação (10.14) — e $UCL = x = 6$. Neste caso, o *RL*

sob controlo, $RL^0(0)$ possui distribuição *phase-type* discreta definida por $(\underline{e}_0, \mathbf{Q}(0))$, onde, recorrendo à Equação (10.8),

$$\mathbf{Q}(0) = \begin{bmatrix} 0.8590 & 0.0902 & 0.0353 & 0.0114 & 0.0031 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.6767 & 0.1823 & 0.0902 & 0.0353 & 0.0114 & 0.0031 & 0.0007 \\ 0.4033 & 0.2734 & 0.1823 & 0.0902 & 0.0353 & 0.0114 & 0.0031 \\ 0.1326 & 0.2707 & 0.2734 & 0.1823 & 0.0902 & 0.0353 & 0.0114 \\ 0 & 0.1326 & 0.2707 & 0.2734 & 0.1823 & 0.0902 & 0.0353 \\ 0 & 0 & 0.1326 & 0.2707 & 0.2734 & 0.1823 & 0.0902 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1326 & 0.2707 & 0.2734 & 0.1823 \end{bmatrix}. \quad (10.15)$$

O conjunto de parâmetros da carta conduz a *ARLs* para os valores nominais e fora de controlo de np , np_0 e np_1 , iguais a $ARL^0(0) = 1015.71$ — próximo do *ARL* sob controlo do esquema— np do Exemplo 9.8, 1073.03 — e $ARL^0(p_1 - p_0) = 5.932$, como reporta a Tabela 10.5.

Esta tabela descreve o comportamento de $RL^0(\theta)$, através da inclusão de várias medidas de *RL*, para $\theta = 0, 0.001, 0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.02, p_1 - p_0, 0.03$.

Ilustra também quão **pouco fiável** é **ARL** como medida de desempenho do esquema quando o processo está sob controlo; por exemplo, a probabilidade de um sinal ser emitido entre as primeiras 295 amostras é de pelo menos 0.25, apesar de o *ARL* sob controlo exceder 1015 amostras. Para além disso, na ausência de *shift* em p , o desvio-padrão *SDRL* é de cerca de 1000 amostras, logo é possível registar observações para além dos limites de controlo muito mais cedo ou muito mais tarde do que o esperado; $ARL^0(0) = 1015.71$ amostras.

De acrescentar que $RL^0(\theta)$ possui **assimetria positiva** e achatamento mais acentuado que $RL(\theta)$, *run length* do esquema— np unilateral superior.

Para além disso, a substituição do esquema esquema— np unilateral superior pelo esquema *CUSUM* unilateral superior resulta numa

Tabela 10.5: Alguns quantis do *RL* e valores de *ARL*, *SDRL*, *CVRL*, *CSRL* e *CKRL* para os esquemas unilaterais superiores *CUSUM* e np ($n = 100, p_0 = 0.02, p_1 = 0.0427685$).

Esquema <i>CUSUM</i> unilateral superior para dados binomiais									
<i>RL</i> perc. points	$\theta = p - p_0$								
	0	0.001	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.02	$p_1 - p_0$	0.03
5%	55	34	18	9	6	4	2	2	2
25%	295	173	85	32	16	10	4	4	3
Median	705	411	198	72	33	19	6	5	4
75%	1407	819	392	140	63	34	9	7	5
90%	2334	1358	649	230	101	53	13	10	7
95%	3036	1765	843	297	130	68	16	12	8
<i>ARL</i>	1015.71	591.724	284.121	102.081	46.227	25.458	7.194	5.932	4.095
<i>SDRL</i>	1012.18	588.012	280.175	97.895	42.022	21.419	4.320	3.322	1.998
<i>CVRL</i>	0.997	0.994	0.986	0.959	0.909	0.841	0.600	0.560	0.488
<i>CSRL</i>	2.000	2.000	2.000	1.998	1.989	1.961	1.627	1.523	1.303
<i>CKRL</i>	6.000	6.000	5.999	5.992	5.953	5.833	4.296	3.814	2.853
Esquema— np unilateral superior									
<i>RL</i> perc. points	$\theta = p - p_0$								
	0	0.001	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.02	$p_1 - p_0$	0.03
5%	56	41	27	14	8	5	2	1	1
25%	309	227	148	78	45	27	6	5	3
Median	744	546	355	187	107	65	15	11	6
75%	1487	1092	710	374	214	130	29	21	11
90%	2470	1813	1179	621	355	216	48	35	17
95%	3214	2359	1534	808	461	281	62	45	22
<i>ARL</i>	1073.030	787.737	512.346	270.112	154.275	94.128	21.047	15.369	7.815
<i>SDRL</i>	1072.530	787.237	511.846	269.611	153.774	93.627	20.541	14.861	7.298
<i>CVRL</i>	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.976	0.967	0.934
<i>CSRL</i>	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.001	2.001	2.005
<i>CKRL</i>	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.000	6.002	6.005	6.019

redução quer em *ARL* quer em *SDRL* e na maior parte dos quantis, tal como ilustra a Tabela 10.5. ●

Nota 10.15 — Caso a estatística tome valores fraccionários ao invés de inteiros pode também aplicar-se a abordagem markoviana após ser ter coberto todos os valores possíveis da mesma por um rescalamento conveniente, tal como sugerem Brook e Evans (1972) e Lucas (1985) e Gan (1993). •

Exercício 10.16 — Elabore um programa no *package Mathematica* que permita obter um gráfico com as curvas de *ARL* para as cartas unilaterais superiores para dados binomiais, descritas no Exemplo 10.14. •

Exercício 10.17 — Construa um esquema *CUSUM* padrão para o controlo do valor esperado de uma característica de qualidade com distribuição normal, neste caso as medidas referentes às três últimas casas decimais do diâmetro dos suportes descritos no Exercício 9.26.

Considere a estatística

$$Z_N = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ Z_{N-1} + \frac{\bar{X}_N - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}, & N = 1, 2, \dots \end{cases}$$

e assumo que: o valor alvo para o valor esperado é igual a $\mu_0 = 32.5$; a variância é conhecida e igual $\sigma_0^2 = 49$; $LCL = -h$; $UCL = h$; e $h = 22.7610$ que assegura um *ARL* sob controlo de 500 amostras.

- Será que o processo está sob controlo?
- Como poderia obter o desempenho deste esquema de controlo? •

Para mais detalhes acerca de cartas *CUSUM* para variáveis é favor consultar Montgomery (1985, pp. 221-239).

Textos de apoio: Hawkins e Olwell (1998, pp. 105–133); Morais (2001, pp. 23–29).

10.4 Esquemas EWMA para variáveis

10.4.1 Esquema EWMA padrão para μ

À semelhança dos esquemas *CUSUM*, os esquemas do tipo *EWMA* (exponentially weighted moving average) garantem em média uma detecção mais rápida de *shifts* de pequena e média magnitude, por fazerem uso de uma estatística que tira partido não só da informação mais recente como passada do processo de produção.

Definição 10.18 — O esquema **EWMA padrão** — para o **valor esperado** de uma **característica de qualidade normalmente distribuída** com variância constante, conhecida e igual a σ_0^2 — possui estatística dada por

$$W_N = \begin{cases} w_0, & N = 0 \\ (1 - \lambda) \times W_{N-1} + \lambda \times \bar{X}_N, & N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (10.16)$$

onde:

- w_0 é o **valor inicial** atribuído à estatística, usualmente igual ao alvo da carta, i.e., $w_0 = \mu_0$;
- $\lambda \in (0, 1]$ é uma **constante de amortecimento**; e
- $\bar{X}_N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{iN}$ a **média** da N -ésima amostra aleatória e n a respectiva dimensão. •

Equivalentemente e considerando agora as médias reduzidas, pode adoptar-se também a seguinte estatística para o esquema *EWMA*:

$$W_N^* = \begin{cases} w_0, & N = 0 \\ (1 - \lambda) \times W_{N-1}^* + \lambda \times \frac{\bar{X}_N - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}, & N \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10.17)$$

Contudo deixa de se lidar com um estimador de μ .

A selecção de λ será discutida mais tarde. Pode, no entanto, adiantar-se que a sua selecção dependerá do desempenho que se pretende para o esquemas sob e fora de controlo.

Nota 10.19 — A informação mais recente acerca do processo está condensada em \bar{X}_N e tem associado o peso λ , $\lambda \in (0, 1]$. A história passada do processo é representada na estatística por W_{N-1} e possui um peso associado igual a $(1 - \lambda)$. A estatística em (10.16) não só tem um carácter recursivo,

$$W_N = f(W_{N-1}, \lambda), \quad (10.18)$$

como pode escrever-se alternativamente do seguinte modo:

$$W_N = (1 - \lambda)^N w_0 + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda (1 - \lambda)^j \bar{X}_{N-j} \quad (10.19)$$

Esta fórmula permite-nos concluir que o peso atribuído à média \bar{X}_{N-j} decresce à medida que j aumenta, em particular, a importância da informação decresce geometricamente (exponencialmente) com a respectiva idade. Daí a designação do esquema de **exponentially weighted moving average**. •

Exercício 10.20 — Demonstre o resultado (10.19). Com base neste resultado e considerando para o efeito que a dimensão das amostras é igual a n :

- a) Obtenha o valor esperado sob controlo da estatística e averigue em que situações se trata de estimador centrado de μ .
- b) Calcule a variância sob controlo de W_N bem como o seu valor assintótico, $\sigma_a^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} V(W_N)$. •

Exercício 10.21 — Compare os pesos atribuídos a observações com idades 1 a 10 pelas cartas *EWMA* padrão com $\lambda = 0.05, 0.1, 1$. •

Definição 10.22 — Ao recorrer-se ao esquema **EWMA padrão** descrito na Definição 10.29 podem usar-se de dois **tipos de limites de controlo**:

- **limites de controlo exactos**, calculados com base em momentos sob controlo de W_N ($\delta = 0$) e considerando $w_0 = \mu_0$,

$$\begin{aligned} LCL_N &= E(W_N) - \gamma \sqrt{V(W_N)} \\ &= \mu_0 - \gamma \sqrt{\frac{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2N}] \sigma_0^2}{(2 - \lambda) n}} \end{aligned} \quad (10.20)$$

$$\begin{aligned} UCL_N &= E(W_N) + \gamma \sqrt{V(W_N)} \\ &= \mu_0 + \gamma \sqrt{\frac{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2N}] \sigma_0^2}{(2 - \lambda) n}} \end{aligned} \quad (10.21)$$

onde γ é uma constante real positiva que, cuja selecção é feita a par da de λ , tendo sempre em vista o desempenho que se pretende para carta sob e fora de controlo;

- **limites de controlo assintóticos**, calculados também com base em momentos sob controlo de W_N , $w_0 = \mu_0$ e considerando $N \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} LCL_a &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [E(W_N) - \gamma \sqrt{V(W_N)}] \\ &= \mu_0 - \gamma \sqrt{\frac{\lambda \sigma_0^2}{(2 - \lambda) n}} \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} UCL_a &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [E(W_N) + \gamma \sqrt{V(W_N)}] \\ &= \mu_0 + \gamma \sqrt{\frac{\lambda \sigma_0^2}{(2 - \lambda) n}}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Nota 10.23 — Com o objectivo de tornar menos complexa a determinação do desempenho do esquema e de evitar cálculos sucessivos dos limites de controlo (e deste modo aligeirar a manipulação da carta) é costume substituir os limites de controlo exactos pelos limites de controlo assintóticos. •

Exercício 10.24 — Elabore um gráfico com os limites de controlo exactos e assintóticos admitindo que $\gamma = 3$, $w_0 = \mu_0 = 0$, $\lambda = 0.05$, $\sigma_0 = 1$, $n = 9$ e $N = 1, \dots, 10$.

Repita o gráfico considerando desta feita $\lambda = 0.25, 0.5$. Compare e comente os gráficos obtidos. •

Atente-se que, ao utilizar o esquema com limites de controlo assintóticos, se corre maior risco de não emitir sinal válido às primeiras amostras e ser-se levado a crer que o processo está sob controlo quando efectivamente está fora de controlo.

Há pois uma perda de sensibilidade do esquema no início do processo. Este problema é agravado quando λ toma valores próximos de 0 pois nestes casos $V(W_N)$ converge mais lentamente para o seu valor limite.

Por forma a minimizar as consequências da utilização dos limites assintóticos na fase inicial do processo é costume adoptar os limites de controlo exactos para as primeiras 8 a 10 observações e recorrer aos limites de controlo assintóticos para as seguintes observações.

Exercício 10.25 — Pretende controlar-se o processo de enchimento de saquetas de produto químico que conduziu ao conjunto de resultados (em gramas) da Tabela 10.6.

a) Obtenha os valores da estatística de um esquema *EWMA* padrão

para o controlo do valor esperado do peso de cada saqueta, considerando $\mu_0 = 10.0$, $w_0 = \mu_0$, $\lambda = 0.2$, $\sigma/\sqrt{n} = 2$ e $\gamma = 3$.

Tabela 10.6: Pesos médios de saquetas de produto químico.

Amostra	Média	Amostra	Média	Amostra	Média
1	10.5	11	9.5	21	12.0
2	6.0	12	12.0	22	6.0
3	10.0	13	12.5	23	12.0
4	11.0	14	10.5	24	15.0
5	12.5	15	8.0	25	11.0
6	9.5	16	9.5	26	7.0
7	6.0	17	7.0	27	9.5
8	10.0	18	10.0	28	10.0
9	10.5	19	13.0	29	12.0
10	14.5	20	9.0	30	18.0

b) Após ter elaborado um gráfico com os limites de controlo exactos (e a seguir com os assintóticos) **averigúe** se haverá alguma observação **para além dos limites de controlo**. •

Exercício 10.26 — Uma máquina é utilizada no enchimento de latas de óleo para motor de carro. Foram recolhidas amostras de $n = 4$ latas da produção, de meia em meia hora, tendo-se obtido os pesos médios (em onças) da Tabela 10.7.

Uma vez que o processo de enchimento foi há muito automatizado o desvio-padrão do mesmo já se estabilizou e a experiência aponta para um valor de $\sigma_0 = 0.1$.

a) Construa um esquema *EWMA* sem *head start* (i.e. tal que $w_0 = \mu_0$) e $\gamma = 3$, $\mu_0 = 8.00$ e $\lambda = 0.05$.

b) O que poderá dizer acerca do estado do processo de produção considerando limites de controlo exactos. E considerando limites

de controlo assintóticos?

Tabela 10.7: Pesos médios de latas de óleo para motor de carro.

Amostra	Média	Amostra	Média
1	8.00	9	8.05
2	8.01	10	8.04
3	8.02	11	8.03
4	8.01	12	8.05
5	8.00	13	8.06
6	8.01	14	8.04
7	8.06	15	8.05
8	8.07	16	8.06

10.4.2 Esquema EWMA unilateral superior para σ^2

O controlo de aumentos da variância de uma característica de qualidade pode fazer-se também à custa de um esquema *EWMA* unilateral superior.

Posto isto, a substituição de \bar{X}_N pelo estimador centrado da variância σ^2 , S_N^2 , parece um passo natural para a obtenção de uma estatística do tipo *EWMA* para σ^2 . No entanto, essa substituição é descabida já que as cartas de controlo do tipo *EWMA* se propõem a detectar alterações no valor esperado e não em parâmetros de escala ou suas funções como é o caso de σ^2 .

Crowder e Hamilton (1992) contornaram este problema do seguinte modo: em vez de substituírem \bar{X}_N na expressão

$$W_N = (1 - \lambda)W_{N-1} + \lambda\bar{X}_N \quad (10.24)$$

pelo estimador centrado de σ^2 , substituíram-no por $\ln(S_N^2)$, logaritmo da variância corrigida da N -ésima amostra aleatória.

A escolha desta função específica de S_N^2 tem a sua razão de ser: um aumento em σ^2 provoca um aumento no valor esperado de $\ln(S_N^2)$, $\ln(\sigma^2) + \ln(2) - \ln(n - 1) + \psi[(n - 1)/2]$, **mas não** na variância de $\ln(S_N^2)$, $\psi'[(n - 1)/2]$, onde ψ e ψ' representam as funções digama e trigama.

Nota 10.27 — Recorde-se que a função gama é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0. \quad (10.25)$$

Por seu lado as funções digama e trigama são definidas do seguinte modo

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} \quad (10.26)$$

$$\psi'(z) = \frac{d^2 \ln \Gamma(z)}{dz^2}, \quad (10.27)$$

respectivamente (Abramovitz e Stegun (1964, pp.255 e 260)), tratando-se, portanto, de casos particulares da função poligama

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n \ln \Gamma(z)}{dz^n} \quad (10.28)$$

para $n = 0, 1$. Para além disso estas duas funções estão definidas no *package Mathematica* (Polygamma[. . .]).

A função digama é, para valores inteiros positivos e segundo a fórmula 6.3.2 e a fórmula de recorrência 6.3.5 da p. 258 de Abramovitz e Stegun (1964), igual a:

$$\psi(n + 1) = \begin{cases} -\gamma, & n = 0 \\ \psi(n) + 1/n, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (10.29)$$

onde γ representa a constante de Euler

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} - \ln(m) \right] \\ &= 0.5772156649 \end{aligned} \quad (10.30)$$

(Abramovitz e Stegun (1964, p. 255)).

Refira-se também que, tendo em conta o valor de $\psi'(1)$ na tabela 6.1 da p. 267 de Abramovitz e Stegun (1964) e a fórmula de recorrência 6.4.6 da p. 260 dessa mesma referência, a função trigama para valores inteiros positivos pode escrever-se recursivamente do seguinte modo:

$$\psi'(n+1) = \begin{cases} 1.6449340668, & n = 0 \\ \psi'(n) - 1/n^2, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (10.31)$$

Exercício 10.28 — Tirando partido do facto de a variância corrigida de uma amostra aleatória proveniente de uma população normal verificar $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$ (i.e., S^2 tem distribuição *gama* com parâmetro de forma e de escala iguais a $(n-1)/2$ e $2\sigma^2/(n-1)$) e que $\ln(S^2)$ tem distribuição *log-gama*, demonstre que:

$$E[\ln(S_N^2)] = \ln(\sigma^2) + \ln(2) - \ln(n-1) + \psi[(n-1)/2]; \quad (10.32)$$

$$V[\ln(S_N^2)] = \psi'[(n-1)/2]. \quad (10.33)$$

Definição 10.29 — A carta **EWMA unilateral superior** — para a **variância** de uma **característica de qualidade normalmente distribuída** — faz uso da estatística

$$V_N = \begin{cases} v_0, & N = 0 \\ \max\{\ln(\sigma_0^2), (1-\lambda) \times V_{N-1} + \lambda \times \ln(S_N^2)\}, & N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (10.34)$$

onde, convenhamos, só vale a pena mencionar que:

- v_0 é o valor inicial atribuído à estatística, usualmente igual a $v_0 = \ln(\sigma_0^2)$;
- $S_N^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{iN} - \bar{X})^2$ a variância corrigida da N -ésima amostra aleatória.

Por seu lado esta carta possui limites de controlo assintóticos iguais a

$$LCL_a = \ln(\sigma_0^2) \quad (10.35)$$

$$UCL_a = \ln(\sigma_0^2) + \gamma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \psi'[(n-1)/2] \quad (10.36)$$

Exercício 10.30 — A temperatura de um reagente químico é uma factor crucial para a obtenção de resultados satisfatórios um processo químico. O valor nominal para a média e o desvio-padrão da temperatura do reagente químico são $\mu_0 = 100^\circ C$ e $\sigma_0 = 1^\circ C$, respectivamente.

Tabela 10.8: Temperaturas de reagente químico.

N	x_{1N}	x_{2N}	x_{3N}	x_{4N}	x_{5N}	s_N^2	v_N
1	99.3	99.7	100.0	100.2	99.6	0.123	
2	98.2	101.1	100.3	100.3	98.0	1.937	
3	97.3	100.2	101.0	99.7	100.2	1.987	
4	97.9	100.5	97.9	101.0	98.4	2.233	
5	101.1	98.7	99.9	101.5	97.8	2.450	
6	101.1	98.4	97.9	100.4	100.1	1.867	
7	102.4	99.8	99.7	101.3	100.0	1.383	
8	100.7	98.6	99.4	101.2	100.0	1.062	
9	98.0	100.4	101.0	100.4	101.8	2.012	
10	100.4	101.4	99.7	100.2	101.8	0.760	

Foram registados grupos de cinco observações da temperatura do reagente químico de hora a hora, durante um período de dez horas, com a particularidade de o desvio-padrão do processo tomar valor distinto do seu alvo e igual a $\sigma = 1.1^\circ C$. As temperaturas encontram-se na Tabela 10.8, a par dos valores observados da variância amostral corrigida.

- a) Preencha a Tabela 10.8 com os valores observados da estatística *EWMA* sem *head start* e considerando $\lambda = 0.05$ e $v_0 = \ln(\sigma_0^2)$.
- b) Obtenha os limites de controlo da carta na situação em que $\gamma = 1.2215$ e identifique a amostra responsável pelo primeiro sinal válido.
- c) Determine agora os limites de controlo de uma carta *Shewhart* unilateral superior para σ^2 , com $\alpha = \frac{1}{370.414}$.
- Serão as amostras responsáveis por algum sinal válido? •

- b) Obtenha os limites de controlo de ambas as cartas na situação em que $\gamma_\mu = 3$ e $\gamma_\sigma = 1.25$.
- c) Terá sido alguma amostra responsável por um sinal? •

Textos de apoio: Montgomery (1985, pp.239–243); Crowder e Hamilton (1992).

Exercício 10.31 — O diâmetro é uma característica importante de uma fibra têxtil. Foram recolhidas vinte amostras com dimensão igual a $n = 10$ tendo-se obtido o conjunto de médias e variâncias corrigidas amostrais da Tabela 10.9 (Montgomery (1985, pp. 251–252)).

Tabela 10.9: Médias e variâncias corrigidas do diâmetro de fibra têxtil.

N	\bar{x}_N	s_N^2	w_N	v_N	N	\bar{x}_N	s_N^2	w_N	v_N
1	1.04	0.87			11	0.99	0.79		
2	1.06	0.85			12	1.06	0.82		
3	1.09	0.90			13	1.05	0.75		
4	1.05	0.85			14	1.07	0.76		
5	1.07	0.73			15	1.11	0.89		
6	1.06	0.80			16	1.04	0.91		
7	1.05	0.78			17	1.03	0.85		
8	1.10	0.83			18	1.05	0.83		
9	1.09	0.87			19	1.06	0.79		
10	1.05	0.86			20	1.04	0.85		

- a) Preencha a Tabela 10.9 com os valores observados da estatística *EWMA* padrão sem *head start* para μ e da estatística *EWMA* unilateral superior também sem *head start* para σ^2 , admitindo que $\lambda_\mu = \lambda_\sigma = 0.05$, $w_0 = 1.06$ e $v_0 = \ln(0.83)$.

10.5 Desempenho de esquemas individuais EWMA para variáveis

Sem perda de generalidade considerem-se cartas **EWMA** unilaterais superiores **individuais** para μ e σ^2 descritos a seguir e que privilegiam a **detecção de aumentos** em μ e na variância de

Característica de qualidade = _{st} $Normal(\mu, \sigma^2)$	
Sob controlo	Fora de controlo
$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0 + \delta \times \sigma_0 / \sqrt{n}, \delta > 0$
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma = \theta \times \sigma_0, \theta > 1$

e que fazem uso das seguintes estatísticas sumárias e dos seguintes pares de limites de controlo:

Tabela 10.10: Caracterização dos esquemas individuais

Esquema	Estatística no instante de inspeção N	Limites de controlo
$E^+ - \mu$	$W_{\mu,N}^+ = \begin{cases} w_{\mu,0}^+, N = 0 \\ \max \left\{ 0, (1 - \lambda_\mu^+) \times W_{\mu,N-1}^+ + \lambda_\mu^+ \times \frac{\bar{X}_N - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right\}, N > 0 \end{cases}$	$C_{E^+ - \mu} = [LCL_{E^+ - \mu}, UCL_{E^+ - \mu}] = \left[0, \gamma_\mu^+ \times \sqrt{\lambda_\mu^+ / (2 - \lambda_\mu^+)} \right]$
$E^+ - \sigma$	$W_{\sigma,N}^+ = \begin{cases} w_{\sigma,0}^+, N = 0 \\ \max \left\{ \ln(\sigma_0^2), (1 - \lambda_\sigma^+) \times W_{\sigma,N-1}^+ + \lambda_\sigma^+ \times \ln(S_N^2) \right\}, N > 0 \end{cases}$	$C_{E^+ - \sigma} = [LCL_{E^+ - \sigma}, UCL_{E^+ - \sigma}] = \left[\ln(\sigma_0^2), \ln(\sigma_0^2) + \gamma_\sigma^+ \times \sqrt{\psi' \left(\frac{n-1}{2} \right) \times \frac{\lambda_\sigma^+}{2 - \lambda_\sigma^+}} \right]$

onde os valores iniciais das estatísticas sumárias são iguais a:

$$w_{\mu,0}^+ = \alpha \times (UCL_{E^+ - \mu} - LCL_{E^+ - \mu}), \alpha \in [0, 1] \quad (10.37)$$

$$w_{\sigma,0}^+ = \ln(\sigma_0^2) + \beta \times (UCL_{E^+ - \sigma} - LCL_{E^+ - \sigma}), \beta \in [0, 1]. \quad (10.38)$$

Caso $\alpha > 0$ ($\beta > 0$) afirma-se que foi dado um *head start* de $\alpha \times 100\%$ ($\beta \times 100\%$).

Seja $RL_{E^+ - \mu}^\alpha(\delta, \theta)$ ($RL_{E^+ - \sigma}^\beta(\theta)$) o número de amostras recolhidas até sinal da **carta EWMA unilateral superior** para μ (σ^2) quando é dado *head starts* de $\alpha \times 100\%$ ($\beta \times 100\%$) e a magnitude do *shift* é igual a δ (θ).

A **abordagem markoviana** fornece aproximação das características de $RL_{E^+ - \mu}^\alpha(\delta, \theta)$ e de $RL_{E^+ - \sigma}^\beta(\theta)$. Por exemplo, para o caso do esquema para μ é necessário:

- dividir o intervalo $[LCL_{E^+ - \mu}, UCL_{E^+ - \mu}]$ em $x_\mu^+ + 1$ sub-intervalos com amplitude Δ_μ , $E_i = [e_{\mu, i}, e_{\mu, i+1}), i = 0, \dots, x_\mu^+$;
- associar estes sub-intervalos aos estados transeuntes $\{0, 1, \dots, x_\mu^+\}$ de uma cadeia de Markov absorvente com espaço de estados discreto $\{0, 1, \dots, x_\mu^+ + 1\}$;
- aproximar $RL_{E^+ - \mu}^\alpha(\delta, \theta)$ pelo tempo até absorção da cadeia de Markov.

Procede-se do mesmo modo para obter as características de $RL_{E^+ - \sigma}^\beta(\theta)$. Assim, o **número esperado de amostras recolhidas até sinal** e a **probabilidade de não ser emitido sinal entre as primeiras m amostras** são, para os dois esquemas individuais **aproximados por**:

Esquema	Aproximação Markoviana
$E^+ - \mu$	$ARL_{E^+ - \mu}^\alpha(\delta, \theta) \simeq \underline{e}_{[\alpha(x_\mu^+ + 1)]}^\top \times [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\delta, \theta)]^{-1} \times \mathbf{1}$ $\bar{F}_{RL_{E^+ - \mu}^\alpha(\delta, \theta)}(m) \simeq \underline{e}_{[\alpha(x_\mu^+ + 1)]}^\top \times [\mathbf{Q}(\delta, \theta)]^m \times \mathbf{1}, m = 0, 1, 2, \dots$
$E^+ - \sigma$	$ARL_{E^+ - \sigma}^\beta(\theta) \simeq \underline{e}'_{[\beta(x_\sigma^+ + 1)]} \times [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)]^{-1} \times \mathbf{1}$ $\bar{F}_{RL_{E^+ - \sigma}^\beta(\theta)}(m) \simeq \underline{e}'_{[\beta(x_\sigma^+ + 1)]} \times [\mathbf{Q}(\theta)]^m \times \mathbf{1}$

Importa notar que no cálculo do desempenho do esquema para μ (σ^2) se admitiu que σ^2 (μ) é desconhecido embora constante.

Discutiremos oportunamente o controlo simultâneo dos parâmetros μ e σ^2 e constataremos que o desempenho do **esquema para μ depende não só de δ** como da magnitude do **shift em σ** . Daí termos lido a lidar com $RL_{E^+-\mu}(\delta, \theta)$.

No que diz respeito ao esquema **EWMA unilateral superior para μ** , as transições entre os estados transeuntes são regidas por uma **matriz sub-estocástica** com entradas do tipo

$$\begin{aligned} q_{\mu, ij}(\delta, \theta) &= P[W_{\mu, N}^+ \in E_j | W_{\mu, N-1}^+ = (e_{\mu, i} + e_{\mu, i+1})/2, \delta, \theta] \\ &= a_{\mu, ij}(\delta, \theta) - a_{\mu, i, j-1}(\delta, \theta) \end{aligned} \quad (10.39)$$

onde $a_{\mu, i-1}(\delta, \theta) = 0$, $i = 0, \dots, x_{\mu}^+$, e

$$a_{\mu, ij}(\delta, \theta) = \Phi \left(\frac{1}{\theta} \times \left\{ \frac{\gamma_{\mu}^+ \times [(j+1) - (1 - \lambda_{\mu}^+)(i+1/2)]}{(x_{\mu}^+ + 1)\sqrt{\lambda_{\mu}^+(2 - \lambda_{\mu}^+)}} - \delta \right\} \right), \quad (10.40)$$

para $i, j = 0, \dots, x_{\mu}^+$. Analogamente, tem-se, para o esquema **EWMA unilateral superior para σ^2** ,

$$\begin{aligned} q_{\sigma, ij}(\theta) &= P[W_{\sigma, N}^+ \in E_j | W_{\sigma, N-1}^+ = (e_{\sigma, i} + e_{\sigma, i+1})/2, \theta] \\ &= a_{\sigma, ij}(\theta) - a_{\sigma, i, j-1}(\theta) \end{aligned} \quad (10.41)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{\sigma, ij}(\theta) &= F_{\chi_{(n-1)}^2} \left(\frac{n-1}{\theta^2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{\gamma_{\sigma}^+ \times \sqrt{\psi[(n-1)/2]} \times [(j+1) - (1 - \lambda_{\sigma}^+)(i+1/2)]}{(x_{\sigma}^+ + 1)\sqrt{\lambda_{\sigma}^+(2 - \lambda_{\sigma}^+)}} \right\} \right), \end{aligned} \quad (10.42)$$

para $i, j = 0, \dots, x_{\sigma}^+$ e com $a_{\sigma, i-1}(\theta) = 0$, $i = 0, \dots, x_{\sigma}^+$.

Nota 10.32 — Importa notar que todas as entradas da matriz $\mathbf{Q}_{\mu}(\delta, \theta)$ e $\mathbf{Q}_{\sigma}(\theta)$ são aproximações das probabilidades de transição da cadeia de Markov original com espaço de estados contínuo, resultantes da substituição, no acontecimento condicional, dos eventos $\{W_{\mu, N-1}^+ \in E_{\mu, i}\}$ e $\{W_{\sigma, N-1}^+ \in E_{\sigma, i}\}$ por $\{W_{\mu, N-1}^+ = (e_{\mu, i} + e_{\mu, i+1})/2\}$ e $\{W_{\sigma, N-1}^+ = (e_{\sigma, i} + e_{\sigma, i+1})/2\}$, respectivamente. •

Exercício 10.33 — Deduza a expressão de $q_{\mu, ij}(\delta, \theta)$ para uma carta *EWMA* unilateral superior e para uma carta *EWMA* padrão para μ . •

Exercício 10.34 — Deduza agora a expressão de $q_{\sigma, ij}(\theta)$ para uma carta *EWMA* unilateral superior para σ^2 . •

Exercício 10.35 — Recorrendo a um programa para o *package Mathematica* e a 41 estados transeuntes, certifique-se que, de acordo com a aproximação markoviana, $ARL_{E^+-\mu}(0, 1) \simeq 500$ para o esquema *EWMA* unilateral superior para μ com as seguintes características:

- $\mu_0 = 0$, $\sigma_0 = 1$, $\gamma_{\mu}^+ = 2.8116$, $w_{\mu, 0}^+ = 0$ e $\lambda_{\mu}^+ = 0.134$.

Obtenha o *ARL* desta carta para

- $\delta = 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$.

Exercício 10.36 — Escreva um programa para o *package Mathematica* por forma a obter o *ARL* sob controlo da carta *EWMA* padrão descrita no Exercício 10.26, considerando 41 estados transeuntes na aproximação markoviana. •

Exercício 10.37 — Considere uma carta *EWMA* unilateral superior para a variância de uma característica de qualidade com distribuição sob controlo $Normal(\mu_0, \sigma_0^2)$, com $n = 5$, 0% *head start*, $\mu_0 = 0$, $\sigma_0 = 1$, $\lambda = 0.05$, $LCL = 0$, $UCL = 0.157079$, $\theta = \sigma/\sigma_0 \geq 1$ e o número esperado de amostras recolhidas até sinal igual a $ARL_{E^+-\sigma}(1) = 370.408$.

Tome agora uma carta *Shewhart* unilateral superior para σ^2 com limites de controlo $LCL = 0$ e $UCL = 4.06285$.

a) Prove que $ARL_{S+-\sigma}(1) = 370.408$, i.e., as duas cartas são comparáveis sob controlo.

b) Elabore um programa no *Mathematica* por forma a obter valores de $ARL_{S+-\sigma}(\theta)$, $ARL_{E+-\sigma}(\theta)$ e a alteração percentual em ARL,

$$\left[1 - \frac{ARL_{E+-\sigma}(\theta)}{ARL_{S+-\sigma}(\theta)} \right] \times 100\%, \quad (10.43)$$

por substituição do esquema *Shewhart* pelo esquema *EWMA* (ver Figura 10.2). Considere 21 estados transeuntes na aproximação markoviana (i.e. $x_{\sigma}^+ = 20$).

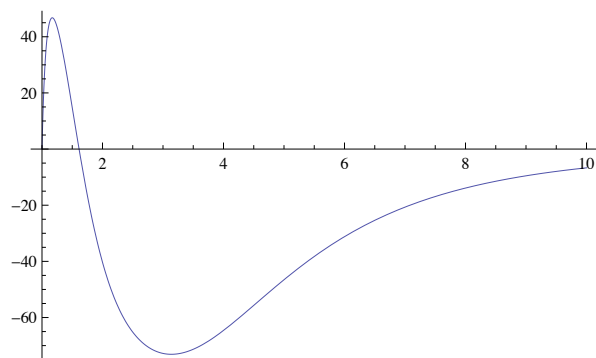


Figura 10.2: Redução percentual em ARL por substituição de esquema *Shewhart* por esquema *EWMA*.

Texto de apoio: Morais (2001, pp. 163–170).

10.6 Desempenho de esquemas conjuntos para μ e σ^2

É irrealista considerar, no contexto de características de qualidade normalmente distribuídas, que somente um dos parâmetros se altera pois de um modo geral quer μ , quer σ^2 estão sujeitos a *shifts* que é crucial detectar.

O controlo conjunto de μ e σ^2 é em geral efectuado usando esquemas conjuntos, dividindo-se estes em duas categorias:

- esquemas que recorrem a **uma só carta** e uma estatística univariada (Chengalur *et al.* (1989), Domangue e Patch (1991)) ou bivariada (Takahashi (1989));
- esquemas que resultam do **uso simultâneo de duas cartas** de controlo **individuais** — uma para μ outra para σ^2 (Crowder (1987), Saniga (1989), Gan (1989, 1995), St. John e Bragg (1991), Morais e Pacheco (2000)).

Exercício 10.38 — Caracterize um esquema conjunto para μ e σ^2 que faz uso de uma carta *Shewhart* padrão para μ e uma carta *Shewhart* unilateral superior para σ^2 .

- Em que situações é emitido sinal por este esquema conjunto?
- Como se pode escrever o número de amostras recolhidas até que o esquema conjunto emita sinal, $RL_{\mu,\sigma}(\delta, \theta)$, à custa dos *RLs* das cartas individuais?
- Justifique que a distribuição de $RL_{\mu,\sigma}(\delta, \theta)$ é geométrica com parâmetro $\xi_{\mu,\sigma}(\delta, \theta) = \xi_{\mu}(\delta, \theta) + \xi_{\sigma}(\theta) - \xi_{\mu}(\delta, \theta) \times \xi_{\sigma}(\theta) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{\gamma_{\mu}-\delta}{\theta}\right) - \Phi\left(\frac{-\gamma_{\mu}-\delta}{\theta}\right) \right] \times F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_{\sigma}^+/\theta^2)$.

- d) Obtenha um gráfico tridimensional de $ARL_{\mu,\sigma}(\delta, \theta)$ para um esquema conjunto à sua escolha. •

Exercício 10.39 — Considere um esquema conjunto similar ao do Exercício 10.38.

- a) Defina os limites de controlo das cartas individuais de modo que a probabilidade de emissão de falso alarme é em qualquer dos casos igual a 0.002?
- b) Obtenha a probabilidade de o esquema conjunto emitir um falso alarme.
- c) Qual a probabilidade de vir a ser emitido um sinal válido entre as 10 primeiras amostras recolhidas após um *shift* simultâneo em μ e σ com magnitude $(\delta, \theta) = (0.1, 1.1)$?
- d) Obtenha um gráfico tridimensional de $ARL_{\mu,\sigma}(\delta, \theta)$ para este esquema conjunto. •

10.6.1 Sinais erróneos — Misleading Signals

Qualquer dos **esquemas conjuntos** que faça uso simultâneo de duas cartas emite um **sinal** aquando da recolha da N -ésima amostra **desde que pelo menos uma das duas cartas o faça**. Então há a possibilidade **das seguintes ocorrências**:

Situação	
μ sob controlo, σ^2 fora de controlo	carta para μ é a 1a. a emitir sinal
μ fora de controlo, σ^2 sob controlo	carta para σ^2 é a 1a. a emitir sinal

Estas ocorrências foram designadas, a par de outras, de **isleading signals (MS)** por St. John e Bragg (1991) e Moraes e Pacheco (2000) classificaram-nos de **Tipos III e IV**, respectivamente.

Exercício 10.40 — Procure identificar outros tipos de *misleading signals* quando se faz uso de esquema *EWMA* padrão para μ . •

Exemplo 10.41 — Os valores alvo para o valor esperado e desvio-padrão da temperatura de um reagente químico são $\mu_0 = 100^\circ C$ and $\sigma_0 = 1^\circ C$, respectivamente.

Suponha que se recolhe **grupos** de $n = 9$ temperaturas de reagente de hora a hora, durante 10 horas consecutivas.

Considere-se um primeiro caso em que somente o desvio-padrão do processo está fora de controlo e toma o valor $\sigma = 1.2^\circ C$.

No segundo caso assuma-se que somente o valor esperado do processo está fora de controlo mais precisamente no nível $\mu = 100.05^\circ C$.

Os dados respeitantes às médias e variâncias corrigidas das temperaturas de do reagente químico encontram-se na Tabela 10.11 e ilustram a ocorrência de sinais erróneos nestes dois casos quando se faz uso de um esquema conjunto com uma carta \bar{X} padrão para μ ($S - \mu$) e uma carta S^2 unilateral superior para σ^2 ($S^+ - \sigma$), com limites de controlo $(LCL_{S-\mu}, UCL_{S-\mu}) = (99.064, 100.936)$ e $(LCL_{S^+-\sigma}, UCL_{S^+-\sigma}) = (1, 2.744)$.

Com efeito, o esquema conjunto produziu um *misleading signal* de Tipo III à 9ª observação no 1º conjunto de dados como se pode constatar na Tabela 10.11. Analogamente, a 1ª observação de 2º conjunto de dados está para além dos limites de controlo do esquema para σ^2 , dando a indicação de que o desvio-padrão do processo está aparentemente fora de controlo, logo produzindo um *misleading signal* de Tipo IV.

Convém mencionar que a 10ª amostra do 1º conjunto de dados foi responsável por um sinal válido, emitido pela carta $S^+ - \sigma$. Contudo,

Tabela 10.11: Médias (\bar{x}), variâncias (s^2) e $\max\{\sigma_0^2, s^2\}$ das temperaturas do reagente.

N	$(\mu, \sigma) = (100^\circ C, 1.2^\circ C)$			$(\mu, \sigma) = (100.05^\circ C, 1^\circ C)$		
	\bar{x}	s^2	$\max\{\sigma_0^2, s^2\}$	\bar{x}	s^2	$\max\{\sigma_0^2, s^2\}$
1	99.887	0.437	1.000	99.980	3.295	3.295***
2	99.429	1.085	1.085	100.478	0.922	1.000
3	100.807	0.610	1.000	99.962	0.963	1.000
4	99.992	1.497	1.497	99.878	0.978	1.000
5	100.025	0.761	1.000	100.130	0.904	1.000
6	100.380	1.113	1.113	99.589	1.402	1.402
7	100.702	1.861	1.861	99.776	0.943	1.000
8	99.897	0.512	1.000	100.093	1.819	1.819
9	101.015*	1.343	1.343	100.408	1.507	1.507
10	100.139	4.779	4.779**	100.116	1.281	1.281

* Misleading signal de **Tipo III** *** Misleading signal de **Tipo IV**
** Sinal válido

$\mu_0 = 100^\circ C; \sigma_0 = 1^\circ C; n = 9;$
 $[LCL_{S-\mu}, UCL_{S-\mu}] = [99.064, 100.936]; [LCL_{S+\sigma}, UCL_{S+\sigma}] = [1, 2.744].$

a carta $S - \mu$ não emitiu nenhum sinal válido entre as primeiras 10 observações do 2º conjunto de dados. •

10.6.2 Probabilidades de Misleading Signal (PMS)

Os **misleading signals** podem levar o utilizador do esquema conjunto a **tentar**

- **diagnosticar e corrigir causa determinística inexistente,**

logo a **agravar custos de inspecção.**

Esta situação sugere a utilização de pelo menos uma outra medida de desempenho para além de RL :

• *PMS* — Probabilidade de MS.

A independência entre as estatísticas sumárias das cartas individuais para μ e σ^2 volta a desempenhar um papel importante na obtenção de expressões simples para as probabilidades de *misleading signals* dos Tipos III e IV, denotadas por $PMS_{III}(\theta)$ e $PMS_{IV}(\delta)$.

Lema 10.42 — As expressões das *PMSs* de Tipos III e IV para esquemas conjuntos envolvendo esquemas individuais com estatísticas sumárias independentes são iguais a

$$PMS_{III}(\theta) = P[RL_\sigma(\theta) > RL_\mu(0, \theta)]$$

$$= \sum_{i=2}^{+\infty} F_{RL_\mu(0, \theta)}(i-1) \times P_{RL_\sigma(\theta)}(i) \quad (10.44)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P_{RL_\mu(0, \theta)}(i) \times \bar{F}_{RL_\sigma(\theta)}(i), \theta > 1 \quad (10.45)$$

$$PMS_{IV}(\delta) = P[RL_\mu(\delta, 1) > RL_\sigma(1)]$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{F}_{RL_\mu(\delta, 1)}(i) \times P_{RL_\sigma(1)}(i) \quad (10.46)$$

$$= \sum_{i=2}^{+\infty} P_{RL_\mu(\delta, 1)}(i) \times F_{RL_\sigma(1)}(i-1), \delta \neq 0 \quad (10.47)$$

(ou $\delta > 0$ ao utilizar-se esquemas unilaterais superiores para μ), onde $RL_\mu(\delta, \theta)$ e $RL_\sigma(\theta)$ representam os RLs dos esquemas individuais para μ e σ^2 . •

Exercício 10.43 — Prove que as expressões exactas das *PMSs* dos esquemas conjuntos SS^4 e SS^+5 são as que se encontram na Tabela 10.12.

⁴Este esquema conjunto resulta do uso de uma carta \bar{X} para μ e uma carta S^2 unilateral superior para σ^2 .

⁵Este esquema faz uso da carta \bar{X} unilateral superior para μ e carta S^2 unilateral superior para σ^2 .

Tabela 10.12: Expressões exactas das PMS s de Tipos III e IV para os esquemas conjuntos SS e SS^+ .

Esq. conjunto	$PMS_{III}(\theta), \theta > 1$	$PMS_{IV}(\delta), \delta \neq 0 (\delta > 0)$
SS	$\frac{1 - [\Phi(\gamma_\mu/\theta) - \Phi(-\gamma_\mu/\theta)]}{[F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_\mu^2/\theta^2)]^{-1} - [\Phi(\gamma_\mu/\theta) - \Phi(-\gamma_\mu/\theta)]}$	$\frac{1 - F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_\mu^+)}{[\Phi(\gamma_\mu - \delta) - \Phi(-\gamma_\mu - \delta)]^{-1} - F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_\mu^+)}$
SS^+	$\frac{1 - \Phi(\gamma_\mu^+/\theta)}{[F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_\mu^2/\theta^2)]^{-1} - \Phi(\gamma_\mu^+/\theta)}$	$\frac{1 - F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_\mu^+)}{[\Phi(\gamma_\mu^+ - \delta)]^{-1} - F_{\chi_{n-1}^2}(\gamma_\mu^+)}$

Exercício 10.44 — Elabore gráficos para as PMS s dos Tipos III e IV, considerando o esquema conjunto SS com $n = 9$, $ARL_\mu(0, 1) = ARL_\sigma(1) = 500$.

Refira-se que a obtenção das PMS s para esquemas que fazem uso de cartas do tipo $EWMA$ ou $CUSUM$ passa pela substituição das funções de sobrevivência e de probabilidade em (10.45) e (10.46) pelas suas aproximações markovianas.

Refira-se ainda que estes esquemas conjuntos possuem de um modo geral PMS s inferiores às dos esquemas conjuntos do tipo *Shewhart*, a acrescer a uma maior capacidade de detecção de *shifts* em μ e σ^2 , como se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 10.45 — Na tabela abaixo encontram-se valores das PMS s dos Tipos III e IV para esquemas conjuntos SS^+ e EE^+ para

- dimensão da amostra igual a $n = 5$;
- valores nominais do parâmetros, $\mu_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1$; e
- $\delta = 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$,
 $\theta = 1.01, 1.03, 1.05, 1.10, 1.20, 1.30, 1.40, 1.50, 1.60, 1.70, 1.80, 1.90, 2.00, 3.00$.

Estes esquemas conjuntos possuem as seguintes características:

- SS^+ — faz uso de cartas \bar{X} e S^2 unilaterais superiores tais que $\gamma_\mu^+ = 2.87816$, $\gamma_\sigma^+ = 16.9238$ e $ARL_{S^+ - \mu}(0, 1) = ARL_{S^+ - \sigma}(1) = 500.000$;
- EE^+ — resulta da utilização simultânea de cartas $EWMA$ unilaterais superiores para μ e σ^2 tais que $\gamma_\mu^+ = 2.8116$, $\lambda_\mu^+ = 0.134$ e $ARL_{E^+ - \mu}(0, 1) = 500.047$, $\gamma_\sigma^+ = 1.2198$, $\lambda_\sigma^+ = 0.043$, $ARL_{E^+ - \sigma}(1) = 500.027$, e 41 estados transeuntes na aplicação da abordagem markoviana quer para a carta para μ , quer para a carta para σ^2 .

Tabela 10.13: Valores das PMS s dos Tipos III e IV para esquemas conjuntos SS^+ e EE^+ .

θ	$PMS_{III}(\theta)$		δ	$PMS_{IV}(\delta)$	
	SS^+	EE^+		SS^+	EE^+
1.01	.484676	.455274	0.05	.460162	.403991
1.03	.456701	.377092	0.10	.421864	.319232
1.05	.430911	.313194	0.20	.349949	.191651
1.10	.375334	.206131	0.30	.286075	.114210
1.20	.295048	.114615	0.40	.231295	.069767
1.30	.242637	.081130	0.50	.185599	.044152
1.40	.206805	.065605	0.60	.148269	.028898
1.50	.180893	.057295	0.70	.118230	.019432
1.60	.161108	.052531	0.80	.094298	.013327
1.70	.145270	.049768	0.90	.075349	.009262
1.80	.132095	.048249	1.00	.060389	.006491
1.90	.120806	.047556	1.50	.021323	.001126
2.00	.110920	.047439	2.00	.008458	.000185
3.00	.051170	.059958	3.00	.001644	.000004

Importa notar que dar *head-starts* às cartas $EWMA$ unilaterais superiores para μ (σ) agrava as PMS 's de Tipos III (IV). Os resultados

sugerem que a substituição de um esquema combinado *Shewhart* unilateral superior por um do tipo *EWMA* reduz as *PMSs* e que a **ocorrência de misleading signals** quer do Tipo III, quer do Tipo IV, **não parece negligenciável** especialmente para os esquemas SS^+ . •

Exercício 10.46 — A qualidade do enchimento de garrafas de refrigerante é controlada recolhendo observações respeitantes ao desvio entre a altura do líquido em cada garrafa e uma marca-chave no gargalo da mesma. Admita que o referido desvio possui, sob controlo, distribuição normal com valor esperado $\mu_0 = 0cm$ e desvio-padrão $\sigma_0 = 0.1cm$.

Na tabela seguinte foram registadas as médias e as variâncias de 10 amostras de 5 garrafas cada:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{x}_N	0.108	-0.074	-0.248	0.539	0.144	0.497	0.206	1.152	0.560	0.235
s_N^2	0.236	1.364	0.552	1.823	2.504	0.504	0.923	1.354	0.898	3.723

- a) Considere-se que o controlo de σ é feito à custa de uma carta *EWMA* unilateral superior, caracterizada por $\lambda_\sigma = 0.043$ e $\gamma_\sigma = 1.2198$, que possui $ARL_\sigma(1) = 500.027$ e $ARL_\sigma(1.9) = 4.120$. Averigue se alguma das três primeiras observações apontam para a alteração de σ .
- (b) Admita agora que para o controlo de μ se toma uma carta padrão do tipo *Shewhart* cujos limites de controlo são tais que
- o número esperado de amostras recolhidas até à emissão de falso alarme por parte desta carta é de 370.4.

Determine a probabilidade de esta carta emitir um sinal quando ocorre um aumento de 81% na variância σ^2 . Comente.

- (c) Ao utilizar-se a carta descrita em (b) e simultaneamente uma carta unilateral superior do tipo *Shewhart* para σ , obtém-se o que se designa por esquema conjunto para μ e σ . Determine a probabilidade de ocorrência de sinal erróneo de Tipo III (IV) quando $\theta = 1.9$ ($\delta = 0.1$), caso a carta para σ possua $ARL_\sigma(1) = 200$. Comente estes resultados.

Nota: Na impossibilidade de obter valores exactos obtenha intervalos de valores para estas duas probabilidades.

(*Exame de Época Especial, 2o. Sem. – 2004/05*) •

Exercício 10.47 — O fenómeno dos sinais erróneos não é exclusivo dos esquemas conjuntos para μ e σ .

- a) Qual a probabilidade de ser emitido um sinal erróneo pelo esquema S^2 unilateral superior com número esperado de amostras até falso alarme igual a 100, quando $n = 10$ e há uma redução de 10% no desvio-padrão?
- b) Compare-a com a correspondente probabilidade de emissão de sinal válido por parte de um esquema S^2 padrão com *ARL* sob controlo também igual a 100.

Confronte também as probabilidades de emissão de sinal entre as primeiras 100 amostras destas duas cartas, mais uma vez quando $\theta = 0.9$. Comente estes resultados.

(*Exame de 2a. Época, 2o. Sem. – 2004/05*) •

Texto de apoio: Morais (2001, pp. 107–137).

Capítulo 11

Esquemas com intervalos amostrais variáveis

11.1 Introdução

O esquema de controlo de qualidade constitui, sem dúvida, o método gráfico mais divulgado empregue na distinção entre causas aleatórias e causas assinaláveis de variação de um processo.

É usual recorrer-se a esquemas de controlo com intervalos amostrais fixos, isto é, a recolha de amostras é feita a intervalos fixos (e.g de hora em hora). Neste caso diz-se fazer uso da política amostral **Fixed Sampling Intervals** (FSI).

No entanto, alguns trabalhos sobre as propriedades estatísticas dos esquemas de controlo com intervalos amostrais dependentes das observações recolhidas mostraram que esta política amostral denominada de **Variable Sampling Intervals** (VSI) pode aumentar a rapidez de detecção de alterações no processo.

A ideia de fazer variar os intervalos entre recolhas amostrais sucessivas tem vindo a ser empregue em diferentes domínios. Reynolds e Arnold (1989) referem alguns exemplos. É o caso da amostragem

de aceitação em que surgem os *continuous sampling plans* (ver Dodge, 1943) cuja taxa de inspecção de itens produzidos varia de acordo com o nível de qualidade dos itens já inspeccionados.¹ Todavia, a aplicação formal desta ideia a esquemas de controlo e a averiguação das suas consequências no desempenho das cartas data do final dos anos 80.

Embora existam alguns trabalhos anteriores a Reynolds *et al.* (1988), crê-se ter sido este o primeiro artigo publicado versando a aplicação da política amostral VSI ao esquema \bar{X} para o o valor esperado μ de característica de qualidade com distribuição normal. De entre outros trabalhos com a mesma orientação destaque-se:

- Saccucci *et al.* (1989) que estudam a aplicação da política amostral VSI às cartas EWMA;
- Reynolds *et al.* (1990) que se debruçam sobre o seu uso de esquemas CUSUM associadas à política amostral VSI;
- Ramalhoto e Morais (1994) que apresentam um resumo dos resultados mais importantes referentes à associação da política amostral VSI aos esquemas \bar{X} , EWMA e CUSUM.

A orientação comum a estas referências não é de estranhar dada a popularidade dos esquemas para o valor esperado da distribuição normal.

Fonte: Morais (1995, pp. 1–2).

¹O principal objectivo deste tipo de planos amostrais não é, no entanto, controlar a qualidade dos itens *on line* mas sim o melhoramento da qualidade dos lotes a serem expedidos, por inspecção dos mesmos.

11.2 Descrição das políticas amostrais FSI e VSI

Ao utilizar uma carta de controlo para detectar alterações num (ou mais) parâmetro(s) de uma característica de qualidade, é usual considerar os intervalos amostrais — intervalos entre qualquer par de observações consecutivas — fixos e iguais a d ($d > 0$, independentemente do resultado da primeira destas duas observações. Esta **política amostral** é designada por **FSI** e pressupõe que, após a recolha de cada amostra e registo do valor observado de uma estatística sumária no esquema de controlo, se tome **uma única decisão**:

- **emitir (ou não) sinal de perda de controlo.**

Contudo, é plausível permitir que os intervalos amostrais variem dependendo das observações recolhidas.

Se o **valor observado da estatística sumária for extremo**, mas não o suficiente para se emitir um sinal de perda de controlo, é perfeitamente natural **antecipar a recolha** de uma nova amostra de modo a confirmar se o referido valor é, ou não, uma indicação de que o processo se alterou.

Por outro lado, se o **valor observado da estatística sumária se encontrar próximo do alvo** da carta de controlo, não é descabido um **adiamento** do instante de recolha da próxima amostra.

Assim sendo, ao considerar uma carta de controlo genérica com

- **região de continuação** $C = [LCL, UCL]$ e
- **estatística sumária** W_N , referente à N -ésima amostra aleatória $\underline{X}_N = (X_{1N}, \dots, X_{nN})$,

é razoável actuar da seguinte forma sempre que W_N pertença a C :

- Acção 1 — **antecipar a recolha da próxima amostra**, se W_N estiver **próximo dos extremos** de C ;
- Acção 2 — **adiar a recolha da próxima amostra**, se W_N estiver **afastado dos extremos** de C .

O intervalo amostral que precede a $(N + 1)$ -ésima recolha é, portanto, uma variável aleatória função de W_N . Doravante tal intervalo amostral será designado por D_N .

A **adopção da política amostral VSI** pressupõe a escolha de

- **dois intervalos amostrais** distintos d_1 e d_2 ($d_1 < d_2$).

O intervalo amostral mínimo d_1 é utilizado quando W_N se encontrar próximo dos limites de controlo. Se pelo contrário W_N estiver afastado desses mesmos extremos, deve usar-se o intervalo máximo d_2 . Estas atribuições à variável aleatória D_N sugerem a divisão da **região de continuação** C em duas sub-regiões que constituem uma sua **partição**:

$$C_1, C_2 : C_1 \cap C_2 = \emptyset, C_1 \cup C_2 = C. \quad (11.1)$$

A C_1 e C_2 estão associados o menor e o maior dos intervalos amostrais, respectivamente.

Assim, a variável intervalo amostral pode ser definida como

$$D_N = \begin{cases} d_1 & \text{(e.g. 10 min.; antecipação...), se } W_N \in C_1 \\ d_2 & \text{(e.g. 110 min.; adiamento...), se } W_N \in C_2. \end{cases} \quad (11.2)$$

Fonte: Morais (1995, pp. 8–10).

11.3 Características primárias

Na caracterização de qualquer esquema de controlo, independentemente da política amostral, é da maior importância a análise do comportamento de duas variáveis aleatórias que Reynolds (1989) designou por **características primárias**:

- o número de amostras recolhidas até sinal, RL (*run length*);
- o **tempo até sinal**, TS (*time to signal*).

TS representa o tempo decorrido desde o (re)início do processo até ao instante em que é recolhida a amostra responsável pela emissão de sinal de perda de controlo. Consequentemente:

- $TS_{FSI} = d \times RL$, se a política amostral adoptada for FSI
- $TS_{VSI} = \sum_{N=1}^{RL} D_{N-1}$, caso a política amostral seja VSI.

Note-se que, ao assumir que se recolhe uma amostra no instante em que o processo se (re)inicia ou ao fixar/gerar um valor para W_0 pertencente a C , o intervalo amostral que precede a recolha da primeira amostra, D_0 , fica de imediato definido. Para além disso, é recomendável que se considere $D_0 = d_1$, caso se decida não atribuir/gerar ou não se disponha de um valor inicial para W_0 . (Justifique!)

Os valores esperados de RL e TS são representados por ARL e ATS (*average time to signal*) Nos esquemas de controlo FSI, pelo facto do intervalo amostral ser constante e igual a d tem-se

$$ATS_{FSI} = d \times ARL. \quad (11.3)$$

No entanto, nos esquemas VSI, ATS_{VSI} não é um múltiplo de ARL e escreve-se

$$ATS_{VSI} = E \left(\sum_{N=1}^{RL} D_{N-1} \right). \quad (11.4)$$

Tanto ATS_{FSI} como ATS_{VSI} dependem da magnitude (θ) da alteração do parâmetro sob controlo. De forma a tornar esta dependência mais explícita estes valores esperados passam a escrever-se doravante do seguinte modo: $ATS_{FSI}(\theta)$ e $ATS_{VSI}(\theta)$, respectivamente.

Serão tratadas outras características do tempo até sinal para estes dois tipos de políticas amostrais na próxima secção.

Fonte: Morais (1995, pp.10–12).

11.4 Cálculo das características primárias dos esquemas Shewhart

Ao considerar um esquema do tipo Shewhart, a estatística sumária W_N é função exclusiva da amostra aleatória mais recente, isto é, $W_N = W_N(\underline{X}_N)$. Logo, ao assumir que as amostras aleatórias \underline{X}_N são independentes e que o valor do parâmetro se mantém constante e igual a μ , as estatísticas sumárias W_N são i.i.d. a uma estatística sumária W .

Por consequência, a probabilidade de \underline{X}_N ser responsável pela emissão de um sinal é dada por

$$\xi(\theta) = P(W \notin C|\theta), \quad (11.5)$$

independentemente do índice da amostra e da política amostral adoptada. Logo o $RL(\theta) \sim \text{geométrica}(\xi(\theta))$, qualquer que seja a política amostral adoptada.

Em contraponto, o tempo esperado até sinal depende da política

amostral adoptada. Para o caso FSI, tal função é igual a

$$ATS_{FSI}(\theta) = \frac{d}{\xi(\theta)}. \quad (11.6)$$

Na situação VSI a obtenção do tempo esperado até sinal pressupõe a descrição probabilística dos intervalos aleatórios $D_N = D_N(\theta)$. Estes intervalos, pelas mesmas razões apontadas acima são, condicionalmente ao facto de $W_N \in C$ e da magnitude da alteração no parâmetro ser igual a θ , i.i.d. à variável aleatória $D = D(\theta)$ com f.p. dada por

$$P[D(\theta) = y] = \begin{cases} 1 - \rho_2(\theta), & \text{se } y = d_1 \\ \rho_2(\theta), & \text{se } y = d_2 \end{cases} \quad (11.7)$$

onde

$$\rho_2(\theta) = \frac{P[W_N(\theta) \in C_2]}{P[W_N(\theta) \in C]} \quad (11.8)$$

representa a probabilidade de utilização do maior dos intervalos amostrais. Ora, tendo em consideração esta f.p., a expressão (11.4) e a equação de Wald, $ATS_{VSI}(\theta)$ passa a escrever-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} ATS_{VSI}(\theta) &= E[D(\theta)] \times ARL(\theta) \\ &= \frac{d_1 [1 - \rho_2(\theta)] + d_2 \rho_2(\theta)}{\xi(\theta)} \\ &= \frac{d_1 + (d_2 - d_1)\rho_2(\theta)}{d} \times ATS_{FSI}(\theta). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Exercício 11.1 — Na Tabela 11.1 podem encontrar-se estas e outras características do tempo até sinal de esquemas Shewhart associados às políticas FSI e VSI, nomeadamente os seus valores possíveis, a sua distribuição, a sua variância e a sua função geradora de probabilidades, assumindo que o valor do intervalo amostral que antecede a recolha da primeira amostra tem a mesma distribuição que os restantes.

Tabela 11.1: Tempo até sinal para esquemas Shewhart

	FSI	VSI
TS	$d \times RL(\theta)$	$\sum_{N=1}^{RL(\theta)} D_{N-1}(\theta)$
Conj. valores possíveis	$\{d, 2d, 3d, \dots\}$	$\{k_1 d_1 + k_2 d_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0\} \setminus 0$
Distribuição	$d \times \text{Geométrica}(\xi(\theta))$	Geométrica Composta
Valor esperado	$ATS_{FSI}(\theta) = \frac{d}{\xi(\theta)}$	$\frac{d_1 + (d_2 - d_1)\rho_2(\theta)}{d} \times ATS_{FSI}(\theta)$
Variância	$V[TS_{FSI}(\theta)] = \frac{d^2 [1 - \xi(\theta)]}{\xi^2(\theta)}$	$\left\{ \frac{[d_1 + (d_2 - d_1)\rho_2(\theta)]^2}{d^2} + \frac{(d_2 - d_1)^2 p(\theta)\rho_2(\theta)[1 - \rho_2(\theta)]}{1 - p(\theta)} \right\} \times V[TS_{FSI}(\theta)]$
Coef. variação	$CV[TS_{FSI}(\theta)] = \sqrt{1 - p(\theta)}$	$\sqrt{1 + \frac{(d_2 - d_1)^2}{[d_1 + (d_2 - d_1)\rho_2(\theta)]^2} \frac{p(\theta)\rho_2(\theta)[1 - \rho_2(\theta)]}{1 - p(\theta)}} \times CV[TS_{FSI}(\theta)]$
F.geradora prob.	$E(z^{TS(\theta)}) = \frac{z^d \xi(\theta)}{1 - z^d [1 - \xi(\theta)]}$	$\frac{E[z^{D(\theta)}] \xi(\theta)}{1 - E[z^{D(\theta)}] [1 - \xi(\theta)]}$

$$D(\theta) \sim d_1 + (d_2 - d_1) \times \text{Bernoulli}(\rho_2(\theta)); \quad E[z^{D(\theta)}] = z^{d_1} + (z^{d_2} - z^{d_1}) \rho_2(\theta).$$

Prove todos estes resultados. •

Importa notar que ATS_{VSI} e $V(TS_{VSI})$ foram convenientemente escritos à custa de ATS_{FSI} e $V(TS_{FSI})$.

Fontes: Morais (1995, pp. 12–13), Morais e Pacheco (2007).

11.5 Obtenção numérica das características primárias para esquemas do tipo markoviano

A estatística sumária de um **esquema do tipo markoviano** (CUSUM ou EWMA) não depende somente de \underline{X}_N . O carácter recursivo de $W_N = W_N(W_{N-1}, \underline{X}_N)$ impõe uma **estrutura de dependência** às estatísticas sumárias. Por este motivo a avaliação das características primárias dos esquemas de controlo associadas deixa de ser trivial, passando a ter de se fazer numericamente.

Ao adoptar-se a abordagem markoviana — descrita, por exemplo, em Lucas e Saccucci (1990) e Reynolds *et al.* (1990) — a estatística sumária W_N cujo espaço de estados é contínuo vê o seu contradomínio discretizado, obtendo-se deste modo um cadeia de Markov cujas propriedades podem ser avaliadas exactamente e que aproximam as propriedades do processo estocástico original — uma cadeia de Markov com espaço de estados contínuos.

Distinga-se a situação em que os intervalos amostrais são fixos do caso em que se adopta a política amostral VSI. Segundo Lucas e Saccucci (1990) e Reynolds *et al.* (1990), a discretização do contradomínio da estatística sumária deve ser feita, em qualquer dos casos, nos seguintes moldes:

- a **região de continuação** C do esquema é dividida em k **estados transeuntes** correspondendo estes estados a intervalos disjuntos com amplitudes, de preferência, iguais;
- o complementar de C corresponde ao estado absorvente da cadeia de Markov.

Ao adoptar intervalos amostrais variáveis a divisão do contradomínio em estados transeuntes deve ser feita de modo mais cuidado já que a região C foi particionada. Assim:

- considera-se à mesma k **estados transeuntes dos quais** k_1 e k_2 estão **associados** a d_1 e d_2 , respectivamente;
- o estado absorvente mantém-se.

Os valores de k_1 e k_2 devem ser escolhidos de forma que a sua soma seja igual a k e que todos os estados transeuntes correspondam a intervalos disjuntos com amplitudes o menos distintas possível.

Refira-se que nada impede de adoptar esta última discretização quando a política amostral é a FSI. No entanto, a utilização da discretização considerada na situação FSI não é recomendável para o caso VSI pois ao fazê-lo pode tornar-se ambígua a definição do intervalo amostral na fronteira de C_2 .

Considere-se que:

- $\mathbf{Q}(\theta)$ representa a matriz de probabilidades de transição entre os k estados transeuntes da cadeia de Markov discretizada em que ocorre uma transição sempre que é recolhida uma amostra;
- $\mathbf{M}(\theta) = [m_{ij}(\theta)]_{i,j=1,\dots,k} = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)]^{-1}$ denota a **matriz fundamental** desta cadeia de Markov com um estado absorvente, onde é sabido que $m_{ij}(\theta)$ representa o número esperado de vezes que a cadeia de Markov se encontra no estado transeunte E_j antes de atingir o estado absorvente, partindo do estado transeunte E_i (Reynolds, 1989).

Sejam:

- E_i o estado transeunte a que pertence o valor inicial da estatística sumária, W_N ;
- b_j o **intervalo amostral usado quando W_N pertence ao estado transeunte E_j** ;
- D_0 o primeiro intervalo amostral utilizado ($D_0 = b_i$).

Por fim, condicione-se ao facto do estado inicial ser E_i e considere-se:

- $ARL^i(\theta)$ o número esperado de amostras recolhidas até sinal;
- $ATS^i(\theta)$ o tempo esperado até sinal.

Então, ao discretizar da mesma forma o contradomínio da estatística sumária nos casos FSI e VSI, tem-se

$$ARL^i(\theta) = \sum_{j=1}^k m_{ij}(\theta) = \underline{e}_i^\top [\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\theta)]^{-1} \mathbf{1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (11.10)$$

qualquer que seja a política amostral adoptada, tal como no caso em que as estatísticas sumárias são independentes.

O **tempo esperado até sinal** escreve-se de forma distinta para as **duas políticas amostrais**:

$$ATS_{FSI}^i(\theta) = d \times ARL^i(\theta), \quad i = 1, \dots, k; \quad (11.11)$$

$$ATS_{VSI}^i(\theta) = \sum_{j=1}^k m_{ij}(\theta) \times b_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (11.12)$$

$ARL^i(\theta)$ e $ATS^i(\theta)$ **aproximam** na verdade o **número esperado de amostras recolhidas até sinal** e o **tempo esperado até sinal da cadeia original**.

Os valores esperados $ARL^i(\theta)$ e $ATS_{VSI}^i(\theta)$ podem ser obtidos de forma alternativa (Reynolds *et al.*, 1990). Com efeito, considere-se que $ARL_m^i(\theta)$, $m = 1, 2$, o número esperado de vezes que o intervalo amostral d_m é utilizado depois do instante da obtenção da concretização de W_1 e até que seja emitido um sinal. Então:

$$ARL_m^i(\theta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k m_{ij}(\theta) \times I_{d_m}(b_j) - 1, & D_0 = d_m \\ \sum_{j=1}^k m_{ij}(\theta) \times I_{d_m}(b_j), & D_0 \neq d_m, \end{cases} \quad (11.13)$$

para $m = 1, 2$; e

$$ARL^i(\theta) = 1 + \sum_{m=1}^2 ARL_m^i(\theta) \quad (11.14)$$

Considere-se agora, para $m = 1, 2$,

$$\rho_m(\theta) = \begin{cases} \frac{ARL_m^i(\theta)+1}{ARL^i(\theta)}, & D_0 = d_m \\ \frac{ARL_m^i(\theta)}{ARL^i(\theta)}, & D_0 \neq d_m, \end{cases} \quad (11.15)$$

onde $\rho_m(\theta)$ pode ser interpretado como a proporção de tempo em que o intervalo d_m é utilizado até à emissão de sinal de perda de controlo.

Logo

$$\begin{aligned} ATS_{VSI}^i(\theta) &= D_0 + \sum_{m=1}^2 d_m \times ARL_m^i(\theta) \\ &= \frac{d_1 + (d_2 - d_1)\rho_2(\theta)}{d} \times ATS_{FSI}^i(\theta), \end{aligned} \quad (11.16)$$

à semelhança do que aconteceu no caso em que as estatísticas sumárias são independentes.

Texto de apoio: Morais (1995, pp. 13–17).

11.6 Comparabilidade sob controlo; característica primordial; comparação dos desempenhos de cartas FSI e VSI

O tempo esperado até sinal não só quantifica o desempenho de qualquer carta de controlo, como serve de termo de comparação dos desempenhos de esquemas de controlo.

O **critério de comparabilidade** entre esquemas de controlo, introduzido por Reynolds *et al.* (1988), refere que:

- dois (ou mais) **esquemas de controlo** dizem-se **comparáveis sob controlo** (*matched control charts*) sse possuírem tempos esperados até sinal iguais quando o processo de produção está sob controlo, i.e., sse os respectivos **tempos esperados até falso alarme** forem iguais.

A comparabilidade sob controlo escreve-se do seguinte modo, no contexto da comparação dos desempenhos de dois esquemas para um

parâmetro, um com intervalos amostrais fixos e outro associado à política amostral VSI:

$$ATS_{VSI}(\theta_0) = ATS_{FSI}(\theta_0), \quad (11.17)$$

onde θ_0 corresponde ao valor de θ sob controlo (e.g. $\theta_0 = 0$ no controlo de parâmetro de localização).

É recorrendo a esta igualdade que se obtém a partição de C do esquema VSI. Com efeito, ao recordar a relação existente entre os tempos esperados até sinal das versões FSI e VSI comparáveis sob controlo de uma mesma carta, a igualdade (11.17) pode escrever-se à custa da probabilidade de utilização do intervalo amostral máximo:

$$\frac{d_1 + (d_2 - d_1)\rho_2(\theta_0)}{d} = 1 \Leftrightarrow \rho_2(\theta_0) = \frac{d - d_1}{d_2 - d_1}. \quad (11.18)$$

A escolha dos limites de controlo de um esquema bem como da partição da sua região de continuação C deve ainda reger-se de acordo com o seguinte princípio:

- é preciso ter a garantia que o tempo esperado de detecção de uma alteração de magnitude θ , seja sempre inferior ao tempo esperado até à emissão de um falso alarme, i.e., $ATS(\theta) < ATS(\theta_0), \forall \theta \neq \theta_0$,

independentemente da política amostral e do tipo de esquema e controlo adoptados. Esta propriedade do tempo esperado até sinal é designada de **característica primordial**.

Atente-se que a literatura de controlo de qualidade é fértil em exemplos de esquemas de controlo que não possuem tempo esperado até sinal gozando da característica primordial. Acrescente-se, a título de curiosidade, que a característica primordial contribui, nalgumas

situações, para a definição unívoca da região de continuação e da respectiva partição.

Uma vez obtida a partição da região de continuação do esquema VSI e caracterizada este mesmo esquema, resta averiguar se se obteve um esquema mais rápida, em valor esperado, que a versão FSI que lhe é comparável sob controlo, na detecção de todas as alterações a que estes esquemas se propõem detectar. Ou seja, se

$$ATS_{VSI}(\theta) < ATS_{FSI}(\theta), \quad \forall \theta \neq \theta_0. \quad (11.19)$$

Só nesta situação o recurso à política amostral VSI é vantajoso. A verificação analítica desta propriedade é, por vezes, difícil. Compreende-se, por isso, que a literatura que discute a política amostral VSI se limite de um modo geral à verificação numérica desta condição.

Refira-se por fim que, qualquer confronto de tempos esperados até sinal de esquemas FSI e VSI comparáveis sob controlo pode ser escrito à custa da função $\rho_2(\theta)$. De facto (11.19) é equivalente a

$$\rho_2(\theta) < \rho_2(\theta_0), \quad \forall \theta \neq \theta_0 \quad (11.20)$$

A condição (11.20) é perfeitamente razoável já que sob controlo as recolhas amostrais devem ser o mais espaçadas possível: deste modo não só se retarda as emissões de falsos alarmes, como se acelera a detecção de uma alteração do parâmetro.

Fonte: Morais (1995, pp. 19–21).

11.7 Ilustração: esquemas \bar{X} dos tipos FSI e VSI com limites 3σ

Com este esquemas pretende-se detectar *shifts* no valor esperado de característica de qualidade com distribuição normal de μ_0 para $\mu_0 + \theta \times \sigma_0/\sqrt{n}$, $\theta \neq 0$.

Considere-se esquemas FSI e VSI com os seguintes intervalos amostrais, limites de controlo e outras características:

- $d = 1.0$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 1.9$;
- $LCL = \mu_0 - \gamma\sigma/\sqrt{n}$, $UCL = \mu_0 + \gamma\sigma/\sqrt{n}$, onde $\gamma = 3.0$;

$$\xi(\theta) = P(\bar{X} \in [LCL, UCL]) = \Phi(\gamma - \theta) - \Phi(-\gamma - \theta)$$

- $LBL = \mu_0 - \alpha\sigma/\sqrt{n}$, $UBL = \mu_0 + \alpha\sigma/\sqrt{n}$, com

$$\alpha = \Phi^{-1} \left\{ \frac{d-d_1}{d_2-d_1} \times [\Phi(\gamma) - .5] + .5 \right\} = 0.672367;$$

- $\rho_2(\theta) = P(\text{usar intervalo amostral máximo } d_2)$

$$= P(\bar{X} \in (LBL, UBL))$$

$$= \frac{\Phi(\alpha-\theta) - \Phi(-\alpha-\theta)}{\Phi(\gamma-\theta) - \Phi(-\gamma-\theta)}$$

Com este conjunto de parâmetros obtêm-se os valores para o valor esperado, variância e coeficiente de variação do tempo até sinal da Tabela 11.2.

Pode concluir-se da Tabela 11.2 que as alterações no parâmetro μ são, em valor esperado, mais facilmente detectadas pelo esquema VSI que pelo esquema FSI. De notar, no entanto, que a utilização desta política amostral é tanto mais vantajosa, quanto mais grave for a alteração em μ .

Para além disso a adopção de intervalos amostrais variáveis nem sempre resulta (resulta sempre) numa redução da variância (coeficiente

Tabela 11.2: Valor esperado, variância e coeficiente de variação do tempo até sinal

θ	$ATS_{FSI}(\theta)$	$ATS_{VSI}(\theta)$	$\left(1 - \frac{ATS_{VSI}(\theta)}{ATS_{FSI}(\theta)}\right) \times 100\%$
0.00	370.4	370.4	0.000%
0.50	155.2	141.5	8.855%
1.00	43.9	30.6	30.253%
3.00	2.0	0.3	86.456%
θ	$V[TS_{FSI}(\theta)]$	$V[TS_{VSI}(\theta)]$	$\left(1 - \frac{V[TS_{VSI}(\theta)]}{V[TS_{FSI}(\theta)]}\right) \times 100\%$
0.00	369.9	370.3	-0.110%
0.05	365.4	365.5	-0.018%
1.00	43.4	30.8	29.062%
3.00	1.4	0.4	71.559%
θ	$CV[TS_{FSI}(\theta)]$	$CV[TS_{VSI}(\theta)]$	$\left(1 - \frac{CV[TS_{VSI}(\theta)]}{CV[TS_{FSI}(\theta)]}\right) \times 100\%$
0.00	0.999	1.000	-0.110%
0.50	0.997	1.000	-0.313%
1.00	0.989	1.005	-1.707%
3.00	0.707	1.485	-109.982%

e variação) do tempo até sinal. (Justifique analiticamente estes dois resultados!)

Em Ramalhoto e Morais (1995) e Ramalhoto e Morais (1997) podem encontrar-se exemplos de esquemas VSI dos tipos Shewhart e EWMA (respectivamente) para o parâmetro de escala de uma característica de qualidade com distribuição Weibull tri-paramétrica.

Por seu lado, em Morais e Natário (1998) procede-se à averiguação das vantagens dos esquemas VSI no controlo do número esperado de defeitos em amostras de dimensão fixa. Por sinal o carácter discreto da característica de qualidade exige cuidados especiais na adopção da política amostral VSI.

Textos de apoio: Morais (2006); Morais e Pacheco (2007).

Capítulo 13

Amostragem de Aceitação

13.1 Introdução

Não existem processos de produção perfeitos ou sem variabilidade, por mais cuidadosos que sejam o seu planeamento e a sua manutenção, pelo que a **inspecção de matéria-prima**, de produtos semi-acabados ou de produtos acabados é **fundamental para assegurar a qualidade da produção**.

Quando a inspecção tem por propósito **aceitar ou rejeitar um lote** de um produto de acordo com determinada regra padrão, ela é habitualmente designada por **amostragem de aceitação**.

A amostragem de aceitação não fornece, no entanto, nenhuma forma directa de reduzir a variabilidade do processo de produção, ao contrário do que acontece com o controlo estatístico de processos.

Apresenta-se, de seguida, uma aplicação típica da amostragem de aceitação.

Exemplo 13.1 (Montgomery, 1991, p. 551) — Uma companhia recebe um produto de um vendedor. Este produto é uma componente ou matéria-prima usada no processo de fabrico da companhia. É

retirada uma amostra de um lote e são inspeccionadas algumas características de qualidade de cada unidade da amostra. Com base na informação obtida desta amostra, é tomada uma decisão no que diz respeito ao lote.

Os lotes aceites são utilizados na produção, ao passo que os lotes rejeitados ou são devolvidos ao vendedor ou são sujeitos a outro tipo de acção. •

A amostragem de aceitação é pois um compromisso entre a inspecção a 100% e a aceitação dos lotes sem recurso a qualquer observação.

Segundo Montgomery (1991, p. 552), a **amostragem de aceitação** é normalmente **usada** quando, por exemplo:

- testar uma unidade incorre na sua destruição;
- o custo de uma inspecção a 100% é demasiado elevado;
- a inspecção a 100% não é viável tecnologicamente ou requereria tanto tempo que teria um impacto bastante negativo ao nível da produção;
- apesar do processo de produção ter uma notável história de qualidade, a não inspecção não é de todo razoável e a inspecção a 100% é desprovida de sentido.

A **amostragem de aceitação** apresenta **vantagens** óbvias, quando confrontada com o recurso à inspecção a 100%:

- é geralmente menos dispendiosa por haver um menor número de observações;
- diminui o contacto com o produto implicando, por isso, uma redução em eventuais danos no produto;

- envolve menor número de operadores em actividades de inspecção;
- reduz frequentemente os erros de inspecção devido, por exemplo, à fadiga dos inspectores;
- provoca uma maior motivação ao vendedor no sentido de uma melhor qualidade para os seus produtos, mediante a rejeição de lotes completos por oposição à simples rejeição de unidades com defeitos.

No entanto, a **amostragem de aceitação** tem também as suas **desvantagens** por comparação com a inspecção a 100%. Entre elas incluem-se, de acordo com Montgomery (1991, p. 556):

- a existência do risco de aceitar lotes *maus* e, naturalmente, rejeitar lotes *bons*;
- a geração de menor informação acerca do produto ou do processo de produção;
- a necessidade do planeamento e documentação dos planos de amostragem de aceitação, ao contrário do que acontece com a inspecção a 100%.

Os **planos de amostragem de aceitação** dividem-se essencialmente em amostragem **por atributos** e amostragem **para variáveis**. Note-se, no entanto, que ambos os tipos de planos de amostragem de aceitação acabam por avaliar a qualidade do lote através da fracção de unidades defeituosas (ou não-conformes) e a sua aplicação passa, na prática, pela consulta de **normas** de **que** falaremos mais tarde. A saber:

- a norma *Military Standard* 105D (MIL-STD 105D)¹ para atributos ou a sua versão civil ANSI/ASQC Z1.4-1981 (1981) ou ainda uma versão mais recente desta norma;² e
- a norma *Military Standard* 414 (MIL-STD 414) para variáveis ou a sua versão civil ANSI/ASQC Z1.9-1980 (1980).³

Embora menos popular, a amostragem de aceitação para variáveis apresenta uma vantagem importante quando comparada com a amostragem por atributos (Montgomery, 1991, p. 623–624):

- os planos de amostragem para variáveis apresentam um menor risco de aceitação de lotes com qualidade inaceitável que os planos de amostragem por atributos, ao considerar-se amostras de dimensões iguais.

Debruçar-nos-emos também sobre dois **tipos de amostragem de aceitação**:

- os **planos de amostragem simples**, **que são** de longe os mais usados **e** estão associados a uma decisão sobre lotes baseada na informação respeitante a uma amostra;
- os **planos de amostragem dupla** que, grosso modo, fazem depender o processo de decisão da recolha de duas amostras; estes planos podem ser generalizados, obtendo-se, por exemplo, planos de amostragem múltipla ou ainda planos de amostragem sequencial.

Acrescente-se ainda que se averiguará as implicações da **rectificação da inspecção** no desempenho de planos de amostragem de aceitação simples ou dupla.

¹De acordo com Montgomery (1985, p. 389), esta norma data de 1963.

²É o caso da norma ANSI/ASQC Z1.4-2003 (2003).

³Ou ainda a versão mais recente, a norma ANSI/ASQC Z1.9-2003 (2003).

Fontes: Casquilho *et al.* (2005) e Constantino (2004, pp. 6–9).

Texto de apoio: Gomes e Barão (1999, pp. 115–119).

13.2 Planos de amostragem de aceitação simples por atributos

Comece-se por admitir que se tem um lote de dimensão N , com fracção de unidades defeituosas p .

Recorrer a um plano de amostragem de aceitação simples por atributos pressupõe normalmente a **recolha aleatória de uma amostra** de dimensão n e **apurar o número de unidades defeituosas da amostra**. De seguida, deve **comparar-se** esse valor com o chamado **número de aceitação**, c . Se o número de unidades defeituosas da amostra não for superior ao número de aceitação c , aceita-se o lote; caso contrário, rejeita-se o lote.

A **definição de um plano de amostragem simples por atributos** passa por determinar a **dimensão da amostra** n e o **número de aceitação** c . A escolha destas duas constantes pressupõe a obtenção prévia da **curva característica operatória** (*operating characteristic curve* ou curva OC). Esta curva não passa da probabilidade de aceitação dum lote em função da sua qualidade, i.e., de p .

Considere-se $M = N \times p$ um inteiro que mais não é que o número de unidades defeituosas no lote. Então a v.a. D que representa o número de unidades defeituosas numa amostra de n unidades seleccionadas ao acaso sem reposição segue uma distribuição hipergeométrica, cuja função de probabilidade é dada por:

$$P(D = d) = \frac{\binom{M}{d} \binom{N-M}{n-d}}{\binom{N}{n}}, \quad (13.1)$$

para $d = \max \{0, n - (N - M)\}, \dots, \min \{n, M\}$.

A probabilidade de aceitação do lote é, evidentemente, função de p e igual a:

$$P_a = P_a(p) = P(D \leq c) = \sum_{d=0}^c \frac{\binom{M}{d} \binom{N-M}{n-d}}{\binom{N}{n}}, \quad (13.2)$$

onde, recorde-se, $M = Np$. A equação (13.2) define o que se denomina de **curva OC do tipo A**.

Ao supor-se que a dimensão do lote é suficientemente grande, a distribuição de D pode ser aproximada pela distribuição binomial de parâmetros n e $p = M/N$. Esta aproximação é particularmente boa quando $n/N < 0.1$ e conduz à seguinte aproximação da probabilidade de aceitação do lote

$$P_a(p) \simeq \sum_{d=0}^c \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d} = F_{Binomial(n,p)}(c). \quad (13.3)$$

(13.3) define a chamada **curva OC do tipo B**.

Exercício 13.2 — Considere $n = 89$ e $c = 2$. Esboce a curva OC do tipo B.

Esboce agora a curva OC ideal, ou seja, a curva que caracteriza um plano de amostragem de aceitação que distingue perfeitamente os lotes “bons”⁴ de lotes “maus”. •

A escolha das constantes n e c que determinam o plano de amostragem de aceitação simples por atributos é norteada por um compromisso: é necessário que a **curva OC passe por dois pontos**,

⁴I.e., lotes com fracção de unidades defeituosas não superior a p_1 .

de forma a que a probabilidade de aceitação seja igual a $1 - \alpha$ para lotes com fracção de unidades defeituosas p_1 , e que a probabilidade de aceitação seja β para lotes com fracção de unidades defeituosas p_2 ($p_2 > p_1$). Assim:

$$(n, c) : \begin{cases} P_a(p_1) = 1 - \alpha \\ P_a(p_2) = \beta. \end{cases} \quad (13.4)$$

É costume designar os valores da fracção de unidades defeituosas p_1 e p_2 de índices:

- **AQL** (*Acceptable Quality Level* ou nível de qualidade aceitável)
- **LTPD** (*Lot Tolerance Percent Defective* ou fracção tolerável de defeituosos),

respectivamente.

O índice **AQL**(= p_1) corresponde à **pior qualidade a que o processo pode operar** e que **ainda conduz a uma probabilidade elevada de aceitação** do lote. Por seu lado, o índice **LTPD**(= p_2) é o **valor da qualidade a partir do qual se considera que o produto não é aceitável**. (Veja-se Gomes e Barão, 1999, pp. 121-122.)

Deste modo, n e c são escolhidos de modo **a que a curva OC passe pelos pontos** ($AQL, 1 - \alpha$) e ($LTPD, \beta$), habitualmente designados de **ponto do risco do produtor** e o **ponto do risco do consumidor**, respectivamente.

Estas designações têm a sua razão de ser:

- o **produtor deseja evitar rejeitar lotes de boa qualidade**, daí exigir-se que a probabilidade de aceitação do lote verifique $P_a(p) \geq 1 - \alpha$, para $p \leq AQL$, onde $1 - \alpha$ toma um valor próximo de 1 e α denota o **risco do produtor**;

- o consumidor pretende evitar aceitar lotes de má qualidade, donde exigir-se que $P_a(p) \leq \beta$, para $p \geq LTPD$, onde β toma valor próximo de 0 e representa o **risco do consumidor**.

Ao recordar o carácter discreto da v.a. D , a natureza inteira de n e c , o reparo do parágrafo anterior e ao assumir-se a validade da aproximação à distribuição binomial, o tamanho da amostra n e o número de aceitação c deverão ser escolhidos por forma a satisfazerem as duas inequações seguintes:

$$(n, c) : \begin{cases} \sum_{d=0}^c \frac{n!}{d!(n-d)!} p_1^d (1-p_1)^{n-d} \geq 1-\alpha \\ \sum_{d=0}^c \frac{n!}{d!(n-d)!} p_2^d (1-p_2)^{n-d} \leq \beta. \end{cases} \quad (13.5)$$

(13.5) assegura (ao produtor) uma probabilidade de aceitação maior **ou igual a** $1-\alpha$ para lotes com fracção de unidades defeituosas $AQL = p_1$ e garante (ao consumidor) uma probabilidade de aceitação menor **ou igual a** β para lotes com fracção de unidades defeituosas $LTPD = p_2$.

A resolução de (13.5) pode conduzir a diferentes pares de inteiros (n, c) logo a distintos planos de amostragem de aceitação simples por atributos, com as correspondentes curvas OC passando próximo dos pontos do risco do produtor e do risco do consumidor.

Descreve-se, de seguida, um método aproximado de obtenção do par (n, c) do plano de amostragem. Este método é descrito por Wetherill e Brown (1991) e **baseia-se** no uso da distribuição de Poisson como uma aproximação binomial e tira partido de uma relação conhecida entre a f.d. da v.a. de Poisson e a f.d. da v.a. qui-quadrado.

Uma vez estabelecidos os pontos do risco do consumidor ($AQL = p_1, 1-\alpha$) e do risco do produtor ($LTPD = p_2, \beta$), o uso da aproximação

da Poisson à binomial, leva-nos a concluir que

$$(n, c) : \begin{cases} \sum_{d=0}^c \frac{e^{-np_1} (np_1)^d}{d!} \geq 1-\alpha \\ \sum_{d=0}^c \frac{e^{-np_2} (np_2)^d}{d!} \leq \beta. \end{cases} \quad (13.6)$$

Tirando agora partido do facto de

$$F_{Poisson(\lambda)}(c) = \sum_{d=0}^c \frac{e^{-\lambda} \lambda^d}{d!} = 1 - F_{\chi_{2(c+1)}^2}(2\lambda), \quad (13.7)$$

(13.6) passa a ser equivalente a

$$(n, c) : \begin{cases} 1 - F_{\chi_{2(c+1)}^2}(2np_1) \geq 1-\alpha \\ 1 - F_{\chi_{2(c+1)}^2}(2np_2) \leq \beta \end{cases} \quad (13.8)$$

ou ainda a

$$(n, c) : \begin{cases} 2np_1 \leq F_{\chi_{2(c+1)}^2}^{-1}(\alpha) \\ 2np_2 \geq F_{\chi_{2(c+1)}^2}^{-1}(1-\beta). \end{cases} \quad (13.9)$$

Agora, ao tomar-se

$$r(c) = \frac{F_{\chi_{2(c+1)}^2}^{-1}(1-\beta)}{F_{\chi_{2(c+1)}^2}^{-1}(\alpha)}, \quad (13.10)$$

conclui-se que a constante de aceitação do plano de amostragem simples por atributos, c , é o menor inteiro que satisfaça a condição

$$r(c) \leq \frac{p_2}{p_1}. \quad (13.11)$$

Por seu lado, a dimensão da amostra n decorre das duas desigualdades em (13.9) e como tal é enquadrada do seguinte modo:

$$\frac{F_{\chi_{2(c+1)}^2}^{-1}(1-\beta)}{2p_2} \leq n \leq \frac{F_{\chi_{2(c+1)}^2}^{-1}(\alpha)}{2p_1}. \quad (13.12)$$

Qualquer valor de n que satisfaça (13.12) é solução do problema. Recomenda-se, no entanto, que se tome, por exemplo, o menor inteiro que satisfaça (13.12) para o valor da dimensão da amostra.

Exercício 13.3 — Considere os valores

- $p_1 = AQL = 0.01$,
- $p_2 = LTPD = 0.10$,
- $\alpha = 0.05$ (risco do produtor) e
- $\beta = 0.10$ (risco do consumidor),

e responda às questões seguintes:

- (a) Defina o plano de amostragem simples por atributos.
- (b) Obtenha uma tabela com valores aproximados da probabilidade associada de aceitação do lote para $p = 0.005, 0.01, 0.04, 0.065, 0.1, 0.15$.
- (c) Esboce o gráfico da curva OC do tipo B.
- (d) Repita (a)–(c), resolvendo o sistema de inequações

$$(n, c) : \begin{cases} P_a(p_1) \geq 1 - \alpha \\ P_a(p_2) \leq \beta, \end{cases} \quad (13.13)$$

considerando agora a distribuição exacta de D (hipergeométrica) e o tamanho do lote igual a $N = 800$. Comente.

- (e) Repita (d) considerando somente a aproximação binomial à hipergeométrica na resolução do problema.
- (f) Compare as três curvas OC obtidas. •

Fonte: Constantino (2004, pp. 13–21).

13.3 A norma Military Standard 105 (ANSI/ASQC Z1.4)

A norma **Military Standard 105D**⁵ ou uma sua versão civil, como é o caso de **norma ANSI/ASQC Z1.4-1981** surge como **alternativa à resolução do sistema (13.13)** para a definição de um plano de amostragem de aceitação simples por atributos.

Ao invés dos valores correspondentes à dimensão do lote N e aos pontos do risco do produtor ($AQL, 1 - \alpha$) e do consumidor ($LTPD, \beta$), a **norma ANSI/ASQC Z1.4-1981** requer simplesmente o índice **AQL** e a **letra de código da dimensão da amostra** (*sample size code letter*)⁶ para a **obtenção do plano de amostragem** considerado acima.

De realçar que só é possível considerar certos valores para o índice AQL. O **valor mínimo** e **máximo** de **AQL** correspondem a **0.01%** e **10%**, respectivamente. Saliente-se que os **valores tabelados superiores a 10%** correspondem ao **número de defeitos por cada 100 unidades** e não à percentagem de defeituosos.

É importante notar que a norma não dá qualquer indicação acerca da probabilidade de aceitação do plano de amostragem ao nível do índice AQL, nem tão pouco dá qualquer informação acerca de LTPD e respectiva probabilidade de aceitação.

A **letra de código da dimensão da amostra** é obtida por recurso à **Tabela I** (*Sample Size Code Letters*) da **norma ANSI/ASQC**

⁵A versão original desta norma, MIL-STD 105A, data de 1950, de acordo com Montgomery (1985, p. 389).

⁶Esta designação deveras enganadora diz, na verdade, respeito ao tamanho do lote mas é por utilização desse código que se obtém, posteriormente e por recurso a outra tabela, a dimensão da amostra.

Z1.4-1981, determinando a linha onde se situa o intervalo onde se enquadra a dimensão do lote. Nessa mesma linha encontra-se, consoante o nível geral de inspeção (aqui será sempre considerado o nível II geral de inspeção), a correspondente letra de código da dimensão da amostra.

Por exemplo, o código obtido para a dimensão da amostra é a letra H para lotes com dimensões compreendidas no intervalo entre 281 e 500, ao considerar-se o nível II geral de inspeção.

Inspeccionando a **Tabela II-A** (*Single Sampling Plans for Normal Inspection*) da **norma ANSI/ASQC Z1.4-1981**, obtém-se a dimensão da amostra n na linha correspondente ao código da dimensão da amostra. E ao intersectar esta linha com a coluna correspondente ao valor do índice AQL, obtém-se a constante de aceitação c . Está assim definido o plano de amostragem de aceitação simples por atributos.

A título de exemplo, ao considerar-se o nível II geral de inspeção, **AQL=1% e N entre 281 e 500**, obtém-se o plano de amostragem caracterizado por $n = 50$ e $c = 1$.

Exercício 13.4 — **Averigúe** quão concordantes são os planos obtidos no Exercício 13.3 com o plano de amostragem determinado pela norma ANSI/ASQC Z1.4-1981, no que diz respeito à curva OC. Relembre-se que naquele exercício considerou-se $N = 800$, $AQL = p_1 = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $LTPD = p_2 = 0.1$ e $\beta = 0.1$. •

Exemplo 13.5 — A Tabela 13.1 permite uma comparação entre as constantes n e c dos planos de amostragem simples obtidos pela norma ANSI/ASQC Z1.4-1981 e dos planos obtidos resolvendo o sistema

(13.6) fazendo uso da distribuição exacta de D , considerando para o efeito o tamanho do lote igual a $N = 800$ e diversos valores dos pontos do consumidor e do produtor.

Tabela 13.1: Planos de amostragem obtidos por uso da norma ANSI/ASQC Z1.4-1981 e por recurso à distribuição hipergeométrica, para $N = 800$, $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.1$.

$p_1 = AQL$	$p_2 = LTPD$	Norma ANSI/ASQC Z1.4-1981		Hipergeométrica	
		n	c	n	c
0.0001	0.001	800	0	720	0
0.001	0.01	125	0	325	1
0.001	0.05	125	0	74	1
0.01	0.1	80	2	37	1
0.04	0.2	80	7	32	3
0.04	0.3	80	7	16	2
0.1	0.2	80	14	96	14
0.1	0.3	80	14	33	6

Esta tabela revela uma série de diferenças entre os planos de amostragem obtidos pela norma e pelo sistema (13.6). Estas diferenças devem-se ao facto de serem considerados pela norma diferentes valores para o LTPD, sobre os quais não existe, por sinal, qualquer referência. Aliás, a norma vai fazendo uso de diferentes índices de LTPD para diferentes valores de AQL.

De assinalar, igualmente, a evolução do tamanho da amostra para planos de amostragem em que só varia o valor de p_2 . Assim, mantendo p_1 constante e à medida que p_2 vai aumentando, o valor obtido para a dimensão da amostra n vai diminuindo (para a distribuição hipergeométrica). Tal deve-se ao facto de um plano de amostragem com valores de p_1 e p_2 relativamente próximos ter que ser mais sensível a pequenas alterações ao nível da qualidade, exigindo, por isso, que se

recolha uma amostra de dimensão maior.

Repare-se por fim que, para um valor baixo de p_1 , o plano de amostragem requer uma dimensão de amostra elevada: por sinal, para a norma ANSI/ASQC Z1.4-1981, é necessária uma inspeção a 100%; o valor obtido para n considerando a distribuição hipergeométrica não lhe é muito inferior. •

Recomenda-se vivamente a leitura de Montgomery (1985, pp. 389–413) para mais detalhes acerca da utilização das tabelas MIL-STD 105D e similares, nomeadamente no que diz respeito aos níveis de inspeção.

Por curiosidade refira-se que existem três níveis gerais de inspeção (*general inspection levels*). A saber:

- **Nível II** (*Level II*) — é designado também de **nível normal de inspeção** (*normal level*);
- **Nível I** (*Level I*) — requer cerca de metade da quantidade de unidades a inspeccionar que o nível II, é designado de **nível reduzido de inspeção** (*reduced level*) e o seu uso é recomendado quando não se pretende grande poder de discriminação entre lotes “bons” e “maus”;
- **Nível III** (*Level III*) — requer cerca do dobro da quantidade de unidades a inspeccionar que o nível II, é denominado de **nível “rigoroso” de inspeção** (*tightened level*) e recomenda-se o seu uso quando se pretende uma grande discriminação entre lotes “bons” e “maus”.

A forma como se transita entre estes três níveis é também descrita por Montgomery (1985, pp. 390–391).

Refira-se também que existem quatro níveis especiais de inspeção (*special inspection levels*), $S1, S2, S3, S4$. De acordo com Montgomery (1985, p. 390), os níveis especiais de inspeção requerem amostras de dimensão pequena e só devem ser usados quando os custos de inspeção são proibitivos e quando pode tolerar-se uma certa falta de poder discriminatório por parte do plano de amostragem.

Fonte (parcial): Constantino (2004, pp. 21–24).

Texto de apoio: Montgomery (1985, pp. 389–413).

13.4 Planos de amostragem de aceitação simples por atributos – com rectificação da inspecção

Por um lado parece perfeitamente **razoável** que, face à **aceitação de um lote**, se

- **substitua todas as unidades amostrais** que tendo sido inspeccionadas revelaram-se **defeituosas** e
- **não se inspecione as restantes $N - n$ unidades do lote.**

Por outro lado a rejeição de um lote deverá desencadear uma acção correctiva por parte do produtor que compreenda não só a substituição das unidades amostrais inspeccionadas e defeituosas como a inspecção das restantes $N - n$ unidades do lote e a substituição de eventuais unidades defeituosas. Em resumo, a **rejeição de um lote** deve ter como resultado

- uma **inspecção a 100%** do mesmo e
- a **substituição de todas as unidades defeituosas** do lote.

A este tipo de procedimento damos o nome de **rectificação da inspecção**. Esta designação tem a sua razão de ser já que as acções acabadas de descrever acabam por resultar numa “melhoria/rectificação” da qualidade do lote.

Os planos com rectificação da inspecção são anteriores à II Guerra Mundial e são normalmente usados na inspecção de matéria-prima ou produtos semi-acabados (*receiving inspection*) antes de seguirem no processo de produção ou antes de os produtos acabados (*final inspection*) seguirem para os consumidores.

Após a rectificação da inspecção, a fracção de unidades defeituosas nos lotes diminui, muito em particular nos lotes rejeitados. Importa

pois calcular a fracção de unidades defeituosas após a rectificação da inspecção. Para tal recorre-se ao que se designa de **qualidade média à saída** e se representa abreviadamente por **AOQ** (*average outgoing quality*).⁷

Para calcular **AOQ** basta notar que **após a rectificação da inspecção**:

- acabamos por ficar com **0 (zero) unidades defeituosas** no lote, caso se tenha rejeitado o lote.
- **restam em média $p(N - n)$ unidades defeituosas** entre as restantes $N - n$ unidades não inspeccionadas do lote, caso o lote tenha sido aceite.⁸

Dividindo estes dois números pela dimensão do lote N obtém-se a fracção desejada:

$$\begin{aligned} AOQ &= AOQ(p) \\ &= \frac{1}{N} \times \{0 \times [1 - P_a(p)] + p(N - n) \times P_a(p)\} \\ &= \frac{p(N - n) P_a(p)}{N}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Este indicador é, obviamente, bem aproximado por $p P_a(p)$, caso n/N seja suficientemente pequeno. De referir também que as **curvas $AOQ(p)$** estão sempre abaixo da recta $y = x$.⁹

Exercício 13.6 — Esboce e compare as curvas $AOQ(p)$, associadas a um par de planos de amostragem simples à sua escolha de entre os descritos na Tabela 13.1, ao adoptar-se rectificação da inspecção. •

⁷Convém voltar a referir que AOQ, ao contrário do que possa sugerir esta designação, corresponde à fracção de unidades defeituosas após a rectificação da inspecção.

⁸Recorde-se que entre as n unidades amostrais de um lote aceite não há quaisquer unidades defeituosas após a rectificação da inspecção.

⁹Basta ter em conta a expressão (13.14) que define $AOQ(p)$.

Ao esboçar curvas $AOQ(p)$ rapidamente se conclui que **AOQ** é uma **função monótona por troços**:

- começa por ser **monótona crescente** para **valores pequenos da fracção original de unidades defeituosas p** ;
- atinge um valor máximo e é, naturalmente, **decrecente** para valores de p associados a **lotes originalmente com má qualidade**.

Ao máximo de $AOQ(p)$, $p \in (0, 1)$, dá-se o nome de (*Average Outgoing Quality Limit*) ou limite AOQ e representamo-lo por **AOQL**; trata-se da **maior das fracções de unidades defeituosas** devido à adopção de rectificação da inspecção.

Por seu lado, $\left[1 - \frac{AOQ(p)}{p}\right] \times 100\%$ corresponde à **redução relativa da fracção de unidades defeituosas** nos lotes graças à **rectificação da inspecção**.

A **rectificação da inspecção** imprime não só um **carácter aleatório** ao número de unidades defeituosas num lote como ao **número de unidades que é necessário inspeccionar**. Se por um lado num plano de amostragem simples são recolhidas n unidades do lote, por outro **ao efectuar rectificação da inspecção** acabamos por inspeccionar um total de:

- n unidades, caso o lote seja aceite;
- N unidades, caso o lote seja rejeitado.

O número esperado de unidades inspeccionadas é designado na literatura anglo-saxónica por **ATI** (*average total inspection*) e é uma outra medida de desempenho do plano de amostragem simples com rectificação da inspecção, e por sinal igual a

$$ATI = ATI(p) = nP_a(p) + N[1 - P_a(p)]. \quad (13.15)$$

Exercício 13.7 — Esboce agora as curvas $ATI(p)$ para dois dos planos de amostragem simples descritos na Tabela 13.1, assumindo rectificação da inspecção.

Confronte-as com o número de unidades inspeccionadas caso não se tivesse adoptado rectificação da inspecção. •

É perfeitamente natural que **AOQL** e **ATI** sirvam, em conjunto, de **critério para a selecção de um plano de amostragem simples com rectificação da inspecção**. Com efeito, Montgomery (1985, pp.372–373) sugere que se fixe um valor para AOQL e simultaneamente se minimize ATI, para um valor específico de p , obtendo-se assim o que usualmente se designa por **plano AOQL**. Analogamente, pode procurar-se escolher um plano de amostragem simples com rectificação da inspecção com um risco fixo ao nível LTPD que minimize o ATI para um valor específico de p , obtendo-se deste modo um **plano LTPD**.

Os valores de n e c que respeitam (aproximadamente) um destes dois critérios de selecção encontram-se em tabelas que se devem a **Dodge e Romig** e cuja utilização é descrita aturadamente em Montgomery (1985, Sec.10-6).

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, pp.122-125); Montgomery (1985, pp. 368–373).

13.5 Planos de amostragem de aceitação dupla por atributos – com e sem rectificação da inspecção

A extensão natural óbvia dos planos de amostragem simples compreende duas etapas de amostragem, sendo que a segunda amostra é recolhida somente em determinadas circunstâncias. Os planos resultantes denominam-se **planos de amostragem dupla** e são definidos à custa de quatro parâmetros:

- n_1 , a **dimensão da primeira amostra**;
- c_1 , o **número de aceitação da primeira amostra**;
- n_2 , a **dimensão da segunda amostra**;
- c_2 , o **número de aceitação face à recolha das duas amostras**;

Dado que há a possibilidade de recolher duas amostras lida-se com duas v.a. D_1 e D_2 que representam os números de unidades defeituosas na primeira e na segunda amostras. Posto isto pode recorrer-se ao esquema abaixo para descrever sumariamente um plano de amostragem dupla:

Figura 13.1: Descrição esquemática de um plano de amostragem dupla.



Montgomery (1985, pp. 374–375) aponta não só **vantagens** como algumas **desvantagens** aos planos de **amostragem dupla** quando confrontados com os planos de amostragem simples.

A título de exemplo refere que o recurso a planos de amostragem dupla pode resultar numa **diminuição dos custos de inspecção**, para além da vantagem psicológica de **dar ao lote** (e, é claro, ao produtor) uma **segunda oportunidade**.

Por sinal, ao dar-se esta segunda oportunidade ao lote, podemos **ter que inspeccionar uma segunda amostra** até ao fim a menos que se decida fazer o que se designa por **censura** (*curtailment*) e consiste em dar por finda a inspecção da segunda amostra assim que o número registado de unidades defeituosas nas duas amostras exceda c_2 . É pois natural que, **sem uma escolha criteriosa dos parâmetros** n_1 , c_1 , n_2 e c_2 e **sem a adopção de censura**, se possa **pôr em risco as potenciais vantagens económicas** dos planos de amostragem dupla.

Por fim, outra **desvantagem** óbvia dos planos de amostragem dupla prende-se com a **eventual complexidade** deste **procedimento** e dos **erros de inspecção** daí decorrentes.

Como seria de esperar, os planos de amostragem dupla requerem um cuidado particular no cálculo de medidas de desempenho como a probabilidade de aceitação do lote, bem como a determinação de uma medida adicional de desempenho: a **dimensão média da amostra** (*average sample number*).

Sejam $P_a^I(p)$ e $P_a^{II}(p)$ as probabilidades de aceitação do lote na primeira e segunda fases do plano de amostragem simples. Ora, de acordo com o esquema da Figura 13.1, pode afirmar-se que

$$P_a^I(p) = P(D_1 \leq c_1) \tag{13.16}$$

$$\begin{aligned}
P_a^{II}(p) &= P(c_1 < D_1 \leq c_2, D_1 + D_2 \leq c_2) \\
&= \sum_{k=c_1+1}^{c_2} P(D_1 = k) \times P(D_2 \leq c_2 - k), \quad (13.17)
\end{aligned}$$

pelo que a **probabilidade de aceitação do lote** é, para um plano de amostragem dupla, dada por:

$$P_a(p) = P_a^I(p) + P_a^{II}(p). \quad (13.18)$$

A esta função é usual dar o nome de **curva OC primária** (*primary OC curve*) do plano de amostragem dupla. Às probabilidades de aceitação e rejeição do lote à primeira amostra, $P_a^I(p)$ e $1 - P_a^I(p)$, é costume dar o nome de **curvas OC suplementares** (*supplementary OC curves*).

Saliente-se também que $P_a^I(p)$ mais não é que a **probabilidade de aceitação** de um lote associada a um **plano de amostragem simples com $n = n_1$ e $c = c_1$** .

De assinalar que **sob a validade da aproximação binomial** obtemos as seguintes **curvas OC do tipo B** das quais depende a aproximação de $P_a(p)$, também ela uma curva OC do tipo B:

$$P_a^I(p) \simeq F_{Bin(n_1,p)}(c_1) \quad (13.19)$$

$$P_a^{II}(p) \simeq \sum_{k=c_1+1}^{c_2} P_{Bin(n_1,p)}(k) \times F_{Bin(n_2,p)}(c_2 - k). \quad (13.20)$$

Exercício 13.8 —

- Esboce as três curvas OC do tipo B que aproximam $P_a^I(p)$, $P_a^{II}(p)$ e $P_a(p)$ para um plano de amostragem dupla caracterizado por $n_1 = 50$, $c_1 = 1$, $n_2 = 100$ e $c_2 = 3$. Acompanhe estas curvas por valores destas funções para valores de p à sua escolha.
- Compare e comente a curva OC primária de tipo B com a probabilidade de aceitação de um lote associada a um plano de amostragem simples com $n = 75$ e $c = 2$. •

É altura de nos debruçarmos sobre a **dimensão média da amostra**, que se designará abreviadamente por **ASN**.

Ao ter presente o esquema da Figura 13.1 rapidamente se conclui que às n_1 unidades amostrais vêm acrescidas outras n_2 unidades amostrais, caso a primeira amostra não conduza nem à aceitação do lote nem à rejeição do mesmo. Assim:

$$\begin{aligned}
ASN &= ASN(p) \\
&= n_1 \times [P(D_1 \leq c_1) \\
&\quad + P(D_1 > c_2)] + (n_1 + n_2) \times P(c_1 < D_1 \leq c_2) \\
&= n_1 + n_2 \times P(c_1 < D_1 \leq c_2). \quad (13.21)
\end{aligned}$$

Exercício 13.9 — Considere um plano de amostragem dupla caracterizado por $n_1 = 50$, $c_1 = 2$, $n_2 = 100$ e $c_2 = 6$.

- Determine valores (aproximados) de $ASN(p)$ e esboce o gráfico dessa mesma curva.
- Compare $ASN(p)$ e a dimensão (média) da amostra de um plano de amostragem simples com $n = 79$ e $c = 4$. Comente. •

O exercício anterior permite concluir que a dimensão média da amostra dos planos de amostragem dupla nem sempre é inferior à dimensão fixa dos planos de amostragem simples com riscos idênticos. Não surpreende pois que na prática se efectue **censura** (*curtailment*) na segunda amostra de um **plano de amostragem dupla**, censura esta que consistem em **interromper a inspeção da segunda amostra assim que $D_1 + D_2 > c_2$** . Face a esta modificação, o **ASN** do plano de amostragem dupla vem **alterado**:

$$\begin{aligned}
ASN(p) &= n_1 + \sum_{j=c_1+1}^{c_2} P(n_1, j) \times [n_2 P_L(n_2, c_2 - j) \\
&\quad + (c_2 - j + 1)/p \times P_M(n_2 + 1, c_2 - j + 2)], \quad (13.22)
\end{aligned}$$

onde, caso se considere que $D(\nu)$ representa o número de unidades defeituosas numa amostra de dimensão ν ,

$$P(n_1, j) = P[D(n_1) = j] \quad (13.23)$$

$$P_L(n_2, c_2 - j) = P[D(n_2) \leq c_2 - j] \quad (13.24)$$

$$P_M(n_2 + 1, c_2 - j + 2) = P[D(n_2 + 1) = c_2 - j + 2]. \quad (13.25)$$

Exercício 13.10 — Deduza a expressão de $ASN(p)$ para planos de amostragem dupla sem censura (Craig, 1968). •

Exercício 13.11 — Considere um plano de amostragem dupla com censura caracterizado por $n_1 = 60$, $c_1 = 2$, $n_2 = 120$ e $c_2 = 3$.

- Determine valores de $ASN(p)$ e esboce o gráfico desta curva.
- Confronte a curva OC primária do tipo B deste plano de amostragem com o de um plano de amostragem simples com $n = 89$ e $c = 2$.
- Compare $ASN(p)$ e a dimensão da amostra do plano de amostragem simples referido em (b). •

A selecção de n_1 , c_1 , n_2 e c_2 pode fazer-se exigindo que a curva OC passe o mais próximo possível de um par de pontos de risco do produtor e do consumidor: ($AQL = p_1, 1 - \alpha$) e ($LTPD = p_2, \beta$). Mas como seria de esperar estes dois pontos são insuficientes para definir univocamente aqueles quatro parâmetros, pelo que é usual acrescentar-lhe algumas restrições, nomeadamente, exigir que n_2 seja um múltiplo de n_1 e que a razão p_2/p_1 tome um valor específico. Assim, a **selecção de planos de amostragem dupla** passa pela consulta de tabelas próprias, usualmente designadas de **Tabelas de Grubbs**.

Em Montgomery (1985, pp. 379–381) pode encontrar-se dois exemplos dessas tabelas¹⁰ e ilustrações da utilização das mesmas.

Exercício 13.12 — Recorra às tabelas de Grubbs por forma a definir um plano de amostragem dupla com $p_1 = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $\beta = 0.10$ e $n_2 = 2n_1$.

Obtenha a respectiva curva OC primária do tipo B e $ASN(p)$. •

Resta-nos falar do impacto da **rectificação da inspecção** neste tipo de planos de amostragem e já agora da **selecção de planos de amostragem dupla**.

A **rectificação da inspecção num plano de amostragem dupla sem censura** conduz a uma **qualidade média à saída AOQ** igual a

$$AOQ(p) = \frac{p[(N - n_1) P_a^I(p) + (N - n_1 - n_2) P_a^{II}(p)]}{N}, \quad (13.26)$$

já que:

- ao rejeitar-se um lote à primeira ou à segunda amostra há inspecção de todo o lote e substituição de todas as unidades defeituosas e
- em média restam $p(N - n_1)$ unidades defeituosas, caso o lote seja aceite à primeira amostra, e $p(N - n_1 - n_2)$ unidades defeituosas, caso tal aceitação ocorra à segunda amostra.

Por seu lado, o número médio de unidades inspeccionadas **ATI** num **plano de amostragem dupla sem censura e com rectificação da inspecção** é dado por:

¹⁰Na Tabela 10-3 da página 380 desta referência encontram-se os números de aceitação c_1 e c_2 , para o caso em que $n_1 = n_2 = n$, $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.10$ e diversos valores de n e respectivas razões p_2/p_1 . Por seu lado a Tabela 10-4 da página 381 reporta-se ao caso $n_2 = 2n_1$, $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.10$.

$$ATI(p) = n_1 P_a^I(p) + (n_1 + n_2) P_a^{II}(p) + N[1 - P_a(p)], \quad (13.27)$$

dado que são inspeccionadas

- n_1 unidades se a primeira amostra conduzir à aceitação do lote;
- $n_1 + n_2$ unidades se a aceitação do lote decorrer do resultado da inspeção da segunda amostra;
- N unidades se houver rejeição do lote quer à primeira amostra, quer à segunda amostra.

Exercício 13.13 — Considere o plano de amostragem dupla com $p_1 = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $\beta = 0.10$ e $n_2 = 2n_1$ que definiu no Exercício 13.12.

- (a) Obtenha a curva $AOQ(p)$, determine $AOQL$ e comente os seus resultados.
- (b) Esboce o gráfico de $ATI(p)$ e compare este gráfico com o número médio de unidades inspeccionadas de um plano de amostragem simples com rectificação da inspeção com os pontos de risco do produtor e do consumidor similares. •

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, pp. 125-128); Montgomery (1985, pp. 373-382).

13.6 Planos de amostragem de aceitação para variáveis

Quando a **característica de qualidade** é uma v.a. **contínua**, nomeadamente quando se assume que possui distribuição normal, o **tratamento** ao nível dos planos de amostragem é totalmente **distinto**.

É, de um modo geral, adoptado um intervalo $[L, U]$ de valores razoáveis para a característica de qualidade, onde os limites L e U são denominados de **limite inferior** e **superior** de especificação.

Sem qualquer risco de perda de generalidade, não abordaremos o caso em que são usados dois limites de especificação. Considere-se **apenas** o **caso** em que se faz uso de um **limite superior de especificação** U .

Posto isto uma unidade amostral é considerada defeituosa, caso o correspondente valor observado da característica de qualidade X exceda o limite superior de especificação U . Assim, a **fracção de peças defeituosas** é dada por

$$p = P(X > U) = 1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right), \quad (13.28)$$

caso se assuma que $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$.

Ao contrário da amostragem de aceitação por atributos que assenta no número de unidades defeituosas numa amostra, o **plano de amostragem** para variáveis **baseia a decisão de aceitação ou rejeição do lote** naquilo se designa por **índice de qualidade** que não passa de uma estatística. Para além disso, a definição do **plano de amostragem para variáveis** passa pela determinação de uma **dimensão da amostra** e de uma **constante de aceitação**

que estejam **associados a pontos de risco do produtor e do consumidor** pré-especificados.

Convinha também notar que o **plano de amostragem de aceitação** para variáveis auxiliar-nos-á a **evitar que sejam expedidos lotes com valor esperado μ** da característica de qualidade X **demasiado elevado** ou, equivalentemente, com uma fracção de peças defeituosas¹¹ demasiado elevada.

Por seu lado, a **determinação das curvas OC**, embora similar à da amostragem de aceitação por atributos, conduz, de um modo geral, a **cálculos mais complexos**. Estes cálculos estão omissos na generalidade dos livros, que, após uma explicação normalmente exhaustiva sobre as curvas OC em planos de amostragem por atributos, se limitam a referir que tais curvas se obtêm de forma análoga para os planos de amostragem para variáveis.

Bowker e Goode (1952) é uma excepção. Refere, por exemplo, a forma como se obtêm as curvas OC para os planos para variáveis: os planos de amostragem para variáveis são definidos de forma que a curva OC se aproxime o mais possível da correspondente curva OC obtida para os planos por atributos para um mesmo valor de AQL.

Refira-se também que, no início deste capítulo, foi referida uma vantagem dos planos de amostragem por variáveis. Esta vantagem prende-se essencialmente com o facto de ser possível obter uma curva OC similar à de um plano de amostragem por atributos recorrendo para o efeito a um plano de amostragem para variáveis com menor número de observações. Este facto é particularmente importante se notarmos que o **custo das medições** requeridas num **plano de**

¹¹Definida por exemplo por (13.28).

amostragem para variáveis é **superior** ao correspondente custo num plano por atributos.

De assinalar também que as **medições** usadas num **plano de amostragem para variáveis** proporcionam **informação mais detalhada** acerca da **qualidade do lote** que as medições associadas a planos de amostragem por atributos. Não surpreende pois que este tipo de planos seja preterido a favor de planos de amostragem para variáveis, quando o valor de AQL é muito pequeno como é caso de situações em que este indicador é medido em número de defeitos por milhão.

Montgomery (1985, p. 432) aponta também algumas desvantagens. O recurso a um **plano de amostragem para variáveis pressupõe que se conheça a distribuição da característica de qualidade. É frequente assumir** que se trata de uma distribuição **normal**.

E, como seria de esperar, o uso de um **plano de amostragem de aceitação, que assuma incorrectamente** que os dados têm **distribuição normal**, está necessariamente associado a **riscos** do produtor e do consumidor **distintos** do que seriam esses **riscos sob a validade da distribuição normal**.¹²

Fonte (parcial): Constantino (2004, pp. 25–26).

Texto de apoio: Montgomery (1985, pp. 431–432).

¹²Vejam-se os resultados em Constantino (2004, Caps.4–5), para as distribuições gaussianas inversa e exponencial.

13.7 Planos de amostragem de aceitação para variáveis — distribuição gaussiana: desvio padrão conhecido

Ao lidarmos com uma característica de qualidade com distribuição normal com valor esperado desconhecido e desvio padrão conhecido, teremos certamente que ter presente que deveremos rejeitar lotes quando a média amostral for consideravelmente grande, caso se esteja a lidar com um limite de especificação superior.

Posto isto e considerando um limite superior de especificação U , o plano de amostragem simples para variáveis deverá conduzir à aceitação do lote se a média amostral \bar{x} satisfaz $\bar{x} + k_\sigma \sigma \leq U$, onde k_σ denota a **constante de aceitação**.

Ou seja, o **lote** será **aceite** se

$$Q = \frac{U - \bar{X}}{\sigma} \geq k_\sigma, \quad (13.29)$$

onde Q é denominado de **índice de qualidade** e \bar{X} depende, naturalmente, da **dimensão da amostra** n_σ .

E, tal como para os planos de amostragem por atributos, os planos para variáveis serão definidos à custa de n_σ e k_σ que satisfaçam as duas condições seguintes:

- se a fracção de unidades defeituosas for igual a $p_1 = 1 - \Phi[(U - \mu_1)/\sigma]$,¹³ deve aceitar-se o lote com probabilidade elevada $1 - \alpha$;
- se a fracção de defeituosos for $p_2 = 1 - \Phi[(U - \mu_2)/\sigma] > p_1$,¹⁴ deve aceitar-se o lote com probabilidade pequena β .

¹³Equivalentemente, se o valor esperado de X for igual a μ_1 .

¹⁴Equivalentemente, se o valor esperado de X for igual a μ_2 .

O método de obtenção das constantes n_σ e k_σ encontra-se descrito em Wetherill e Brown (1991, pp. 271–275), embora de forma um pouco menos clara:

$$(n_\sigma, k_\sigma) : \begin{cases} P(Q \geq k_\sigma \mid \mu = \mu_1) = 1 - \alpha \\ P(Q \geq k_\sigma \mid \mu = \mu_2) = \beta \\ P(\bar{X} \leq U - k_\sigma \sigma \mid \mu = \mu_1) = 1 - \alpha \\ P(\bar{X} \leq U - k_\sigma \sigma \mid \mu = \mu_2) = \beta \\ \Phi\left(\frac{U - k_\sigma \sigma - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n_\sigma}}\right) = 1 - \alpha \\ \Phi\left(\frac{U - k_\sigma \sigma - \mu_2}{\sigma/\sqrt{n_\sigma}}\right) = \beta. \end{cases} \quad (13.30)$$

Notando agora que a **fracção de unidades defeituosas** (p) está **relacionada** com o **valor esperado** (μ) da característica de qualidade X do seguinte modo

$$\mu = U + \sigma \Phi^{-1}(p), \quad (13.31)$$

obtem-se sucessivamente:

$$(n_\sigma, k_\sigma) : \begin{cases} \Phi\{\sqrt{n_\sigma}[-k_\sigma - \Phi^{-1}(p_1)]\} = 1 - \alpha \\ \Phi\{\sqrt{n_\sigma}[-k_\sigma - \Phi^{-1}(p_2)]\} = \beta \\ k_\sigma = \Phi^{-1}(p_1) - \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{n_\sigma}} \\ k_\sigma = \Phi^{-1}(p_2) - \frac{\Phi^{-1}(\beta)}{\sqrt{n_\sigma}} \\ n_\sigma = \left[\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha) - \Phi^{-1}(\beta)}{\Phi^{-1}(p_2) - \Phi^{-1}(p_1)}\right]^2 \\ k_\sigma = \frac{\Phi^{-1}(p_2)\Phi^{-1}(1-\alpha) - \Phi^{-1}(p_1)\Phi^{-1}(\beta)}{\Phi^{-1}(\beta) - \Phi^{-1}(1-\alpha)}. \end{cases} \quad (13.32)$$

Na prática n_σ terá de ser aproximado pelo menor valor inteiro n_σ^* que satisfaça

$$\begin{cases} P_a(p_1) \geq 1 - \alpha \\ P_a(p_2) \leq \beta, \end{cases} \quad (13.33)$$

de um modo geral, $n_\sigma^* = \left\lceil \left[\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha) - \Phi^{-1}(\beta)}{\Phi^{-1}(p_2) - \Phi^{-1}(p_1)}\right]^2 \right\rceil$. Note-se que $P_a(p)$ representa a probabilidade de aceitação do lote que pode ser

indistintamente escrita à custa do valor esperado μ ou da fracção de peças defeituosas p :

$$P_a(p) = \Phi\left(\frac{U - k_\sigma \sigma - \mu}{\sigma/\sqrt{n_\sigma}}\right) = \Phi\left\{\sqrt{n_\sigma}[-k_\sigma - \Phi^{-1}(p)]\right\}. \quad (13.34)$$

Trata-se, pois, da **curva OC** para um plano de amostragem de aceitação para variáveis com limite superior de especificação.¹⁵

Exercício 13.14 — Considere os seguintes pontos de risco do produtor e do consumidor ($p_1 = 0.01$, $1 - \alpha = 0.95$) e ($p_2 = 0.07$, $\beta = 0.10$).

- Tirando partido do resultado (13.32) e das condições em (13.33), certifique-se que o valor da dimensão da amostra e da constante de aceitação são, respectivamente, $n_\sigma = 12$ e $k_\sigma = 1.848273$.
- Justifique que os valores da dimensão da amostra e da constante de aceitação seriam $n = 72$ e $c = 2$, caso se considerasse um plano de amostragem por atributos para os mesmos pontos de risco do produtor e do consumidor, se recorresse à distribuição exacta hipergeométrica e se considerasse a dimensão do lote igual a $N = 500$.
- Represente as curvas OC para estes dois tipos de planos de amostragem de aceitação para variáveis e por atributos. Comente. •

Na Secção 13.9 debruçar-nos-emos sobre a utilização de uma norma, forma alternativa de obtenção de valores para n_σ e k_σ .

Fonte: Constantino (2004, pp. 26–31).

¹⁵De notar que (13.33) significa que a curva OC passará acima do ponto de risco do produtor e abaixo do ponto de risco do consumidor.

13.8 Planos de amostragem de aceitação para variáveis — distribuição gaussiana: desvio padrão desconhecido

Analise-se agora a situação em que o desvio padrão é desconhecido.

Neste caso o índice de qualidade será não só função de \bar{X} mas também função do estimador centrado de σ^2 ,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (13.35)$$

e o procedimento de obtenção dos valores da dimensão da amostra (n_s) e da constante de aceitação (k_s) para o plano de amostragem de aceitação para variáveis é sem sombra de dúvida mais complexo.

Ao considerar-se mais uma vez um limite superior de especificação U deve aceitar-se um lote se $\bar{x} + k_s s \leq U$ ou, equivalentemente, e em termos do **índice de qualidade**, se:

$$Q = \frac{U - \bar{X}}{S} \geq k_s. \quad (13.36)$$

Antes de proceder à obtenção da **probabilidade de aceitação**, ao lidar-se com uma fracção de unidades defeituosas igual a $p = 1 - \Phi[(U - \mu)/\sigma]$, é necessário relembrar/considerar:

- $Z = \sqrt{n_s}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0,1)$;
- $Y = \frac{(n_s-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_s-1}^2$;
- $\delta = \frac{\sqrt{n_s}(\mu-U)}{\sigma} = \sqrt{n_s} \Phi^{-1}(p)$;
- $T = (Z + \delta)/\sqrt{Y/(n_s - 1)}$ que representa uma variável aleatória com distribuição t não-central com $n_s - 1$ graus de liberdade e parâmetro de “não centralidade” δ .

Assim sendo, tem-se a seguinte **curva OC** para o **plano de amostragem** de aceitação para **variáveis** com o **desvio-padrão desconhecido**:

$$\begin{aligned}
 P_a(p) &= P(Q \geq k_s \mid p) \\
 &= P(\bar{X} \leq U - k_s S \mid p) \\
 &= P\left[\frac{Z + \delta}{\sqrt{Y/(n_s - 1)}} \leq -\sqrt{n_s} k_s \mid p\right] \\
 &= P\left[T \leq -\sqrt{n_s} k_s \mid \delta = \sqrt{n_s} \Phi^{-1}(p)\right]. \quad (13.37)
 \end{aligned}$$

Segundo Wetherill e Brown (1991, p. 278), os planos de amostragem de aceitação para variáveis com desvio-padrão conhecido e desconhecido deverão ter praticamente a mesma curva OC, caso n_s e k_s sejam ajustados de tal forma que $\bar{X} + k_s S$ tenha o mesmo valor esperado e variância que $\bar{X} + k_\sigma \sigma$. Deste modo, obtêm-se as seguintes **aproximações** para n_s e k_s , em **função de** n_σ e k_σ :

$$\begin{cases} n_s = \left(1 + \frac{3n_s k_\sigma^2}{6n_s - 8}\right) n_\sigma & \Leftrightarrow & n_s = n_\sigma + \frac{u + \sqrt{u^2 + 24v}}{12} \\ k_s = \sqrt{\frac{3n_s - 3}{3n_s - 4}} k_\sigma, \end{cases} \quad (13.38)$$

onde

$$\begin{aligned}
 u &= 3n_\sigma (k_\sigma^2 - 2) + 8 \\
 v &= 3n_\sigma^2 k_\sigma^2.
 \end{aligned}$$

Mais uma vez deve aproximar-se n_s ao menor inteiro n_s^* que garanta que $P_a(p_1) \geq 1 - \alpha$ e $P_a(p_2) \leq \beta$.

De salientar que a dimensão n_s da amostra quando o desvio-padrão é desconhecido é, naturalmente, superior àquela necessária caso se conhecesse σ ; com efeito n_s/n_σ é igual a $\left(1 + \frac{3n_s k_\sigma^2}{6n_s - 8}\right)$, claramente superior à unidade. Por outro lado, a constante de aceitação k_s é praticamente igual a k_σ .

Dado que a utilização da distribuição t não-central não é corrente, recomenda-se o recurso à seguinte **aproximação** para a **curva OC**, aproximação esta originalmente proposta por Hamaker (1979) e disponível em Wetherill e Brown (1991, p. 278-279):

$$P_a(p) \simeq \Phi(\theta_\mu) = \Phi(\theta_p), \quad (13.39)$$

onde

$$\theta_\mu = \frac{U - \mu - k_s \sigma \sqrt{\frac{3n_s - 4}{3n_s - 3}}}{\sigma \sqrt{\frac{1 + \frac{3n_s k_s^2}{6n_s - 8}}{n_s}}} \quad (13.40)$$

$$\theta_p = \frac{\Phi^{-1}(1 - p) - k_s \sqrt{\frac{3n_s - 4}{3n_s - 3}}}{\sqrt{\frac{1 + \frac{3n_s k_s^2}{6n_s - 8}}{n_s}}}. \quad (13.41)$$

Exercício 13.15 — Considerando os pontos de risco do produtor e do consumidor do Exercício 13.14:

- Obtenha os valores (**aproximados**) das constantes n_s e k_s .
- Compare (os valores) das curvas OC (exacta e aproximada) com (os d)a curva OC obtida para o plano de amostragem para variáveis com desvio-padrão conhecido naquele exercício. Comente os resultados obtidos. •

Fonte: Constantino (2004, pp. 31–38).

13.9 A norma Military Standard 414 (ANSI/ASQC Z1.9)

A norma **Military Standard 414** ou uma sua versão civil, como é o caso de **norma ANSI/ASQC Z1.9-1980** (*Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Nonconforming*), surge como **alternativa a (13.32) e (13.38)** para a definição de um plano de amostragem de aceitação simples por variáveis com desvio-padrão conhecido e desconhecido, respectivamente.

A **consulta** da norma **ANSI/ASQC Z1.9-1980** é em tudo **similar** à da norma para atributos **ANSI/ASQC Z1.4-1981**, pelo que se sugere uma leitura breve de Montgomery (1985, pp. 439–453) e do exemplo que se segue, bem como a elaboração do Exercício 13.17.

Exemplo 13.16 — Proceda-se a uma comparação do plano de amostragem para variáveis com desvio-padrão conhecido, obtido recorrendo a (13.32), e do plano que se obtém por utilização da **norma ANSI/ASQC Z1.9-1980**.

Admita-se que $N = 500$ e que os pontos de risco do produtor e do consumidor ($p_1 = 0.01$, $1 - \alpha = 0.95$) e ($p_2 = 0.07$, $\beta = 0.10$).

Ao considerar-se o nível II geral de inspeção, pela observação da **Tabela A-2** (*Sample Size Code Letters*), o código obtido para a dimensão da amostra é a **letra I**, para lotes com dimensão do lote compreendida no intervalo entre 401 e 500.

A consulta da coluna respeitante ao valor de $AQL = p_1 = 0.01$, na **Tabela D-1** (*Master Table for Normal and Tightened Inspection for Plans Based on Variability Known*), permite obter o plano de amostragem de aceitação para variáveis com desvio-padrão conhecido: é, caracterizado por $n_\sigma = 9$ e $k_\sigma = 1.83$, valores estes ligeiramente

distintos dos referidos no Exercício 13.14.

Estas diferenças devem-se ao facto de a norma estar associada a: um valor da probabilidade de aceitação ao nível do índice $AQL = p_1 = 0.01$ distinto de $1 - \alpha = 0.95$; e muito provavelmente a um risco do consumidor diferente de $\beta = 0.10$. •

Na Tabela 13.2 confrontam-se os planos de amostragem para variáveis com σ desconhecido, para diferentes valores dos pontos de risco do consumidor e do produtor, obtidos pela norma e por utilização de (13.38).

Tabela 13.2: Alguns planos de amostragem para variáveis com σ desconhecido ($\beta = 0.10$), recorrendo norma ANSI/ASQC Z1.9-1980 e a (13.38).

p_1	α	p_2	Norma		(13.38)	
			n_s	k_s	n_s	k_s
0.001	0.05	0.04	25	2.50	20	2.36
0.0025	0.07	0.04	25	2.26	26	2.26
0.004	0.07	0.06	25	2.14	20	2.08
0.015	0.07	0.10	25	1.72	25	1.70
0.04	0.07	0.20	25	1.35	17	1.27
0.10	0.07	0.30	25	0.94	18	0.89

A análise da Tabela 13.2 permite concluir que os planos obtidos pela norma e pela expressão (13.38) conduzem a valores similares das constantes de aceitação e a algumas discrepâncias na dimensão da amostra. •

Exercício 13.17 — Considerando exactamente os mesmos parâmetros que no Exemplo 13.16:

(a) Certifique-se que a utilização da norma ANSI/ASQC Z1.9-1980

conduz aos valores $n_s = 25$ e $k_s = 1.85$ e compare-os com os obtidos na alínea (a) do Exercício 13.15.

- (b) Compare as curvas OC (exacta e aproximada) com a curva OC obtida para o plano de amostragem para variáveis com desvio-padrão desconhecido obtido na alínea anterior. •

Assinale-se por fim que, ao contrário da norma, (13.32) e (13.38) não fazem uso da dimensão do lote para determinação do plano de amostragem.

Para uma discussão aturada sobre a norma MIL STD 414 e as semelhanças entre esta norma e a MIL STD 105D, remete-se o leitor para Montgomery (1985, pp. 453–455).

Texto de apoio: Montgomery (1985, pp. 439–455).

Referências relevantes – Controle de Qualidade (Caps. 8-10,13)

- ANSI/ASQC Z1.9-1980 (1980). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Nonconforming*. American Society for Quality Control, Milwaukee, Wisconsin, EUA.
- ANSI/ASQC Z1.4-1981 (1981). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*. American Society for Quality Control, Milwaukee, Wisconsin, EUA.
- Casquilho, M., Constantino, M. e Morais, M.C. (2006). Sobre a amostragem de aceitação para a variável gaussiana inversa. Em *Ciência Estatística*, 267–277. Canto e Castro, L., Martins, E.G., Rocha, C., Oliveira, M.F., Leal, M.M. e Rosado, F. (eds.).
- Constantino, M. (2005). *Sobre a Amostragem de Aceitação para Variáveis Não-Gaussianas*. Trabalho de fim de curso, Dep. Matemática, IST, UTL. Orientadores: Prof.Drs. M.C.Morais e M. Casquilho.
- DeVor, R.E., Chang, T. e Sutherland, J.W. (1992). *Statistical Quality Design and Control: Contemporary Concepts and Method*. Macmillan Publishing Company.
(QA276/1.DEV.40794)
- Gomes, M.I. e Barão, M.I. (1999). *Controlo Estatístico de Qualidade*. Notas de mini-curso do VII Congresso Anual da SPE.
- Grant, E.L. e Leavenworth, R.S. (1996). *Statistical Quality Control* (7th edition). McGraw-Hill, New York, NY.
(TS156 GRA*STA)

- Hawkins, D.M e Olwell, D.H. (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*. Springer-Verlag, New York.
(CEMAT)
- Montgomery, D.C. (1985). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York.
- Montgomery, D.C. (1991). *Introduction to Statistical Quality Control* (2nd. edition). John Wiley & Sons, New York.
(QA276/1.MON.36911)
- Morais, M.J.C. (2001). *Stochastic Ordering in the Performance Analysis of Quality Control Schemes*. Tese de Doutoramento, DM-IST, UTL.
(17-11.54075)
- Morais, M.C. (2006). *Notas de Apoio de Fiabilidade e Controlo de Qualidade – Parte II* (Caps.8–11). Departamento de Matemática, IST, UTL.
(<http://www.math.ist.utl.pt/~mjmorais/FCQ2-0607-{cap8-cap11}.pdf>)
- Wadsworth, H.M., Stephens, K.S. e Godfrey, A.B. (1986). *Modern Methods for Quality Control and Improvement*. John Wiley & Sons, New York.
(QA276/1.WAD.38722)

Referências adicionais – Controlo de Qualidade (Caps. 8-10,13)

- Bartmann, F.C. (1986). *Idéias básicas do controle moderno de qualidade*. VII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- Blacksell, S.D., Gleeson, L.J., Lunt, R.A. e Chamnanpood, C. (1994). Use of combined Shewhart-CUSUM control charts in internal quality control of enzyme-linked immunosorbent assays for the typing of foot and mouth disease virus antigen. *Revue Scientifique et Technique* **13**, 687–699.
- Bowker, A.H. e Good, H.P. (1952). *Sampling Inspection by Variables*. McGraw-Hill, New York, NY.
(QA276.6.BOW.17074)
- Craig, C.C. (1968). The average sample number for truncated single and double attributes acceptance sampling plans. *Technometrics* **10**, 685–692.
- Derman, C. e Ross, S.M. (1997). *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, Inc.
- Johnson, D.G. (1984). Trial by computer — A case study of the use of simple statistical techniques in the detection of a fraud. *Journal of the Operational Research Society* **35**, 811–820.
- Morais, M.C. and Pacheco, A. (2000). On the performance of combined EWMA schemes for μ and σ : A Markovian approach. *Communications in Statistics — Simulation and Computation* **29**, 153–174.

- Olwell, D.H. (1997). Managing misconduct: statistical process control applied to sexual harassment. *1997 Proceedings of the Section on Quality and Productivity*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Shewhart, W. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. Van Nostrand, Princeton.
- St. John, R.C. e Bragg, D.J. (1991). Joint X-bar & R charts under shift in mu or sigma. *ASQC Quality Congress Transactions – Milwaukee*, 547–550.
- Stoumbos, Z.G., Reynolds, Jr., M., Ryan, T.P. e Woodall, W.H. (2000). The state of statistical process control as we proceed into the 21st century. *Journal of the American Statistical Association* **95**, 992–998.
- Wetherill, G.B. e Brown, D.W. (1991). *Statistical Process Control*. Chapman and Hall, London. (QA276/1.WET.36989)

Referências — Controlo de Qualidade (Cap. 11)

- Dodge, H. (1943). A sampling inspection plan for continuous production. *Annals of Mathematical Statistics* **14**, 264–279.
- Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics* **32**, 1–12.
- Morais, M.J.C. (1995). *Cartas de controlo FSI e VSI para o parâmetro de escala da população Weibull tri-paramétrica*. Tese de Mestrado, Dep. Matemática, IST, UTL. Orientadora: Profa. Dra. M.F. Ramalhoto. (17-11.43941)
- Morais, M. e Natário, I. (1998). Improving an upper one-sided c-chart. *Communications in Statistics — Theory and Methods* **27**, 353–364.
- Morais, M.C. (2006). Shewhart Schemes with VSI Revisited. (Co-autor: António Pacheco.) *Frankfurter Stochastik-Tage 2006*. Frankfurt am Main (Alemanha), 14 a 17 de Março de 2006. ([http://www.math.ist.utl.pt/~mjmorais/FCQ2-0607-cap12Frankfurt\(M\).pdf](http://www.math.ist.utl.pt/~mjmorais/FCQ2-0607-cap12Frankfurt(M).pdf))
- Morais, M.C. e Pacheco, A. (2007). Control schemes with variable sampling intervals revisited. *Sequential Analysis* **26**, 1–18.
- Ramalhoto, F. e Morais, M. (1994). Política VSI aplicada às cartas de controlo \bar{X} , CUSUM e EWMA. Em *A Estatística e Futuro e o Futuro da Estatística*, 99–114. Pestana, D., Turkman, A., Branco, J., Duarte, L. e Pires, A. (Eds.). Edições Salamandra, Lisboa.

- Ramalhoto, M.F. e Morais, M. (1995). Cartas de controlo para o parâmetro de escala da população Weibull tri-paramétrica. *Actas do II Congresso Anual da SPE*, 345–371.
- Morais, M. e Ramalhoto, M.F. (1997). Cartas EWMA–VSI unilaterais superiores para o parâmetro de escala da população Weibull de mínimos tri-paramétrica: Que vantagens? Em *A Estatística a Decifrar o Mundo*, 247–262. Vasconcelos, R., Fraga Alves, I., Canto e Castro, L. e Pestana, D. (eds.). Edições Salamandra, Lisboa.
- Reynolds Jr., M. (1989). Optimal variable sampling interval control charts. *Sequential Analysis* **8**, 361–379.
- Reynolds Jr., M., Amin, R., Arnold, J. (1990). CUSUM charts with variable sampling intervals. *Technometrics* **32**, 371–384.
- Reynolds Jr., M., Amin, R., Arnold, J. e Nachlas, J. (1988). \bar{X} –charts with variable sampling intervals. *Technometrics* **30**, 181–192.
- Saccucci, M., Amin, R. e Lucas, J. (1989). *An Enhanced Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme*. Drexel University Faculty Working Paper Series.

Alguns reparos e um agradecimento

O autor destas notas de apoio salienta que a secção 8.3 resultou de uma tradução livre de diversos textos disponíveis em <http://www.asq.org/learn-about-quality/history-of-quality/> e recomenda vivamente a leituras destes originais. A esta tradução livre foram acrescentados alguns reparos inspirados pela leitura de Bartmann (1986, pp.2–3), Derman e Ross (1997, pp.3–4) e Gomes e Barão (1999, pp.1–4).

O autor salienta também que o Capítulo 13 resultou de uma adaptação parcial autorizada de Constantino (2004, Cap. 1–3) e muito agradece a Marco Constantino a permissão para o fazer.