

Fiabilidade e Controlo de Qualidade

Notas de apoio — Fiabilidade, caps. 1–6

Manuel Cabral Morais

Secção de Estatística e Aplicações

Instituto Superior Técnico

Lisboa, Fevereiro-Março de 2013 ([revistas em Dezembro de 2014](#))

Índice

Lista de tabelas	v
1 Conceitos básicos em fiabilidade	1
1.1 Introdução	1
1.2 Breve nota histórica	5
1.3 Função de estrutura e outros conceitos básicos	7
1.4 Estruturas coerentes	11
1.5 Fiabilidade de sistemas com componentes independentes	19
1.6 Associação e limites para a fiabilidade	27
2 Estatísticas ordinais e tempos de vida de estruturas usuais em fiabilidade	34
2.1 Introdução	34
2.2 Associação e limites para a função de fiabilidade	41
2.3 Mecanismos de censura	43
3 Envelhecimento estocástico e função taxa de falha	48
3.1 Função taxa de falha	48
3.2 Monotonia da função taxa de falha	53
3.3 Preservação da monotonia da taxa de falha	56
3.4 Outras noções de envelhecimento estocástico	64
3.5 Limites para a função de fiabilidade e momentos	70

3.5.1	Limites para a função de fiabilidade baseados num quantil conhecido	70
3.5.2	Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido	72
3.5.3	Limites para momentos da duração de uma componente	75
3.5.4	Limites para a função de fiabilidade de um sistema baseados em momentos conhecidos . . .	77
3.5.5	Limites para a duração esperada de um sistema baseados em momentos conhecidos	80
4	Modelos paramétricos importantes em fiabilidade	84
4.1	Introdução	84
4.2	Distribuições discretas	85
4.2.1	A distribuição geométrica	85
4.2.2	A distribuição binomial	88
4.2.3	A distribuição de Poisson	89
4.3	Distribuições contínuas	90
4.3.1	A distribuição exponencial	91
4.3.2	A distribuição bathtub	96
4.3.3	A distribuição log-normal	97
4.3.4	A distribuição de Weibull	98
4.3.5	As distribuições normal e normal truncada . . .	104
4.3.6	A distribuição gama	105
4.3.7	A distribuição gaussiana inversa	107
4.3.8	As distribuições gama inversa e beta	109
5	Inferências sobre modelos para diferentes tipos de ensaio	112

5.1	Introdução	112
5.2	Identificação e selecção de modelos	114
5.2.1	Estimação não paramétrica de características da fiabilidade — dados completos	114
5.2.2	Gráficos TTT	120
5.2.3	Papel de probabilidade	123
5.2.4	Testes de ajustamento	128
5.3	Testes de vida e estimação de MV	129
5.4	Inferências sobre o modelo exponencial	135
5.4.1	Validação do modelo exponencial	136
5.4.2	Amostra completa	140
5.4.3	Testes de vida com censura	142
5.4.4	Escolha da fracção a censurar e minimização de custos de amostragem	146
6	Estratégias de manutenção	150
6.1	Introdução	150
6.2	Sobre o impacto das noções de envelhecimento em manutenção	151
6.3	Teoria do renovamento e manutenção	154
6.3.1	Limites para a convolução	155
6.3.2	Limites para a função de renovamento	160
6.3.3	Limites para algumas funções do número de renovamentos	162
6.4	Algumas estratégias de manutenção	165
6.5	Comparação de estratégias de manutenção	168
6.6	A política de manutenção random age replacement . .	172
6.7	Alguns resultados sobre disponibilidade	175

6.7.1	Disponibilidade de sistemas com componentes independentes	177
6.7.2	Disponibilidade de sistemas em série	179
6.7.3	Disponibilidade de sistema com uma unidade de operação, uma sobressalente e uma de reparação	183
6.7.4	Disponibilidade de sistema com m unidades de operação, n sobressalentes e s de reparação . . .	186

Referências	189
--------------------	------------

Lista de Tabelas

3.1	Preservação do comportamento monótono da taxa de falha das estatísticas ordinais (“Não” \equiv “Nem sempre”).	63
3.2	Preservação da propriedade de envelhecimento face a operações de fiabilidade (“Não” \equiv “Nem sempre”). . . .	68
4.1	Algumas distribuições discretas importantes.	87
4.2	Número de acidentes mensais.	90
4.3	Algumas distribuições contínuas importantes.	93
5.1	Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — amostra não agrupada.	115
5.2	Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — dados da refinaria de gasolina.	116
5.3	Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — amostra agrupada.	117
5.4	Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — baterias.	118
5.5	Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — <i>turbofan jet engines</i>	119
5.6	Cálculos auxiliares para obter gráfico <i>TTT</i> — refinaria de gasolina.	122
5.7	Horas até falha de 20 termóstatos	138

5.8	Instantes de falha e os tempos entre falhas consecutivas de camião.	139
5.9	Dados referentes a nove locais de teste de termóstatos.	139
5.10	Algumas estimativas de MV.	140
5.11	Estimadores de MV para λ — dados censurados.	142
5.12	Tempos totais acumulados em teste — dados censurados.	142
5.13	Estimadores de MV para λ — dados censurados.	143
5.14	Estimadores <i>UMVUE</i> de $E(T)$ e $R_T(t)$ — dados censurados.	144
5.15	Estatísticas suficientes para λ — dados censurados	144
5.16	Intervalos de confiança para λ — dados censurados.	145
5.17	V.a. fulcrais para λ — dados censurados.	145

Capítulo 1

Conceitos básicos em fiabilidade

1.1 Introdução

Este capítulo introdutório debruça-se essencialmente sobre as relações entre um sistema de interesse e as respectivas componentes. Apesar do carácter aleatório do funcionamento das componentes do sistema, assumir-se-á que as relações estruturais entre este e aquelas são determinísticas.

Antes de prosseguir é crucial adiantar alguns conceitos básicos, mesmo que de um modo informal, nomeadamente a capacidade que um sistema tem de desempenhar adequadamente as funções a que se propõe, em certo ambiente e durante um período de tempo.

Definição informal 1.1 — Fiabilidade

Diz respeito, de um modo geral, ao grau de confiança ou **probabilidade** que atribuímos ao funcionamento sem **falhas** por parte de um sistema, em certo **ambiente** e durante um período de **tempo** de pelo menos t_0 unidades. •

Esta definição envolve quatro importantes termos/noções que convém definir mesmo que informalmente. A saber: probabilidade;¹ falhas; ambiente; tempo.

Definição informal 1.2 — Falhas

Cada sistema possui um conjunto específico de **eventos indesejáveis** ou falhas. •

Para um **relógio** pode definir-se como um atraso que exceda 5 segundos durante um período de 24 horas. Para um **sistema mecânico** pode tratar-se de um aumento da vibração produzida acima de um nível regulamentar. Uma das mais perigosas falhas de um **reactor nuclear** é a fuga de material radioactivo. Ao lidar-se com um **míssil** uma falha pode consistir em não atingir o alvo ou explodir antes de atingir o alvo.

Escusado será dizer que um sistema diz-se absolutamente fiável se não ocorrerem falhas durante o seu funcionamento.

Definição informal 1.3 — Ambiente

A fiabilidade de um sistema depende crucialmente do ambiente em que opera um sistema. O ambiente diz não só respeito às condições climatéricas mas também a: empacotamento, transporte, armazenamento; instalação; tipo de utilizador; recursos de manutenção disponíveis; pó, químicos e outros poluentes. •

Definição informal 1.4 — Tempo

A fiabilidade decresce com o tempo, na medida em que quanto maior for o tempo de operação do sistema maior é a probabilidade de falha do mesmo.

¹Escusamo-nos de definir este primeiro termo.

Atente-se, no entanto, que o tempo de operação nem sempre é medido em unidades de tempo. Pode sê-lo em distância percorrida para um veículo, ou turnos/ciclos de operação para um operário, ou ainda uma combinação destas e outras medidas de “tempo”. •

Metodologias estatísticas/probabilísticas — Uma falha é o resultado da acção conjunta de diversos factores aleatórios/imprevisíveis intrínsecos ao sistema bem como das diversas influências do ambiente em que o sistema opera.

Assim, o tratamento adequado da fiabilidade de sistemas só pode ser feito recorrendo a metodologias estatísticas/probabilísticas.

Teoria da fiabilidade — Corpo de ideias, modelos e métodos destinados à solução de problemas de estimação/optimização da probabilidade de sobrevivência... ou, mais genericamente, da distribuição do

- **tempo de vida** de *componentes* ou **sistemas**.

Outros dos problemas considerados em teoria da fiabilidade dizem respeito ao cálculo da probabilidade de funcionamento de um sistema e da proporção de tempo em que o sistema se encontra em funcionamento.

Argumenta-se que a teoria da fiabilidade não passa de uma simples aplicação da teoria das Probabilidades... Contudo os problemas de fiabilidade possuem uma estrutura própria e têm estimulado o desenvolvimento de novas áreas em Teoria da Probabilidade como:

- noções de **envelhecimento estocástico** (e tipos de monotonia);
- obtenção de resultados em **teoria de renovamento** como resultado da comparação de políticas de substituição.

Estratégias de manutenção — Algumas situações de fiabilidade envolvem **substituições**, **reparações** e **inspeções** de componentes. Estas operações básicas influenciam a fiabilidade de um sistema e desempenham um papel crucial em estratégias/políticas de manutenção.

Testes de vida acelerados — De modo a induzir falhas em equipamento muito fiável, são usados métodos de teste especiais denominados de testes de vida acelerados.

Há, fundamentalmente, três formas distintas de acelerar um teste de vida, i.e., reduzir o tempo de vida de produto submetido a teste:

- aumentar a taxa de utilização do produto (e.g., testar uma torradeira 200 vezes ao dia);
- recorrer a temperaturas ou humidade elevadas e pouco usuais de forma a aumentar a taxa de falha;
- aumentar factores de stresse (e.g., voltagem) de modo a que as componentes se desgastem e falhem mais depressa.

Tópico relacionado com fiabilidade — Os problemas estatísticos de estimação da função sobrevivência da vida de um sistema/indivíduo a partir de dados (eventualmente censurados) e uma série de outros tipos de inferências (estimação de parâmetros de modelos, comparações de funções de sobrevivência, etc.) são alvo de estudo em **Análise de Sobrevivência**.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, p. xi); Leitch (1995, pp. 1–5).

1.2 Breve nota histórica

O surgimento da teoria da fiabilidade está intimamente ligado à necessidade de lidar com tecnologia moderna, em particular, com os sistemas militares complexos durante a **II Guerra Mundial**.

Uma das primeiras áreas de fiabilidade abordadas com alguma sofisticação matemática foi a da **manutenção de máquinas** (Khintchine, 1932; Palm, 1947). As técnicas usadas foram inspiradas em outras já utilizadas por Erlang e Palm em problemas de dimensionamento de centrais telefónicas. As primeiras tentativas para justificar o uso da **distribuição de Poisson** para o número de chamadas em períodos de tempo fixos serviram de base para o uso da **distribuição exponencial** na caracterização dos tempos entre falhas de equipamentos complexos (Epstein, 1958).

A aplicação da **teoria do renovamento** em problemas de **substituição de equipamento** começou por ser discutida por Lotka (1939) e Campbell (1941).

A **fadiga de materiais** e um tópico associado, a teoria de valores extremos, foram estudados por Weibull (1939), Gumbel (1935), Epstein (1948), etc. Gumbel (1958) fornece uma série de ilustrações da adequação de **modelos extremos** à representação de tempos de vida.

No início da década de 50, algumas áreas da fiabilidade como os **testes de vida** e os problemas de fiabilidade em equipamento electrónico, em mísseis e aeronaves mereceram grande atenção por parte, quer de estatísticos, quer de engenheiros ligados à **indústria armamentista e aeronáutica**.²

²Em 1950, a Força Aérea dos E.U.A. formou o *Group on Reliability of Electronic Equipment* para recomendar medidas que aumentassem a fiabilidade do equipamento e diminuíssem os custos

A popularidade da **distribuição exponencial** em fiabilidade deve-se em grande parte aos trabalhos de Davis (1952) e Epstein e Sobel (1953). Contudo, a partir de 1955 e graças aos trabalhos de Kao (1956, 1958) e Zelen-Dannemiller (1961), começou a considerar-se seriamente outros modelos para o tempo de vida, com destaque para o **modelo Weibull**.

A fiabilidade de sistemas com **interruptores electromagnéticos** (*relays*) motivou o trabalho de Moore e Shannon (1956), estes autores foram, por sua vez, estimulados pela tentativa de von Neumann descrever certas operações do cérebro humano e a elevada fiabilidade de organismos biológicos complexos.

Em 1956, G. Weiss introduz o uso de **processos semi-markovianos** na resolução de problemas de manutenção.

Motivados pelos **problemas de vibração** surgidos na construção de **aeronaves comerciais a jacto**, Birnbaum e Saunders (1958) introduzem um modelo estatístico na descrição do tempo de vida de estruturas sob sobrecarga dinâmica. Este modelo permite exprimir a distribuição do tempo de vida em termos da carga e acabou por sugerir o uso da **distribuição gama** em determinadas situações.

A introdução de **funções de estrutura** de sistemas coerentes deve-se ao trabalho de Birnbaum, Esary e Saunders (1961) e constitui uma generalização de trabalho prévio da autoria de Moore e Shannon.

Nos anos 70 deu-se especial ênfase a problemas de fiabilidade associados a **segurança de reactores nucleares** e outros problemas de segurança industrial.

Nos anos 80, deu-se particular atenção à **fiabilidade de redes de computadores**, motivada pela *Advanced Research Projects Agency*

de manutenção do equipamento.

(ARPA), precursora da **Internet** e da **World Wide Web** (www).

Na década de 90, Mendel traçou novas direcções na investigação em fiabilidade, inspirado pela **Física** e fazendo uso da **geometria diferencial**.

A competição feroz no mercado é responsável por aquele que é, hoje, o **grande desafio para a indústria**: o **desenvolvimento de produtos** de complexidade crescente **em pouco tempo** mas com **elevados níveis de qualidade e fiabilidade**.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 1-5); Barlow (1998, pp. xv-xvi).

1.3 Função de estrutura e outros conceitos básicos

Em fiabilidade de sistemas constituídos por diversas componentes têm particular relevo alguns conceitos.

Definição 1.5 — Ordem do sistema

Designação dada ao número de componentes de um sistema. É usualmente representada por n ($i = 1, \dots, n$). •

Definição 1.6 — Função de estrutura (“structure function”)

Numa **perspectiva estática** pode definir-se a seguinte função

$$\phi(\underline{\mathbf{X}}) = \begin{cases} 1, & \text{se o sistema está a funcionar} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\underline{\mathbf{X}} = (X_1, \dots, X_n)$ denota o vector de estado e

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a componente } i \text{ está a funcionar} \\ 0, & \text{c.c.,} \end{cases} \quad (1.2)$$

para $i = 1, \dots, n$. Esta função será doravante denominada de função de estrutura. •

Definição 1.7 — Fiabilidade

Define-se à custa do valor esperado da função estrutura,

$$r = P[\phi(\underline{\mathbf{X}}) = 1] = E[\phi(\underline{\mathbf{X}})], \tag{1.3}$$

logo corresponde à probabilidade de funcionamento. •

A função estrutura pode ser obtida sem grande dificuldade nos seguintes exemplos. A fiabilidade de sistemas com componentes independentes será discutida posteriormente.

Exemplo 1.8 — Estrutura em série

Uma estrutura em série funciona sse o mesmo ocorrer com todas as suas componentes. Assim,

$$\phi(\underline{\mathbf{X}}) = \min\{X_1, \dots, X_n\} = \prod_{i=1}^n X_i. \tag{1.4}$$

Exemplo 1.9 — Estrutura em paralelo

Uma estrutura em paralelo funciona desde que pelo menos uma das suas componentes funcione. Logo

$$\phi(\underline{\mathbf{X}}) = \max\{X_1, \dots, X_n\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i). \tag{1.5}$$

Exemplo 1.10 — Estrutura k-de-n

Uma estrutura $k - de - n$ funcionará sse funcionarem pelo menos k das suas n componentes. Neste caso

$$\phi(\underline{\mathbf{X}}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^n X_i \geq k \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Um avião que é capaz de voar sse pelo menos 2 de 3 motores funcionarem é um exemplo de uma estrutura $2 - de - 3$.

De notar que uma estrutura em série (paralelo) corresponde a uma estrutura $n - de - n$ ($1 - de - n$). •

Exercício 1.11 — Considere um sistema com 4 componentes. Suponha que este sistema funciona sse tal acontecer com as componentes 1 e 2, e se as componentes 3 ou 4 funcionarem.

Represente esquematicamente este sistema e prove que a sua função estrutura é igual a $X_1 \times X_2 \times (X_3 + X_4 - X_3 \times X_4)$. (Ver Ross, 2003, pp. 549–550.) •

Exercício 1.12 — Considere um sistema de alta fidelidade composto por:

- Gravador
- CD player
- Amplificador
- Altifalante A
- Altifalante B.

Considera-se que o sistema está a funcionar, caso se ouça música (amplificada) mono ou stereo, vinda do gravador ou do CD player.

Represente diagramaticamente este sistema e determine a sua função estrutura (Barlow e Proschan, 1975, p. 4). •

Definição 1.13 — Decomposição fulcral (pivotal decomposition) **da função de estrutura**

A função de estrutura de um sistema pode ser decomposta do seguinte modo:

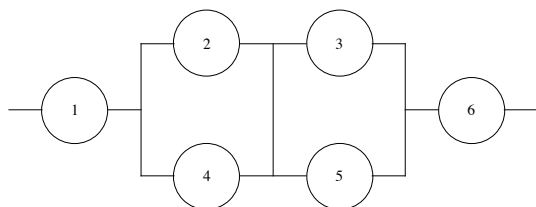
$$\phi(\underline{\mathbf{X}}) = X_i \phi(1_i, \underline{\mathbf{X}}) + (1 - X_i) \phi(0_i, \underline{\mathbf{X}}), \quad (1.7)$$

onde

- $(1_i, \underline{\mathbf{X}}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$ e
- $(0_i, \underline{\mathbf{X}}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)$. •

Este resultado é particularmente importante pois permite reescrever a função de estrutura de um sistema de ordem n à custa das funções de estrutura de dois sub-sistemas de ordem $n - 1$.

Exercício 1.14 — Uma rede de tratamento de águas residuais possui o figurino abaixo onde i denota a estação de tratamento i ($i = 1, \dots, 6$).



Determine a função de estrutura por decomposição fulcral em torno da estação de tratamento 4. •

Na próxima secção será apresentado um método alternativo de obtenção da função de estrutura.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 1–6); Ross (2003, pp. 547–550).

1.4 Estruturas coerentes

É desejável que os sistemas não possuam aquilo que se designa a seguir por componentes irrelevantes.

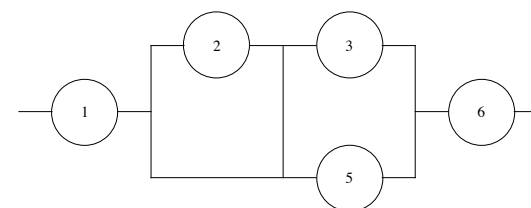
Definição 1.15 — Componente irrelevante

A i -ésima componente de um sistema diz-se irrelevante caso a função estrutura seja constante em x_i , i.e.,

$$\phi(1_i, \underline{\mathbf{x}}) = \phi(0_i, \underline{\mathbf{x}}), \quad (1.8)$$

para qualquer $(\bullet_i, \underline{\mathbf{x}})$, onde $(1_i, \underline{\mathbf{x}}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ e $(0_i, \underline{\mathbf{x}}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$. •

Exercício 1.16 — Prove que a componente 2 do sistema **abaixo**



é irrelevante. •

É natural assumir que a substituição de uma componente inoperacional por uma que funcione nunca conduza à deterioração do sistema. Ou por outra, é desejável lidar com sistemas cuja função de estrutura é monótona não decrescente.

Definição 1.17 — Estruturas coerentes (ou monótonas)³

Estas estruturas são caracterizadas por possuírem **função de estrutura não decrescente**, i.e.

$$\phi(\underline{\mathbf{x}}) \leq \phi(\underline{\mathbf{y}}), \text{ se } x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

e todas as **componentes relevantes**. •

³Esta última designação é preferida por Barlow e Proschan (1965/1996, p. 204).

Nota 1.18 — Estruturas coerentes

De notar que qualquer estrutura coerente possui função de estrutura verificando:

- $\phi(\underline{\mathbf{1}}) = 1$, onde $\underline{\mathbf{1}} = (1, \dots, 1)$;
- $\phi(\underline{\mathbf{0}}) = 0$, onde $\underline{\mathbf{0}} = (0, \dots, 0)$. •

Exercício 1.19 — Represente todas as estruturas coerentes (a menos de permutações das suas componentes) de ordem 1, 2 e 3 e determine as respectivas funções de estrutura. (Ver Barlow e Proschan, 1975, pp. 6–7.) •

Teorema 1.20 — Estruturas coerentes

Sejam $\phi_{min}(\underline{\mathbf{x}})$, $\phi_{max}(\underline{\mathbf{x}})$ e $\phi(\underline{\mathbf{x}})$ as funções de estrutura de sistemas de ordem n em série, em paralelo e de um sistema coerente genérico, respectivamente. Então

$$\phi_{min}(\underline{\mathbf{x}}) \leq \phi(\underline{\mathbf{x}}) \leq \phi_{max}(\underline{\mathbf{x}}). \tag{1.10}$$

Este resultado permite-nos afirmar que o desempenho de qualquer estrutura coerente é limitada inferiormente (resp. superiormente) pelo desempenho de uma estrutura em série (resp. paralelo). •

Nota 1.21 — Estruturas coerentes

Qualquer estrutura coerente pode ser descrita como um sistema em série (resp. paralelo) cujas componentes são por sua vez sub-sistemas em paralelo (resp. série). •

Exercício 1.22 — Descreva diagramaticamente um sistema 2-de-3 e reescreva a sua função estrutura, tendo em conta a observação anterior (Ross, 1989, p. 406). •

As estruturas coerentes podem ser também descritas à custa de caminhos e cortes. Para tal, considere-se que o vector $\underline{\mathbf{x}}$ indica os estados de um conjunto de n componentes, $C = \{1, \dots, n\}$.

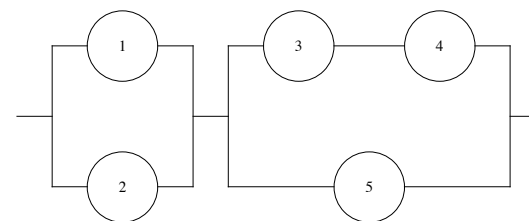
Definição 1.23 — Path vector e caminho (path set)

O vector $\underline{\mathbf{x}}$ diz-se um *path vector*, caso $\phi(\underline{\mathbf{x}}) = 1$. Ao conjunto de índices $C_1(\underline{\mathbf{x}}) = \{i : x_i = 1\}$ dá-se o nome de caminho (*path set*). •

Definição 1.24 — Minimal path vector e caminho mínimo (minimal path set)

O vector $\underline{\mathbf{x}}$ diz-se um *minimal path vector*, se $\underline{\mathbf{y}} < \underline{\mathbf{x}} \Rightarrow \phi(\underline{\mathbf{y}}) = 0$ para todo o $\underline{\mathbf{y}}$.⁴ Nesta situação $C_1(\underline{\mathbf{x}})$ é designado de caminho mínimo (*minimal path set*). $C_1(\underline{\mathbf{x}})$ corresponde a um conjunto de componentes que permite o funcionamento do sistema; este conjunto não inclui qualquer componente irrelevante. •

Exercício 1.25 — Identifique os caminhos mínimos do sistema de 5 componentes, descrito em Ross (2003, p. 551). •



Definição 1.26 — Cut vector e corte (cut set)

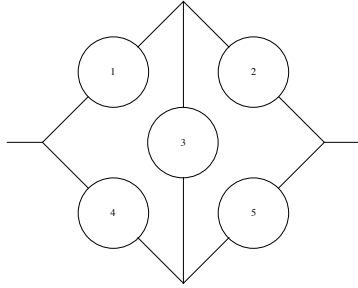
O vector $\underline{\mathbf{x}}$ diz-se um *cut vector*, caso $\phi(\underline{\mathbf{x}}) = 0$. Ao conjunto de índices $C_0(\underline{\mathbf{x}}) = \{i : x_i = 0\}$ dá-se o nome de corte (*cut set*). •

⁴ $\underline{\mathbf{y}} < \underline{\mathbf{x}} \Leftrightarrow y_i \leq x_i \ (i = 1, \dots, n)$ e $y_i < x_i$ para algum i .

Definição 1.27 — **Minimal cut vector e corte mínimo** (*minimal cut set*)

O vector \underline{x} diz-se um *minimal cut vector*, se $\underline{y} > \underline{x} \Rightarrow \phi(\underline{y}) = 1$ para todo o \underline{y} . Neste caso $C_0(\underline{x})$ diz-se um corte mínimo (“minimal cut set”). $C_0(\underline{x})$ corresponde a um conjunto de componentes, todas relevantes, sem as quais o sistema é incapaz de funcionar. •

Exercício 1.28 — Identifique *path vectors*, caminhos, caminhos mínimos, *cut vectors*, cortes e cortes mínimos, no sistema em ponte abaixo, descrito em Barlow e Proschan (1975, p. 9).



Nota 1.29 — **Reescrita de sistemas coerentes**

É possível escrever a função de estrutura de um sistema coerente à custa de caminhos mínimos ou cortes mínimos. Para o efeito, considere-se \mathcal{P}_j o j -ésimo caminho mínimo ($j = 1, \dots, p$) e a função binária com argumentos $x_i, i \in \mathcal{P}_j$

$$\rho_j(\underline{x}) = \min_{i \in \mathcal{P}_j} x_i = \prod_{i \in \mathcal{P}_j} x_i \quad (1.11)$$

que toma valor unitário, se todas as componentes do j -ésimo caminho mínimo estiverem a funcionar, e 0, caso contrário. Ou seja, $\rho_j(\underline{x})$

corresponde à função estrutura do sub-sistema em série j cujas componentes fazem parte do caminho mínimo \mathcal{P}_j .

Analogamente, tome-se \mathcal{K}_j o j -ésimo corte mínimo ($j = 1, \dots, q$) e a associe-se a função binária com argumentos $x_i, i \in \mathcal{K}_j$

$$k_j(\underline{x}) = \max_{i \in \mathcal{K}_j} x_i = 1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} (1 - x_i) \quad (1.12)$$

que toma valor 0, se todas as componentes do j -ésimo corte mínimo não estiverem a funcionar, e 1, caso contrário. I.e., $k_j(\underline{x})$ corresponde à função estrutura do sub-sistema em paralelo j cujas componentes fazem parte do corte mínimo \mathcal{K}_j . •

Teorema 1.30 — **Reescrita de sistemas coerentes**

Sejam $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_p$ os caminhos mínimos e $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_q$ os cortes mínimos da referida estrutura coerente. Então

$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}) &= \max_{j=1, \dots, p} \rho_j(\underline{x}) = \max_{j=1, \dots, p} \min_{i \in \mathcal{P}_j} x_i \\ &= 1 - \prod_{j=1}^p \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{P}_j} x_i \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

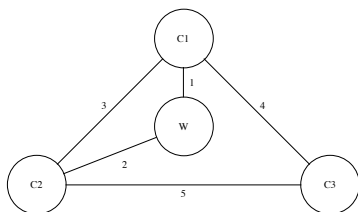
$$\begin{aligned} \phi(\underline{x}) &= \min_{j=1, \dots, q} k_j(\underline{x}) = \min_{j=1, \dots, q} \max_{i \in \mathcal{K}_j} x_i \\ &= \prod_{j=1}^q \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} (1 - x_i) \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

I.e., uma estrutura original coerente pode ser pensada como uma estrutura em paralelo (série) constituída por todos os sub-sistemas em série (paralelo) passíveis de se formar com as componentes que constituem caminhos (cortes) mínimos. •

Exercício 1.31 — Obtenha a função de estrutura do sistema em ponte à custa de um arranjo em paralelo (resp. série) dos

caminhos (resp. cortes) mínimos (Barlow e Proschan, 1975, pp. 10–11; Gertsbakh, 1995, p. 6). •

Exercício 1.32 — A Figura 1.2 de Gertsbakh (1995, p. 4) descreve um sistema de (re)distribuição de água a três cidades C_1, C_2 e C_3 a partir de uma central de fornecimento de água W .



Diz-se que o sistema de (re)distribuição de água está operacional se as três cidades receberem água.

Obtenha a função de estrutura deste sistema recorrendo ou a uma decomposição fulcral, ou a caminhos mínimos, ou a cortes mínimos. •

Motivação 1.33 — Importância estrutural relativa das componentes

Em certos sistemas coerentes, algumas componentes são mais importantes que outras na medida em que elas são determinantes para o funcionamento do sistema. Por exemplo, se uma das componentes está em série com o resto do sistema então pode parecer que seja tão importante quanto qualquer outra.

É, pois, importante que o analista disponha de uma medida da importância das componentes individuais. •

Definição 1.34 — Path vector crítico e caminho crítico para a componente i

Um *path vector* diz-se crítico para a componente i sse $\phi(1_i, \underline{x}) = 1$ e $\phi(0_i, \underline{x}) = 0$, i.e.,

$$\phi(1_i, \underline{x}) - \phi(0_i, \underline{x}) = 1. \quad (1.15)$$

O conjunto de índices $C_i(1_i, \underline{x})$ é denominado de caminho crítico para a componente i . •

Definição 1.35 — Importância estrutural relativa da componente i

O número de *path vectors* críticos para a componente i é dado por

$$n_\phi(i) = \sum_{\{\underline{x}: \phi(\underline{x})=1, x_i=1\}} [\phi(1_i, \underline{x}) - \phi(0_i, \underline{x})] \quad (1.16)$$

e a importância estrutural relativa da componente i definida por

$$I_\phi(i) = \frac{n_\phi(i)}{2^{n-1}} \quad (1.17)$$

e corresponde à proporção de *path vectors* críticos para i face aos vectores de estado \underline{x} caracterizados por $x_i = 1$. •

Exercício 1.36 — Determine a importância estrutural relativa de cada uma das componentes de um sistema em série de ordem 3. •

Exercício 1.37 — Calcule a importância estrutural relativa de cada uma das componentes de uma estrutura 2-de-3 (Barlow e Proschan, 1975, p. 14). •

Exercício 1.38 — Admita que um sistema tem função de estrutura $\phi(\underline{x}) = x_1 [1 - (1 - x_2)(1 - x_3)]$.

Descreva diagramaticamente este sistema e obtenha a importância estrutural relativa de cada uma das suas três componentes (Barlow e Proschan, 1975, p. 14). •

Exercício 1.39 a) Calcule a importância estrutural relativa de cada uma das cinco componentes do sistema em ponte (Barlow e Proschan, 1975, p. 16).

- b) Tirando partido das definições de caminho mínimo e de caminho crítico para a componente i , demonstre que o número de caminhos mínimos que contêm i constitui um limite inferior para $n_\phi(i)$. •

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 1–19); Ross (1993, pp. 404–411).

1.5 Fiabilidade de sistemas com componentes independentes

Considere-se, doravante, que X_i representa o estado da componente i e que $p_i = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0)$, $i = 1, \dots, n$, denota a **fiabilidade da componente i** . E seja $\underline{\mathbf{p}} = (p_1, \dots, p_n)$ o vector das fiabilidades das componentes e considere-se nesta secção que quaisquer componentes funcionam de modo independente.

A fiabilidade de um sistema corresponde à probabilidade de este estar a funcionar, i.e., caso a fiabilidade se represente por r , tem-se $r = P[\phi(\underline{\mathbf{X}}) = 1]$.

Definição 1.40 — Fiabilidade

Ao lidarmos com componentes que funcionam de modo independente,⁵ a fiabilidade do sistema é passível de escrever-se à custa do vector $\underline{\mathbf{p}}$ das fiabilidades das componentes:

$$r = r(\underline{\mathbf{p}}) = P[\phi(\underline{\mathbf{X}}) = 1]. \quad (1.18)$$

Mais, pelo facto de $\phi(\underline{\mathbf{X}})$ ser uma v.a. com distribuição de Bernoulli tem-se

$$r = r(\underline{\mathbf{p}}) = E[\phi(\underline{\mathbf{X}})]. \quad (1.19)$$

Exemplo 1.41 — Fiabilidade

As estruturas em série e em paralelo com componentes independentes possuem fiabilidades iguais a

$$r(\underline{\mathbf{p}}) = E[\phi(\underline{\mathbf{X}})] = E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n p_i \quad (1.20)$$

⁵Ou seja, as v.a. X_1, \dots, X_n são independentes.

$$r(\underline{\mathbf{p}}) = E[\phi(\underline{\mathbf{X}})] = E\left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)\right] = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i), \quad (1.21)$$

respectivamente.

Por seu lado, caso $p_i = p$, a estrutura $k-de-n$ possuem fiabilidade dada por

$$\begin{aligned} r(\underline{\mathbf{p}}) &= E[\phi(\underline{\mathbf{X}})] \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right) \\ &= \sum_{i=k}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

(Justifique!) •

Exercício 1.42 — Compare a fiabilidade das estruturas em série e paralelo descritas no Exemplo 1.41. •

Exercício 1.43 — Considere uma estrutura com 4 componentes que funciona quando tal acontece com as componentes 1 e 4 e pelo menos 1 das duas restantes componentes se encontra operacional.

Obtenha a fiabilidade desta estrutura (Ross, 2003, p. 556). •

Nota 1.44 — Cálculo da fiabilidade

De modo a calcular $r(\underline{\mathbf{p}})$ quando existem caminhos mínimos (cortes mínimos) com componentes em comum é necessário:

- em primeiro lugar, multiplicar todos os termos de $\phi(\underline{\mathbf{X}})$;
- tirar partido do facto de $X_i \stackrel{indep}{\sim} \text{Bernoulli}(p_i)$ e $X_i^k =_{st} X_i$, $k \in \mathbb{N}$ de modo a reescrever $\phi(\underline{\mathbf{X}})$;
- por fim, calcular os valores esperados de todas as parcelas de $\phi(\underline{\mathbf{X}})$.

O cálculo exacto da fiabilidade pode fazer-se também por recurso a uma soma envolvendo todos os 2^n vectores $\underline{\mathbf{x}}$, ou melhor, todos os “sample paths” (i.e., todos os $\underline{\mathbf{x}} : \phi(\underline{\mathbf{x}}) = 1$):

$$\begin{aligned} r(\underline{\mathbf{p}}) &= E[\phi(\underline{\mathbf{X}})] \\ &= \sum_{\underline{\mathbf{x}}} \phi(\underline{\mathbf{x}}) P(\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{x}}) \\ &\stackrel{X_i \stackrel{indep}{\sim} \text{Ber}(p_i)}{=} \sum_{\underline{\mathbf{x}}} \left[\phi(\underline{\mathbf{x}}) \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1-p_i)^{1-x_i} \right] \\ &= \sum_{\{\underline{\mathbf{x}}: \phi(\underline{\mathbf{x}})=1\}} P(\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{x}}) \\ &\stackrel{X_i \stackrel{indep}{\sim} \text{Ber}(p_i)}{=} \sum_{\{\underline{\mathbf{x}}: \phi(\underline{\mathbf{x}})=1\}} \left[\prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1-p_i)^{1-x_i} \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Exercício 1.45 — Prove que a fiabilidade de uma estrutura do tipo $2-de-3$, constituída por componentes independentes com fiabilidades distintas p_1, p_2, p_3 , é igual a $p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3$ (Ross, 2003, p. 555).⁶

Verifique também que

$$\begin{aligned} r(\underline{\mathbf{p}}) &= E[1 - (1 - X_1 X_2)(1 - X_1 X_3)(1 - X_2 X_3)] \\ &\neq 1 - E(1 - X_1 X_2)E(1 - X_1 X_3)E(1 - X_2 X_3)] \\ &= 1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_1 p_3)(1 - p_2 p_3) \end{aligned} \quad (1.24)$$

já que os caminhos mínimos têm componentes em comum e como tal não são independentes. •

Exercício 1.46 — Obtenha agora a fiabilidade de uma estrutura $3-de-4$, constituída por componentes independentes com fiabilidades distintas p_1, p_2, p_3, p_4 (Ross, 2003, p. 556). •

⁶Basta notar que $r(\underline{\mathbf{p}}) = P[\underline{\mathbf{X}} = (1, 1, 1)] + P[\underline{\mathbf{X}} = (1, 1, 0)] + P[\underline{\mathbf{X}} = (1, 0, 1)] + P[\underline{\mathbf{X}} = (0, 1, 1)]$.

Exercício 1.47 — Determine a fiabilidade do sistema em ponte já descrito (Gertsbakh, 1995, p. 10). •

A fiabilidade de sistemas coerentes com componentes independentes possui entre outras características as enunciadas a seguir.

Teorema 1.48 — Monotonia da fiabilidade

Seja $r(\underline{\mathbf{p}})$ a fiabilidade de um sistema com componentes independentes e função de estrutura monótona. Então $r(\underline{\mathbf{p}})$ é uma função monótona crescente de $\underline{\mathbf{p}}$. •

Exercício 1.49 — Demonstre o Teorema 1.48.⁷ •

Teorema 1.50 — Decomposição fulcral (*pivotal decomposition*) **da fiabilidade**

À semelhança do que acontece com a função de estrutura, a fiabilidade de um sistema pode ser decomposta do seguinte modo

$$r(\underline{\mathbf{p}}) = p_i r(1_i, \underline{\mathbf{p}}) + (1 - p_i) r(0_i, \underline{\mathbf{p}}) \quad (1.25)$$

onde: $(1_i, \underline{\mathbf{p}}) = (p_1, \dots, p_{i-1}, 1, p_{i+1}, \dots, p_n)$ e $(0_i, \underline{\mathbf{p}}) = (p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_n)$; $r(1_i, \underline{\mathbf{p}})$ representa a fiabilidade de um sistema cuja componente i foi substituída por outra absolutamente fiável; $r(0_i, \underline{\mathbf{p}})$ representa a fiabilidade do sistema cuja componente i já falhou. •

O Teorema 1.50 permite concluir que $r(\underline{\mathbf{p}})$ é multilinear, ou seja, é linear em cada p_i . Para além disso, quando $p_1 = \dots = p_n = p$, $r(\underline{\mathbf{p}})$ é um polinómio em p .

O exercício seguinte ilustra a utilidade da decomposição fulcral da fiabilidade.

Exercício 1.51 — Considere o sistema de (re)distribuição de água a três cidades a partir de uma central de fornecimento de água W , descrito do Exercício 1.32.

Obtenha a fiabilidade deste sistema recorrendo para tal a decomposições fulcrais (Gertsbakh, 1995, pp. 11–12). •

Teorema 1.52 — Outra propriedade de monotonia da fiabilidade

Seja $r(\underline{\mathbf{p}})$ a fiabilidade de uma estrutura coerente. Então $r(\underline{\mathbf{p}})$ é estritamente crescente para qualquer p_i e para $\underline{\mathbf{0}} \ll \underline{\mathbf{p}} \ll \underline{\mathbf{1}}$.⁸ •

Definição 1.53 — Replicação de componentes/sistemas

Sejam:

- r a fiabilidade de um sistema de ordem n ;
- $\underline{\mathbf{p}}$ e $\underline{\mathbf{p}}'$ dois vectores das fiabilidades das componentes.

Então:

- **Replicação ao nível das componentes** — Um sistema diz-se replicado ao nível das componentes, caso qualquer das suas componentes i ($i = 1, \dots, n$) seja substituída por um (sub-)sistema em paralelo com duas componentes independentes com probabilidades de funcionamento iguais a p_i e p_i' .
- **Replicação ao nível do sistema** — Ao substituir-se um sistema por outro dois similares colocados em paralelo, cujos vectores de fiabilidade das componentes são dados por $\underline{\mathbf{p}}$ e $\underline{\mathbf{p}}'$, diz-se ter efectuado uma replicação ao nível do sistema. •

⁷Para mais detalhes acerca desta demonstração, consulte-se Ross, 2003, p. 557).

⁸ $\underline{\mathbf{a}} \ll \underline{\mathbf{b}} \Leftrightarrow a_i < b_i, i = 1, \dots, n$.

Exercício 1.54 — Sejam:

- r a fiabilidade de um sistema coerente com componentes independentes;
- \underline{p} e \underline{p}' os vectores das fiabilidades das componentes e das componentes resultantes da replicação, respectivamente.

Prove que uma replicação ao nível do sistema está associada à fiabilidade

$$1 - [1 - r(\underline{p})][1 - r(\underline{p}')]. \quad (1.26)$$

Demonstre ainda que, ao efectuar uma replicação ao nível das componentes, passa-se a lidar com um sistema com fiabilidade igual a

$$r[\underline{1} - (\underline{1} - \underline{p}) \bullet (\underline{1} - \underline{p}')], \quad (1.27)$$

onde a operação \bullet representa o produto componente a componente entre dois vectores e $1 - (1 - p_i)(1 - p'_i)$ representa a fiabilidade do subsistema resultante da replicação da componente i . (Para mais detalhes, consulte-se Ross, 2003, p. 557.) •

Exercício 1.55 — Calcule a fiabilidade de um sistema em série com duas componentes (independentes e com fiabilidade $p_i = p'_i = 0.5$) e compare-a com as fiabilidades do sistema replicado ao nível do sistema e das componentes (Ross, 2003, p. 558). Comente. •

O exercício sugere o seguinte resultado, que, por sinal, responde a uma questão pertinente — O que será preferível, caso se pretenda maximizar a fiabilidade do sistema,

- a replicação ao nível das componentes ou
- a replicação ao nível do sistema?

Teorema 1.56 — **Fiabilidade face à replicação de componentes/sistemas**

Sejam:

- r a fiabilidade de um sistema coerente com componentes independentes;
- \underline{p} e \underline{p}' os vectores das fiabilidades das componentes e das componentes resultantes da replicação, respectivamente.

Então

$$r[\underline{1} - (\underline{1} - \underline{p}) \bullet (\underline{1} - \underline{p}')] \geq 1 - [1 - r(\underline{p})][1 - r(\underline{p}')], \quad (1.28)$$

i.e., a replicação ao nível das componentes é preferível à replicação ao nível do sistema. •

Exercício 1.57 — Prove o Teorema 1.56 (Ross, 2003, p. 558). •

Exercício 1.58 — Determine a fiabilidade de um sistema com três componentes, que está operacional, caso a componente 1 funcione e o mesmo aconteça com a componente 2 ou a 3. Ilustre graficamente o resultado do Teorema 1.56 considerando replicações ao nível das componentes e do sistema e $p_i = p'_i = p, i = 1, \dots, n$ (Barlow e Proschan (1975, p. 23)). •

Ao estudar-se a função de estrutura definiu-se a importância estrutural relativa da componente i de um sistema. É altura de definir a importância da fiabilidade da componente i de um sistema.

Definição 1.59 — Importância da fiabilidade da componente i

Analogamente pode falar-se na importância da fiabilidade da componente i de um sistema que, ao recorrer-se à decomposição fulcral da fiabilidade, se escreve:

$$\begin{aligned} I_r(i) &= \frac{\partial r(\underline{\mathbf{p}})}{\partial p_i} \\ &= r(1_i, \underline{\mathbf{p}}) - r(0_i, \underline{\mathbf{p}}) \\ &= E[\phi(1_i, \underline{\mathbf{X}})] - E[\phi(0_i, \underline{\mathbf{X}})]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Exercício 1.60 — Admita que as n componentes de um sistema foram numeradas por ordem crescente da sua fiabilidade: $p_1 \leq \dots \leq p_n$. Determine a importância da fiabilidade das componentes de um sistema em série e compare-as.

Repita os cálculos para um sistema em paralelo e de seguida para um sistema 2 – de – 3 (Barlow e Proschan, 1975, pp. 27–28).

Nota 1.61 — Importância da fiabilidade da componente i

A importância da fiabilidade da componente i pode ser usada para avaliar o **impacto de uma alteração da fiabilidade (p_i) de tal componente na fiabilidade do sistema.**

Com efeito,

$$\Delta r(\underline{\mathbf{p}}) \simeq \sum_{i=1}^n I_r(i) \Delta p_i \quad (1.30)$$

representa a perturbação na fiabilidade do sistema devido a perturbações Δp_i nas fiabilidades das componentes.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 20–28); Gertsbakh (1995, pp. 9–16); Ross (1993, pp. 411–5); Ross (2003, pp. 554–8).

1.6 Associação e limites para a fiabilidade

A obtenção de expressões e valores exactos para a fiabilidade nem sempre é tarefa fácil. Por esta razão serão adiantados alguns limites inferiores e superiores para esta quantidade, limites esses grosseiros mas fáceis de obter e muitas vezes utilizados pelos fabricantes, na informação dada ao cliente.

Antes de os enunciar e refinar, será necessária uma definição.

Definição 1.62 — Variáveis associadas (positivamente)

As v.a. T_1, \dots, T_n (não necessariamente binárias) dizem-se associadas (positivamente) sse

$$\text{cov}(\Gamma(\underline{\mathbf{T}}), \Delta(\underline{\mathbf{T}})) \geq 0 \quad (1.31)$$

para qualquer par de funções binárias Γ e Δ .

As v.a. independentes são, por sinal, associadas (positivamente).

Teorema 1.63 — Limites para a fiabilidade

Caso X_1, \dots, X_n sejam v.a. binárias associadas (positivamente), tem-se:

$$P(\min_{i=1, \dots, n} X_i = 1) \geq \prod_{i=1}^n P(X_i = 1) \quad (1.32)$$

$$P(\max_{i=1, \dots, n} X_i = 1) \leq 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(X_i = 1)]. \quad (1.33)$$

Nota 1.64 — Limites para a fiabilidade

Pode concluir-se que, ao assumir-se que as componentes de um sistema em série são independentes quando de facto são associadas

(positivamente), subestimar-se-á a fiabilidade do sistema, ou seja, estar-se-á a atribuir um valor à fiabilidade inferior ou igual ao seu verdadeiro valor.

O resultado inverte-se para um sistema em paralelo. •

Teorema 1.65 — Limites para a fiabilidade

Seja $r(\underline{\mathbf{p}})$ a fiabilidade de sistema constituído por componentes associadas (positivamente). Então:

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq r(\underline{\mathbf{p}}) = P[\phi(\underline{\mathbf{X}}) = 1] \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (1.34)$$

Estes limites para a fiabilidade podem ser melhorados caso se lide com um sistema coerente, constituído por componentes associadas (positivamente), e com caminhos mínimos $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_p$ e cortes mínimos $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_q$:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^q P[k_j(\underline{\mathbf{X}}) = 1] &\leq r(\underline{\mathbf{p}}) \\ &\leq 1 - \prod_{j=1}^p \{1 - P[\rho_j(\underline{\mathbf{X}}) = 1]\}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde, recorde-se,

$$\rho_j(\underline{\mathbf{x}}) = \min_{i \in \mathcal{P}_j} x_i = \prod_{i \in \mathcal{P}_j} x_i \quad (1.36)$$

$$k_j(\underline{\mathbf{x}}) = \max_{i \in \mathcal{K}_j} x_i = 1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} (1 - x_i). \quad (1.37)$$

Nota 1.66 — Limites para a fiabilidade em termos de caminhos/cortes mínimos

(1.34) pode traduzir-se do seguinte modo: a fiabilidade de um sistema com componentes associadas (positivamente) é enquadrada

pela fiabilidade de sistemas em série e em paralelo com componentes independentes.

Por seu lado, (1.35) corresponde ao enquadramento da fiabilidade de um sistema coerente com componentes associadas (positivamente) pela fiabilidade de um sistema em série (paralelo) constituído por subsistemas em paralelo (série) cujas componentes pertencem a cortes (caminhos) mínimos. •

Exercício 1.67 — Obtenha os limites inferiores e superiores, definidos em (1.34), para a fiabilidade de uma estrutura em ponte com componentes independentes e com fiabilidade comum $p_i = p$ ($p = 0.9, 0.95, 0.99$). Compare os limites obtidos com os da fiabilidade desta estrutura. Comente. •

Os limites para a fiabilidade podem ser explicitados à custa das fiabilidades das componentes quando estas são independentes como se verá de seguida.

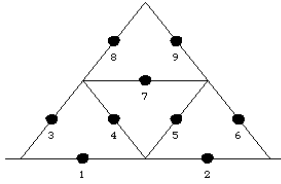
Teorema 1.68 — Limites para a fiabilidade em termos de caminhos/cortes mínimos

Seja $r(\underline{\mathbf{p}})$ a fiabilidade de um sistema com componentes independentes.

Então:

$$\prod_{j=1}^q \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} (1 - p_i) \right] \leq r(\underline{\mathbf{p}}) \leq 1 - \prod_{j=1}^p \left(1 - \prod_{i \in \mathcal{P}_j} p_i \right). \quad (1.38)$$

Exercício 1.69 — Considere a rede com dois terminais



descrita pela Figura 2.3.1 de Barlow e Proschan (1975, p. 35).

Obtenha um limite inferior e outro superior para a fiabilidade deste sistema assumindo que as suas componentes são independentes e possuem todas fiabilidade igual a p . •

Tirando partido do facto de a função de estrutura se poder escrever do seguinte modo

$$\phi(\underline{\mathbf{x}}) = \max_{j=1,\dots,p} \rho_j(\underline{\mathbf{x}}) = \max_{j=1,\dots,p} \min_{i \in \mathcal{P}_j} x_i \quad (1.39)$$

$$\phi(\underline{\mathbf{x}}) = \min_{j=1,\dots,q} k_j(\underline{\mathbf{x}}) = \min_{j=1,\dots,q} \max_{i \in \mathcal{K}_j} x_i, \quad (1.40)$$

podem adiantar-se limites adicionais para a fiabilidade de um sistema.

Teorema 1.70 — Limites Min-Max para a fiabilidade

Seja $r(\underline{\mathbf{p}})$ a fiabilidade de um sistema coerente. Então a fiabilidade pode ser enquadrada da seguinte forma

$$\max_{j=1,\dots,p} P(\min_{i \in \mathcal{P}_j} X_i = 1) \leq r(\underline{\mathbf{p}}) \leq \min_{j=1,\dots,q} P(\max_{i \in \mathcal{K}_j} X_i = 1). \quad (1.41)$$

Se para além disso as componentes estiverem associadas (positivamente), tem-se

$$\max_{j=1,\dots,p} \prod_{i \in \mathcal{P}_j} p_i \leq r(\underline{\mathbf{p}}) \leq \min_{j=1,\dots,q} \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} (1 - p_i) \right]. \quad (1.42)$$

•

Exercício 1.71 — Obtenha os limites enunciados no teorema anterior para os seguintes sistemas com componentes associadas e com $p_i = p$:

- sistema de alta fidelidade descrito no Exercício 1.12 e na Figura 1.1.4 de Barlow e Proschan (1975, p. 4);
- sistema em ponte. •

Exercício 1.72 — Considere um sistema $2-de-3$ com componentes independentes, possuindo cada uma delas fiabilidade p .

Compare os limites em (1.38) e os limites Min-Max (1.42) e identifique as gamas de valores de p para os quais é preferível usar os limites Min-Max. •

Em Ross (2003, pp. 560–568) pode encontrar-se a descrição de um método alternativo para a obtenção de limites inferiores e superiores para a fiabilidade: o método da inclusão e exclusão.

Este método baseia-se numa fórmula bem conhecida da reunião dos eventos E_1, \dots, E_n ,

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^n E_i) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) \\ &\quad + \sum_{i<j<k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_1 \cap \dots \cap E_n), \end{aligned} \quad (1.43)$$

e, em particular, nas seguintes desigualdades:

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad (1.44)$$

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) \geq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^n E_i) &\leq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i<j} \sum P(E_i \cap E_j) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} \sum \sum P(E_i \cap E_j \cap E_k) \\
&\geq \dots \\
&\leq \dots
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Teorema 1.73 — Limites para a fiabilidade pelo método da inclusão e exclusão

Sejam:

- $r(\underline{\mathbf{p}})$ a fiabilidade de um sistema coerente;
- \mathcal{P}_i ($i = 1, \dots, p$) os caminhos mínimos;
- E_i o evento que representa o funcionamento de todas as componentes que pertencem ao caminho mínimo \mathcal{P}_i ;
- \mathcal{K}_i ($i = 1, \dots, q$) os cortes mínimos;
- F_i o evento que representa o não funcionamento de todas as componentes que pertencem ao corte mínimo \mathcal{K}_i .

Então

$$r(\underline{\mathbf{p}}) = P\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right) \tag{1.47}$$

$$1 - r(\underline{\mathbf{p}}) = P\left(\bigcup_{i=1}^q F_i\right), \tag{1.48}$$

pelo que pode adiantar-se que a fiabilidade pode ser enquadrada da seguinte forma:

$$r(\underline{\mathbf{p}}) \leq \sum_{i=1}^p P(E_i) \tag{1.49}$$

$$r(\underline{\mathbf{p}}) \geq \sum_{i=1}^p P(E_i) - \sum_{i<j} \sum P(E_i \cap E_j) \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned}
r(\underline{\mathbf{p}}) &\leq \sum_{i=1}^p P(E_i) - \sum_{i<j} \sum P(E_i \cap E_j) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} \sum \sum P(E_i \cap E_j \cap E_k),
\end{aligned} \tag{1.51}$$

onde

$$P(E_i \cap E_j) = \prod_{l \in \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j} p_l \tag{1.52}$$

$$1 - r(\underline{\mathbf{p}}) \leq \sum_{i=1}^q P(F_i) \tag{1.53}$$

$$1 - r(\underline{\mathbf{p}}) \geq \sum_{i=1}^q P(F_i) - \sum_{i<j} \sum P(F_i \cap F_j) \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
1 - r(\underline{\mathbf{p}}) &\leq \sum_{i=1}^q P(F_i) - \sum_{i<j} \sum P(F_i \cap F_j) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} \sum \sum P(F_i \cap F_j \cap F_k)
\end{aligned} \tag{1.55}$$

$$P(F_i \cap F_j) = \prod_{l \in \mathcal{K}_i \cup \mathcal{K}_j} (1 - p_l). \tag{1.56}$$

Exercício 1.74 — Baseie-se no teorema anterior de modo a obter limites inferiores e superiores para a fiabilidade de um sistema em ponte constituído por componentes independentes com fiabilidades $p_i = p$ (Ross, 2003, p. 563).

Compare estes limites com os obtidos para o mesmo sistema no Exercício 1.71.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 29–39); Ross (2003, pp. 559–571).

Capítulo 2

Estatísticas ordinais e tempos de vida de estruturas usuais em fiabilidade

2.1 Introdução

Antes de nos debruçarmos sobre as estatísticas ordinais e a sua pertinência no contexto da fiabilidade convém referir que, numa perspectiva *dinâmica/temporal*, devem considerar-se as seguintes quantidades importantes.

Definição informal 2.1 — Tempo de vida da componente i

A componente i vê o seu tempo de vida (tempo até falha) representado por T_i . Trata-se de uma v.a. não negativa. •

Definição informal 2.2 — Tempo de vida do sistema

É representado por T e depende (exclusivamente) das durações de vida das n componentes, i.e., de T_1, \dots, T_n . •

Definição 2.3 — Função de fiabilidade (de um sistema)

Expressa a probabilidade do sistema desempenhar as funções requeridas sob certas condições num intervalo de tempo fixo,

usualmente $[0, t]$. Esta função é usualmente representada por $R(t)$ (ou $R_T(t)$) e assume-se que $R(0) = 1$.

Do ponto de vista qualitativo a fiabilidade pode ser definida como a capacidade de um sistema se manter funcional sem interrupções (pelo menos) até ao instante t .¹ Logo, corresponde à função de sobrevivência de T , i.e.,

$$R_T(t) = \bar{F}_T(t) = 1 - F_T(t) = P(T > t). \quad (2.1)$$

Motivação 2.4 — Importância das estatísticas ordinais em fiabilidade

Prende-se essencialmente com dois factos:

- o tempo de vida T de uma estrutura pode exprimir-se como função de estatísticas ordinais envolvendo os tempos de vida das componentes da estrutura, T_1, \dots, T_n ;
- em testes de vida/análise de sobrevivência é usual inferir sobre parâmetros de T usando **amostras censuradas**, donde se faça uso de verosimilhanças que estão associadas à f.d.p. de certo número de estatísticas ordinais. •

Ao assumir-se que os **tempos de vida** T_1, \dots, T_n são **v.a. i.i.d.** com f.d. comum $F(t) = P(T_i \leq t)$ e **função de fiabilidade comum** $R(t) = P(T_i > t) = 1 - F(t)$, $i = 1, \dots, n$, pode obter-se a função de fiabilidade (ou sobrevivência) $R_T(t) = P(T > t)$ de algumas estruturas usuais em fiabilidade sem grande dificuldade.

¹Isto não significa que as “partes redundantes” do sistema não possam falhar e ser reparadas.

Exemplo 2.5 — Tempo de vida de estrutura em série

É sabido que uma estrutura em série funciona sse o mesmo ocorrer com todas as suas componentes. Assim, o tempo de vida corresponde à estatística ordinal

$$T = \min\{T_1, \dots, T_n\} = T_{(1)} \quad (2.2)$$

e a função de fiabilidade é dada por

$$\begin{aligned} R_T(t) &= P(T_i > t, i = 1, \dots, n) \\ &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \\ &= [R(t)]^n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

caso as v.a. T_i sejam **i.i.d.** com função de fiabilidade comum $R(t)$. •

Exemplo 2.6 — Tempo de vida de estrutura em paralelo

Uma estrutura em paralelo funciona desde que pelo menos uma das suas componentes funcione, pelo que o tempo de vida da estrutura corresponde à estatística ordinal

$$T = \max\{T_1, \dots, T_n\} = T_{(n)} \quad (2.4)$$

e a função de fiabilidade associada é igual a

$$\begin{aligned} R_T(t) &= 1 - P(T_i \leq t, i = 1, \dots, n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(T_i \leq t) \\ &= 1 - [1 - R(t)]^n, \end{aligned} \quad (2.5)$$

caso as v.a. T_i sejam **i.i.d.** com função de fiabilidade comum $R(t)$. •

Exemplo 2.7 — Tempo de vida de estrutura k-de-n

O tempo de vida de uma estrutura k -de- n também está associado a uma estatística ordinal:

$$T = T_{(n-k+1)}. \quad (2.6)$$

Ao considerar-se $k = n$ (resp. $k = 1$) lida-se com o tempo de vida de uma estrutura em série (resp. paralelo).

A função de fiabilidade de T obtém-se recorrendo à seguinte v.a. auxiliar:

$$Z_t = \text{número de } T_i's > t \sim \text{binomial}(n, R(t)). \quad (2.7)$$

Com efeito, a função de fiabilidade de uma estrutura k -de- n pode escrever-se à custa da f.d. da v.a. auxiliar com distribuição *binomial*:

$$\begin{aligned} R_T(t) &= P(Z_t \geq k) \\ &= 1 - P(Z_t \leq k - 1) \\ &= 1 - F_{\text{binomial}(n, R(t))}(k - 1) \\ &= P(n - Z_t \leq n - k) \\ &= F_{\text{binomial}(n, F(t))}(n - k), \end{aligned} \quad (2.8)$$

caso as v.a. T_i sejam **i.i.d.** com função de fiabilidade comum $R(t)$. •

Nota 2.8 — Importa notar que a função de fiabilidade de um sistema de ordem n , coerente e com componentes não necessariamente independentes pode escrever-se à custa da fiabilidade do sistema (r) e das funções de fiabilidade das componentes $\underline{\mathbf{p}}(t) = (R_1(t), \dots, R_n(t))$:

$$R_T(t) = r(\underline{\mathbf{p}}(t)) = r((R_1(t), \dots, R_n(t))). \quad (2.9)$$

• **Exercício 2.9** — Determine a função de fiabilidade de uma estrutura 2-de-3 com componentes independentes e função de fiabilidade comum $R(t)$, recorrendo a (2.8) e a (2.9). •

Exemplo/Exercício 2.10 — Funções de fiabilidade dos estruturas em série e em paralelo (v.a. independentes)

Ao assumir-se que os tempos de vida T_i são v.a. independentes com funções de fiabilidade distintas $R_i(t)$, as funções de fiabilidade dos

tempos de vida de estruturas em série e em paralelo são dadas por

$$R_{T_{(s)}}(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

$$R_{T_{(n)}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)],$$

respectivamente. Prove estes dois resultados. •

Exercício 2.11 — Considere um sistema em série constituído por n componentes independentes. Determine a função de fiabilidade do sistema considerando que o tempo de vida da componente i possui distribuição:

a) exponencial(λ_i), i.e., $F_{T_i}(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t), t \geq 0$;

b) Uniforme($0, \theta$), i.e., $f_{T_i}(t) = \theta^{-1}, 0 \leq t \leq \theta$;

c) Weibull(λ, β), i.e., $F_{T_i}(t) = 1 - \exp[-(t/\lambda)^\beta], t \geq 0$.

Deduz agora a função de fiabilidade dos sistemas em paralelo com componentes com as distribuições acima. •

Nota 2.12 — **Obtenção do valor esperado e variância à custa da função de fiabilidade**

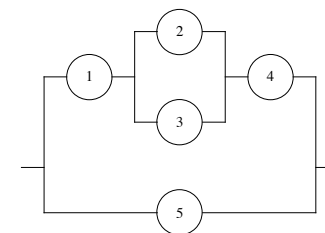
Tratando-se a vida T de uma v.a. não negativa, pode adiantar-se que:

$$E(T) = \int_0^\infty R_T(t) dt \quad (2.10)$$

$$E(T^2) = 2 \int_0^\infty t R_T(t) dt \quad (2.11)$$

$$V(T) = 2 \int_0^\infty t R_T(t) dt - \left(\int_0^\infty R_T(t) dt \right)^2. \quad (2.12)$$

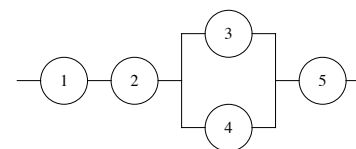
Exercício 2.13 — Defina a vida do sistema descrito pela Figura 1.5 de Gertsbakh (1995, pp. 15–16) e determine a sua função de fiabilidade, assumindo que os tempos de vida T_i são v.a. independentes com funções de fiabilidade distintas $R_i(t)$.



Calcule o valor esperado e a variância do tempo de vida do sistema na situação em que os tempos de vida das componentes são v.a. independentes com distribuição comum exponencial(1). •

Exercício 2.14 — Obtenha o valor esperado e a variância do tempo de vida de um sistema em série com três componentes independentes e distribuídas uniformemente no intervalo $(0, 10)$. •

Exercício 2.15 — Obtenha a função de fiabilidade do sistema descrito na Figura 1.7 de Gertsbakh (1995, p. 29), considerando que os tempos de vida das 5 componentes são independentes e possuem distribuição exponencial(λ_i).



Calcule o valor esperado do tempo de vida deste sistema. •

Exercício 2.16 — Um sistema tem a configuração descrita pela Figura 1.11 de Gertsbakh (1995, p. 32), i.e., dois módulos em paralelo, com n e m componentes independentes dispostas em série.

Deduza a função de fiabilidade $R_T(t)$, caso as componentes do primeiro (resp. segundo) dos módulos possuam com distribuição exponencial(λ) (resp. exponencial(μ)). Obtenha também $E(T)$ e $V(T)$. •

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, pp. 140–3); Ross (2003, pp. 571–586).

2.2 Associação e limites para a função de fiabilidade

Ao contrário do que seria de esperar, não abundam expressões para limites inferiores e superiores para a função de fiabilidade.

Antes de os enunciar é necessário relembrar que as v.a. contínuas T_1, \dots, T_n dizem-se associadas (positivamente) sse $cov(\Gamma(\mathbf{T}), \Delta(\mathbf{T})) \geq 0$ para qualquer par de funções binárias Γ e Δ .

Teorema 2.17 — Limites para a função de fiabilidade

Para v.a. T_1, \dots, T_n associadas (positivamente) não necessariamente binárias, tem-se

$$P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) \geq \prod_{i=1}^n P(T_i > t_i) \quad (2.13)$$

$$P(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) \geq \prod_{i=1}^n P(T_i \leq t_i). \quad (2.14)$$

Consequentemente tem-se, para sistemas em série e em paralelo:

$$R_{T_{(1)}}(t) = P(\min_{i=1, \dots, n} T_i > t) \geq \prod_{i=1}^n P(T_i > t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} R_{T_{(n)}}(t) = P(\max_{i=1, \dots, n} T_i > t) &\leq 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(T_i > t)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nota 2.18 — Limites para a função de fiabilidade

Ao assumir-se que as componentes de um sistema em série são independentes quando de facto são associadas (positivamente),

subestimar-se-á a função de fiabilidade do sistema, i.e., estar-se-á a atribuir um valor à função de fiabilidade inferior ou igual ao seu verdadeiro valor.

O resultado inverte-se para um sistema em paralelo. •

Teorema 2.19 — Limites para a função de fiabilidade

Seja $R_T(t)$ a função de fiabilidade de um sistema constituído por componentes com tempos de vida T_1, \dots, T_n associados (positivamente) e com funções de fiabilidade $R_1(t), \dots, R_n(t)$. Então a função de fiabilidade verifica

$$\prod_{i=1}^n R_i(t) \leq R_T(t) \leq 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)]. \quad (2.17)$$

Nota 2.20 — Limites para a função de fiabilidade

O resultado (2.17) traduz-se do seguinte modo: a função de fiabilidade de um sistema nas condições do Teorema 2.19 é superior (resp. inferior) à de um sistema em série (resp. paralelo) com componentes independentes. •

Exercício 2.21 — Obtenha limites para a função de fiabilidade de um sistema 2-de-3 com componentes associadas e exponencialmente distribuídas com tempo esperado de vida igual a λ^{-1} .

Elabore um gráfico com estes limites e com a função de fiabilidade de um sistema 2-de-3 com componentes i.i.d. a $Exp(\lambda)$. •

Teorema 2.22 — Outros limites para a função de fiabilidade

Sejam:

- $R_T(t)$ a função de fiabilidade de um sistema coerente constituído por componentes com tempos de vida T_1, \dots, T_n associados (positivamente) e com funções de fiabilidade $R_1(t), \dots, R_n(t)$;

- \mathcal{P}_j ($j = 1, \dots, p$) e \mathcal{K}_j ($j = 1, \dots, q$) os caminhos mínimos e os cortes mínimos deste sistema.

Então a função de fiabilidade pode ser enquadrada do seguinte modo:

$$\max_{j=1, \dots, p} \left\{ \prod_{i \in \mathcal{P}_j} R_i(t) \right\} \leq R_T(t) \leq \min_{j=1, \dots, q} \left\{ 1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} [1 - R_i(t)] \right\}. \quad (2.18)$$

Exercício 2.23 — Retome o Exercício 2.21 e obtenha novos limites para a função de fiabilidade do sistema. •

Elabore um gráfico que permita confrontar estes limites com os obtidos naquele exercício. •

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 29–39, 150).

2.3 Mecanismos de censura

Nesta secção pretende ilustrar-se brevemente de que modo as estatísticas ordinais (para além do máximo e do mínimo) são úteis em fiabilidade, nomeadamente na estimação de parâmetros.

Este tema será aprofundado no Capítulo 5 aquando da discussão de inferências sobre modelos para diferentes tipos de ensaio ou teste.

Em fiabilidade é frequente recolher dados/tempos de avaria de equipamento e será com este tipo de dados que se introduzirá a noção de censura/dados censurados.

Ao colocar-se em teste n componentes/equipamentos, com o objectivo de inferir sobre o tempo de vida dessas componentes — aquilo que se designa usualmente por teste de vida —, pode recolher-se todos os instantes de avaria das componentes, t_1, \dots, t_n .

Pode também optar-se pelo registo do instante da primeira avaria, $t_{(1)}$, da segunda avaria, $t_{(2)}$, e assim por diante, sem se ter em consideração quais das componentes avariaram. Está-se neste caso a registar as observações de **estatísticas ordinais**, $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$, e não as concretizações das v.a. T_1, T_2, \dots, T_n .

Uma das vantagens do registo destas observações ordenadas prende-se com o facto de o teste de vida poder terminar antes que todas as componentes avariem sem que se perca muita informação, poupando-se no entanto muito tempo de teste.

A este tipo de recolha de informação denomina-se de **amostragem com censura**.

Por exemplo, 90% das lâmpadas colocadas em teste pode fundir-se ao fim de um ano e algumas das restantes poderão vir a fundir-se somente daí a três anos...

As inferências sobre o tempo de vida dessas componentes podem basear-se directamente em estatísticas ordinais $(T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)})$. E uma vez que estas são função da amostra aleatória (T_1, T_2, \dots, T_n) pode obter-se a f.d.p. conjunta de $(T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)})$ do seguinte modo.

Teorema 2.24 — Densidade conjunta das estatísticas ordinais

Seja (T_1, T_2, \dots, T_n) uma amostra aleatória de dimensão n proveniente da população com f.d.p. $f(t)$ e f.d. $F(t)$. Então a f.d.p. conjunta das estatísticas ordinais $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$ — ou mais convenientemente $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n}$ — é dada por

$$f_{T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n}}(t_{1:n}, t_{2:n}, \dots, t_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^n f(t_{i:n}), \quad (2.19)$$

para $-\infty < t_{1:n} < t_{2:n} < \dots < t_{n:n} < \infty$. •

Lidaremos com **dados completos**, caso se recolha os instantes de avaria de todos os sistemas/componentes, e com **dados incompletos ou censurados**, caso contrário. A seguir descrevem-se dois **tipos de censura** de dados.

Definição informal 2.25 — Censura do Tipo I

Ao decidir-se concluir o teste de vida ao fim de tempo fixo t_0 dir-se-á que foi efectuada **censura do Tipo I à direita**. •

Definição informal 2.26 — Censura do Tipo II

Caso se decida terminar o teste de vida após o registo das primeiras r observações ordenadas, $t_{1:n}, \dots, t_{r:n}$, dir-se-á que foi efectuada **censura do tipo II à direita**. •

Nota 2.27 — Censuras dos Tipos I e II

Ao adoptar-se censura do Tipo I o número de tempos de vida registados é uma v.a. (Qual é a sua distribuição e a probabilidade de não serem registados quaisquer tempos de vida?)

Ao efectuar-se censura de Tipo II o número de observações a registar é à partida fixo e igual a r mas a duração do teste é aleatória. (Qual a duração do teste?)

A censura do Tipo II à direita é de longe o tipo de censura mais popular em testes de vida em fiabilidade.

O **tempo esperado poupado**, ao efectuar-se censura do Tipo II à direita, é igual a $E(T_{n:n} - T_{r:n})$.

Factores como o custo das componentes em teste, a precisão desejada para as inferências e o valor (monetário) que o tempo poupado representa desempenham um papel crucial na escolha de r e n . •

Ao recorrer-se a dados completos a densidade conjunta é igual

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i) \quad (2.20)$$

Os dois teoremas seguintes adiantam para já as densidades conjuntas (verosimilhanças) caso se efectue censuras dos tipos I e II.

Teorema 2.28 — Densidade conjunta na presença de censura do Tipo I

Suponha-se que foi efectuada censura de Tipo I à direita no instante t_0 . E seja R o número aleatório de observações registadas até t_0 e r o número de estatísticas efectivamente observadas até t_0 .

Então a f.d.p. conjunta (verosimilhança), $f_{T_{1:n}, \dots, T_{r:n}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) \equiv f(t_{1:n}, \dots, t_{r:n})$, é neste caso dada por

$$\begin{aligned} f(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) &= h(t_{1:n}, \dots, t_{r:n} \mid R = r) \times P(R = r) \\ &= r! \prod_{i=1}^r \frac{f(t_{i:n})}{F(t_0)} \\ &\quad \times \binom{n}{r} [F(t_0)]^r [1 - F(t_0)]^{n-r}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

para $-\infty < t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < t_0 < \infty$ e $r = 1, \dots, n$. (Justifique!) •

Teorema 2.29 — Densidade conjunta na presença de censura do Tipo II

Suponha-se agora que foi efectuada censura de Tipo II à direita. Então a f.d.p. conjunta (verosimilhança) é, para $-\infty < t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$ e $r = 1, \dots, n$, igual a

$$f(t_{1:n}, \dots, t_{r:n}) = r! \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}) \times \binom{n}{n-r} [1 - F(t_{r:n})]^{n-r}. \quad (2.22)$$

(Justifique!) •

Exercício 2.30 — Admita que foram submetidas a teste n componentes com tempos de vida i.i.d. a exponencial(λ) e que se efectuou censura do Tipo II.

Obtenha a estimativa (estimador) de máxima verosimilhança de λ e compare-a com a que obteria com caso dispusesse de dados completos (Gomes e Barão, 1999, pp. 150–151). •

A caracterização e as propriedades do estimador de λ obtido no Exercício 2.30 serão estudadas posteriormente.

Textos de apoio: Bain (1991, pp. 49–53); Gomes e Barão (1999, pp. 149–152).

Capítulo 3

Envelhecimento estocástico e função taxa de falha

3.1 Função taxa de falha

Nesta secção discutir-se-á a **caracterização estocástica** do **envelhecimento** de qualquer material/estrutura/dispositivo, caracterização essa de importância crucial no domínio da fiabilidade.

Os materiais/estruturas/dispositivos podem *falhar* de diversos modos. Basta pensar em:

- falhas (estáticas) aquando de fractura devida a esforço;
- corrosão química de materiais;
- falhas de equipamento electrónico devido a alterações de temperatura, humidade ou manufactura deficiente.

De forma a **distinguir** as diversas **funções** (densidade) de **probabilidade** (quando tal distinção não é passível de ser feita com base nas observações dos tempos até falha) apelar-se-á à noção de **função taxa de falha** (*hazard rate function* ou *failure rate function*), que é uma **forma matemática de descrever o envelhecimento** —

e corresponde ao que em **análise de sobrevivência** se designa por **força de mortalidade** (instantânea).

Na definição de função taxa de falha de uma v.a. considerar-se-á que esta é não negativa e distinguir-se-á o caso contínuo do caso discreto.

Definição 3.1 — Função taxa de falha (caso contínuo)

Seja T uma **v.a. contínua não negativa**, com f.d.p. e f.d. iguais a $f_T(t)$ e $F_T(t)$, respectivamente. Então a **função taxa de falha** de T é dada por

$$\lambda_T(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}. \quad (3.1)$$

•

Nota 3.2 — Função taxa de falha (caso contínuo)

Admita-se que T representa a duração de vida de uma estrutura. Então a função taxa de falha possui um significado probabilístico específico:

$$\lambda_T(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + dt | T > t)}{dt}. \quad (3.2)$$

Assim, $\lambda_T(t)dt$ está associada à probabilidade condicional de um item com idade t ($t > 0$) vir a falhar no intervalo $(t, t + dt]$.

Caso se disponha da função de fiabilidade da v.a. contínua T , $R_T(t)$, pode adiantar-se que

$$\lambda_T(t) = -\frac{\frac{dR_T(t)}{dt}}{R_T(t)},$$

pele que não surpreende a próxima proposição.

•

Proposição 3.3 — Funções taxa de falha e fiabilidade

A **função de fiabilidade** (ou sobrevivência) da v.a. T contínua não negativa pode definir-se à **custa da função taxa de falha**:

$$R_T(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda_T(u) du \right], \quad (3.3)$$

onde o integral representa aquilo que, em análise de sobrevivência, se designa de função *hazard* cumulativa. •

Exercício 3.4 – a) Após estudos preliminares, um engenheiro afirmou que a duração da componente electrónica por ele construída possui duração que podia ser muito bem representada por uma v.a. T cuja função taxa de falha é constante e igual a λ , $t \geq 0$.

Identifique a distribuição de T .

b) Considere as v.a. $T_1 \sim \text{Exponencial}(\lambda = 1)$ e $T_2 \sim \text{Weibull}(\alpha = 1/\Gamma(1+1/\beta), \beta = 1.1)$,¹ que possuem em qualquer dos casos valor esperado unitário.

Obtenha e confronte os gráficos das f.d.p., f.f. e f.t.f. destas duas v.a. •

Exercício 3.5 — Determine a função de fiabilidade de um sistema cuja função taxa de falha é:

a) $\lambda_T(t) = \alpha t$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$;

b) $\lambda_T(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$, $t \geq 0$, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$. •

Exercício 3.6 — Calcule a função de fiabilidade de um instrumento cuja duração possui função taxa de falha igual a

$$\lambda_T(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ \beta, & a < t \leq b \\ \beta e^{(t-b)/c}, & t > b \quad (c \geq 0). \end{cases} \quad (3.4)$$

¹I.e., $R_{T_2}(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]$, $t \geq 0$, $\alpha, \beta > 0$.

Exercício 3.7 — A função taxa de falha duma componente mecânica é constante e igual 0.005.

Suponha que a componente vai ser precisa para um serviço de 250 horas. Calcule a probabilidade da componente falhar durante o serviço. •

Exercício 3.8 — Um consumidor pretende adquirir componentes electrónicas com a seguinte especificação: a fiabilidade de cada componente deve ser de pelo menos 95% num período de funcionamento de 500 dias.

Supondo que a taxa de falha da componente é constante, calcule a vida esperada mínima da componente. •

Exercício 3.9 — Diz-se que a força de mortalidade dum fumador é, para qualquer idade, o dobro da de um não fumador.

Qual o significado desta afirmação? Querirá dizer que a probabilidade do fumador sobreviver t anos corresponde a metade da mesma probabilidade calculada para um não fumador? •

Definição 3.10 — **Função taxa de falha (caso discreto)**

Seja T uma v.a. discreta não negativa. Então T possui **função taxa de falha** definida por

$$\lambda_T(t) = \frac{P(T = t)}{P(T \geq t)}. \quad (3.5)$$

Nota 3.11 — **Função taxa de falha (caso discreto)**

Observe-se que, ao contrário da definição de taxa de falha no caso contínuo, no denominador não figura $P(T > t)$. Caso tal ocorresse, qualquer v.a. T discreta não negativa, com contradomínio finito

$\{t_1, \dots, t_n\}$ (onde $t_1 < \dots < t_n$) não possuiria função taxa de falha definida no ponto t_n .

Considere-se que a v.a. inteira não negativa T representa o número de ciclos de vida de uma estrutura. Então a função taxa de falha, por se identificar com $P(T = t | T \geq t)$, coincide com a probabilidade da vida dessa mesma estrutura terminar ao fim de exactamente t ciclos, condicional ao facto de a estrutura ter sobrevivido a pelo menos t ciclos. •

Exercício 3.12 — Obtenha e elabore o gráfico da função taxa de falha da v.a. geométrica(p). •

Exercício 3.13 — Seja T uma v.a. discreta que toma valores inteiros não negativos.

- Determine a função $P(T \geq t)$ por intermédio da função taxa de falha de T .
- Exemplifique o resultado para o caso em que $T \sim$ geométrica(p).
- Verifique que, caso T tome os valores não negativos $\{t_1, t_2, \dots\}$ (onde $t_1 < t_2 < \dots$), se tem

$$P(T \geq t) = \prod_{\{j:t_j < t\}} [1 - \lambda_T(t_j)]. \quad (3.6)$$

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 9–18). •

3.2 Monotonia da função taxa de falha

O tempo de vida pode estar associado a funções taxa de falha com os **comportamentos** mais **diversos**:

- **constantes** — a estrutura não envelhece nem rejuvenesce com o tempo;
- **crecentes** — a estrutura envelhece com o tempo;
- **decrecentes** — a estrutura rejuvenesce com o tempo;²
- **não monótono** — por exemplo, em **forma de banheira** (*bathhtub*), i.e., inicialmente decrescente (“infância”), seguida de fase constante (“adolescência e idade adulta”), e por fim crescente (“velhice”). Ver Figura 3.1.1 de Barlow e Proschan (1975, pp. 55–56).

Definição 3.14 — **Distribuições IHR e DHR** (Barlow e Proschan, 1965/1996, pp. 23–24)

Considere-se a v.a. não discreta e não negativa T com f.d. $F_T(t)$ e f.f. $R_T(t) = 1 - F_T(t)$. Então:

- T diz-se **IHR** (resp. **DHR**)³ — escrevendo-se neste caso $T \in$ **IHR** (resp. $T \in$ **DHR**) — sse

$$P(t < T \leq t + x | T > t) = 1 - \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}$$

for uma função monótona crescente (resp. decrescente) em t para $x > 0$ e $t \geq 0$ tal que $F_T(t) < 1$.

²Certos materiais, como o aço, aumentam de resistência à medida que vão sendo trabalhados.

³O acrónimo **IHR** (resp. **DHR**) significa *Increasing Hazard Rate* (resp. *Decreasing Hazard Rate*). É usual recorrer também ao acrónimo **IFR** (resp. **DHR**), que significa *Increasing Failure Rate* (resp. *Decreasing Failure Rate*).

Caso T seja uma v.a. contínua não negativa com f.d.p. $f_T(t)$, $T \in IHR$ (resp. $T \in DHR$) sse $\lambda_T(t)$ for uma função monótona crescente (resp. decrescente) em \mathbb{R}_0^+ .

Considere-se uma v.a. discreta T com f.t.f. $\lambda_T(t) = \frac{P(T=t)}{P(T \geq t)}$.⁴ Então:

- $T \in IHR$ (resp. $T \in DHR$) sse $\lambda_T(t)$ for uma função não decrescente (resp. não crescente) de t . •

Exercício 3.15 — Mostre que a função taxa de falha de uma duração de vida com distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ é crescente. •

Exercício 3.16 — a) Obtenha e elabore alguns gráficos da função taxa de falha das seguintes distribuições:

1. Poisson
2. Weibull.

b) Classifique estas distribuições quanto ao comportamento da função taxa de falha. •

Exercício 3.17 — A duração de vida de uma componente segue uma distribuição normal com desvio padrão de 10 horas.

- a) Se a componente tiver uma fiabilidade de 0.99 para um período de operação de 100 horas, qual a duração de vida esperada?
- b) Elabore o gráfico da função taxa de falha e classifique-a quanto ao seu comportamento monótono. •

Exercício 3.18 — Elabore o gráfico da função taxa de falha das v.a. $gama(\alpha, \delta)$, para $\alpha = 0.5, 1, 2.5$ e $\delta = 1$, onde α e δ^{-1} representam os parâmetros de forma e escala, respectivamente.

⁴Na verdade, Barlow e Proschan (1965/1996, p. 24) são mais restritivos e consideram que T é uma v.a. discreta inteira não negativa.

Demonstre que, efectuando a mudança de variável $y = u - t$, a função taxa de falha de uma duração com distribuição $gama(\alpha, \delta)$ se escreve:

$$\begin{aligned} \lambda_{gama(\alpha, \delta)}(t) &= \frac{1}{\int_t^{+\infty} (u/t)^{\alpha-1} \exp[-\delta(u-t)] du} \\ &= \frac{1}{\int_0^{+\infty} (1+y/t)^{\alpha-1} \exp(-\delta y) dy}. \end{aligned}$$

Utilize este resultado para identificar condições suficientes que garantam comportamentos monótonos decrescentes e crescentes da função taxa de falha (Ross, 2003, p. 573). •

Proposição 3.19 — **Distribuições DHR e comportamento monótono da f.d.p.**

A monotonia da função de taxa de falha tem implicações na monotonia da f.d.p. de um tempo de vida:

- $T \in DHR \Rightarrow f_T(t)$ é monótona decrescente. •

Exercício 3.20 — a) Prove a proposição anterior.

b) Mostre que a v.a. T com função de fiabilidade

$$R_T(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ t^{-3}, & t \geq 1 \end{cases}$$

possui f.d.p. decrescente, no entanto, $T \notin DHR$. •

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 52–56); Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 22–6).

3.3 Preservação da monotonia da taxa de falha

Conhecido o comportamento monótono da taxa de falha das componentes de uma estrutura, pode, nalguns casos, conhecer-se também o da taxa de falha de

- suas estatísticas ordinais,
- soma de tais tempos de vida,
- mistura dos mesmos,

ou mesmo de um sistema coerente.

Serão dados alguns exemplos de **preservação do comportamento monótono da função taxa de falha** face às operações de fiabilidade acima descritas. Contudo antes de o fazer reescrever-se-á a taxa de falha de estruturas em série e em paralelo à custa da função taxa de falha comum às suas componentes.

Exercício 3.21 — Função taxa de falha de estruturas em série e em paralelo (caso i.i.d.)

Considere duas estruturas em série e em paralelo, constituídas por componentes com durações T_i ($i = 1, \dots, n$) i.i.d., f.d. e taxa de falha comuns $F(t)$ e $\lambda(t)$.

- a) Prove que as funções taxa de falha de estruturas em série e em paralelo **podem escrever-se à custa da função taxa de falha comum (e não só):**

$$\begin{aligned}\lambda_{T_{(1)}}(t) &= \frac{-\frac{d}{dt} \{[R(t)]^n\}}{[R(t)]^n} \\ &= n \lambda(t)\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{T_{(n)}}(t) &= \frac{-\frac{d}{dt} \{1 - [1 - R(t)]^n\}}{1 - [1 - R(t)]^n} \\ &= \frac{n \lambda(t)}{\sum_{j=0}^{n-1} [F(t)]^{-j}},\end{aligned}\quad (3.8)$$

respectivamente. Importa notar que a igualdade $\lambda_{T_{(n)}}(t) = \frac{n \lambda(t)}{\sum_{j=0}^{n-1} [F(t)]^{-j}}$ revela-se particularmente útil na averiguação do comportamento monótono da função taxa de falha de $T_{(n)}$.

- b) Compare $\lambda_{T_{(1)}}(t)$, $\lambda_{T_{(n)}}(t)$ e $\lambda(t)$.
- c) Faça comentários acerca da preservação do comportamento monótono de $\lambda(t)$ pela função taxa de falha destes dois tipos de estrutura. •

Exercício 3.22 — Função taxa de falha de estruturas em série e em paralelo (caso independente)

- a) **Prove agora que, ao assumir-se** somente independência dos tempos de vida das n componentes, a função taxa de falha de uma estrutura em série, se escreve

$$\begin{aligned}\lambda_{T_{(1)}}(t) &= \frac{-\frac{d}{dt} \{\prod_{i=1}^n R_i(t)\}}{\prod_{i=1}^n R_i(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(t),\end{aligned}\quad (3.9)$$

onde $R_i(t)$ e $\lambda_i(t)$ representam a função de sobrevivência e a função taxa de falha de T_i , respectivamente.

- b) Verifique que, nas mesmas circunstâncias, o tempo de vida de uma estrutura em paralelo, $T_{(n)}$, possui função taxa de falha igual a

$$\lambda_{T_{(n)}}(t) = \frac{-\frac{d}{dt} \{1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)]\}}{1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)]}\quad (3.10)$$

$$= \frac{F_{T_{(n)}}(t)}{\bar{F}_{T_{(n)}}(t)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [1/F_i(t) - 1].$$

De notar que a igualdade $\lambda_{T_{(n)}}(t) = \frac{F_{T_{(n)}}(t)}{\bar{F}_{T_{(n)}}(t)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [1/F_i(t) - 1]$ é uma mera curiosidade, pelo que o/a leitor/a devem coibir-se de a utilizar. •

Os exercícios anteriores sugerem algumas das preservações do comportamento monótono da função taxa de falha das estatísticas ordinais enunciadas na proposição seguinte. Com efeito, a proposição seguinte acrescenta que o comportamento monótono da função taxa de falha da duração de uma estrutura constituída por n componentes com durações independentes (identicamente distribuídas, ou não) depende não só do da função taxa de falha de tais componentes, como da disposição das mesmas na estrutura.

Proposição 3.23 — Preservação da monotonia da taxa de falha: mínimo e máximo

Considere-se uma estrutura com n componentes com **durações independentes**. Caso a estrutura seja em série, verifica-se:

$$T_i \sim_{indep} IHR, i = 1, \dots, n \Rightarrow T_{(1)} \in IHR \quad (3.11)$$

$$T_i \sim_{indep} DHR, i = 1, \dots, n \Rightarrow T_{(1)} \in DHR. \quad (3.12)$$

Ao tratar-se de estrutura em paralelo tem-se:

$$T_i \sim_{indep} IHR, i = 1, \dots, n \not\Rightarrow T_{(n)} \in IHR \quad (3.13)$$

$$T_i \sim_{iid} IHR, i = 1, \dots, n \Rightarrow T_{(n)} \in IHR. \quad (3.14)$$

Saliente-se que, em estruturas em série constituídas por componentes cujas durações possuem função taxa de falha monótona,

para garantir a preservação do comportamento monótono da taxa de falha da duração da estrutura é suficiente que tais componentes possuam durações independentes. Em estruturas em paralelo tal preservação exige condições mais estritas: não só durações independentes, mas também identicamente distribuídas e *IHR*.

Exercício 3.24 — Demonstre que o tempo de vida de um sistema em paralelo constituído por duas componentes com durações $T_i \stackrel{indep}{\sim} \text{Exponencial}(i), i = 1, 2$, ilustra o resultado (3.13) (Ross, 2003, p. 575). Assim, neste caso $T_{(n)}$ possui função taxa de falha não monótona. •

É altura de averiguar em que circunstâncias uma estatística de ordem i preserva o comportamento monótono da taxa de falha das componentes. Mais, os resultados que se seguem são particularmente relevantes uma vez que o tempo de vida de uma estrutura do tipo $k - de - n$ é representado por uma estatística ordinal.

Proposição 3.25 — Preservação da monotonia da taxa de falha: estatísticas ordinais

Sejam T_1, \dots, T_n **tempos de vida i.i.d.** (contínuos e não negativos). Então as **estatísticas ordinais** $T_{(i)}$ verificam:

$$T_i \sim_{iid} IHR, i = 1, \dots, n \Rightarrow T_{(i)} \in IHR, i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

$$T_i \sim_{iid} DHR, i = 1, \dots, n \not\Rightarrow T_{(i)} \in DHR, i = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Assim, as estatísticas ordinais $T_{(i)}$ e os tempos de vida das componentes, $T_i, i = 1, \dots, n$, possuem função taxa de falha com igual comportamento monótono no caso em que $T_i \in IHR, i = 1, \dots, n$, o que nem sempre ocorre quando $T_i \in DHR, i = 1, \dots, n$.

Proposição 3.26 — Preservação da monotonia da taxa de falha: spacings de primeira ordem

No que concerne à taxa de falha dos “spacings” de primeira ordem (ou tempos entre falhas consecutivas) de tempos i.i.d. (contínuos e não negativos) — $(T_{(i)} - T_{(i-1)})$, $i = 1, \dots, n$, em que $T_{(0)} = 0$ —, pode afirmar-se que:

$$T_i \sim_{i.i.d.} DHR, i = 1, \dots, n \Rightarrow (T_{(i)} - T_{(i-1)}) \in DHR, i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

$$T_i \sim_{i.i.d.} IHR, i = 1, \dots, n \not\Rightarrow (T_{(i)} - T_{(i-1)}) \in IHR, i = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

•

Pode então afirmar-se que, no teste simultâneo de componentes que possuam durações i.i.d. a uma v.a. *DHR* (resp. *IHR*), o tempo entre falhas consecutivas será igualmente (resp. poderá não ser) uma v.a. *DHR* (resp. *IHR*).

A proposição seguinte permite tirar algumas conclusões sobre o tempo total do ensaio quando se efectua o teste sequencial de componentes com durações independentes.

Proposição 3.27 — Preservação da monotonia da taxa de falha: convolução de v.a.

Considere-se dois tempos de vidas T_i , $i = 1, 2$ (não negativos e contínuos) com funções taxa de falha $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$. Então a convolução (i.e., soma de parcelas independentes) $T = T_1 + T_2$ satisfaz o seguinte resultado:

$$T_i \in IHR, i = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} (T_1 + T_2) \in IHR \\ \lambda_T(t) \leq \min_{i=1,2} \lambda_i(t). \end{cases} \quad (3.19)$$

No entanto, caso T_1 e T_2 sejam *DHR*, a respectiva soma nem sempre é caracterizada por uma função taxa de falha com o mesmo comportamento monótono, i.e.:

$$T_i \in DHR, i = 1, 2 \not\Rightarrow (T_1 + T_2) \in DHR. \quad (3.20)$$

Os resultados anteriores são também válidos para o caso discreto. •

Exercício 3.28 — Após um estudo detalhado do tempo até falha de uma componente electrónica de um dispositivo de segurança, concluiu-se que a respectiva distribuição pertencia ao modelo $\{gama(\alpha, \delta)\}$. Admita-se que, por questões de segurança, essa componente só pode ser substituída uma única vez, por uma outra com duração i.i.d.

Assumindo que a substituição da primeira componente é imediata, identifique todas as situações em que:

- as duas componentes e a estrutura possuem durações *DHR*;
- o par de componentes possui tempo de vida *DHR* não ocorrendo o mesmo com a duração da estrutura. •

A preservação da monotonia da função taxa de falha de misturas de distribuições é de particular relevância ao lidar-se com componentes de diversas proveniências.

Proposição 3.29 — Preservação da monotonia da taxa de falha: misturas de distribuições

Considere-se T_i , $i = 1, \dots, n$, v.a. independentes (contínuas não negativas) com f.d. $F_i(t)$. E seja T a mistura destas distribuições, i.e., $F_T(t)$ resulta da combinação linear convexa das f.d. $F_i(t)$, $i = 1, \dots, n$:

$$F_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i F_i(t) \quad (3.21)$$

onde $a_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Então

$$T_i \sim_{indep.} DHR, i = 1, \dots, n \Rightarrow T \in DHR \quad (3.22)$$

Contudo a mistura de distribuições *IHR* não é necessariamente *IHR*:

$$T_i \sim_{indep.} IHR, i = 1, \dots, n \not\Rightarrow T \in IHR \quad (3.23)$$

•

A proposição anterior é a particularização da seguinte, que diz respeito à preservação da monotonia da função taxa de falha da mistura (contável ou não) de distribuições específicas.

Proposição 3.30 — Preservação da monotonia da taxa de falha: misturas (contáveis ou não) de distribuições

Recorde-se que, caso $T|Y = y$ ($y > 0$) e Y possuam f.d. $F_y(t)$ e $G(y)$, respectivamente, a v.a. T diz-se a **mistura das distribuições** F_y e possui f.d. $F_T(t) = \int_0^{+\infty} F_y(t) dG(y)$. Então

$$T|Y = y \in DHR, y > 0 \Rightarrow T \in DHR \quad (3.24)$$

$$T|Y = y \in IHR, y > 0 \not\Rightarrow T \in IHR \quad (3.25)$$

•

Na demonstração do primeiro dos resultados é fundamental a aplicação da desigualdade de Schwarz. Para mais detalhes desta demonstração veja-se Barlow e Proschan (1965/1996, p. 37).

A tabela seguinte condensa as propriedades de preservação do comportamento monótono da função taxa de falha por parte das estatísticas ordinais.

Tabela 3.1: Preservação do comportamento monótono da taxa de falha das estatísticas ordinais (“Não” \equiv “Nem sempre”).

Distribuição	$T_{(1)}$		$T_{(n)}$		$T_{(i)}$	
	<i>i.i.d.</i>	<i>indep.</i>	<i>i.i.d.</i>	<i>indep.</i>	<i>i.i.d.</i>	<i>indep.</i>
<i>IHR</i>	Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não
<i>DHR</i>	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não

Exercício 3.31 — Uma fábrica possui duas linhas de produção, *I* e *II*, responsáveis por 20% e 80% dos artigos produzidos, respectivamente. Estudos extensivos levaram a concluir que a distribuição da duração de cada artigo depende da sua proveniência embora o mesmo não aconteça com o parâmetro de escala. Os artigos quando provenientes das linhas de produção *I* e *II* possuem durações *gamma*(1.1, 1) e *Weibull*(1, 2), respectivamente, logo com taxa de falha crescente.

Obtenha a função taxa de falha da duração de um artigo escolhido casualmente da produção da referida fábrica.

Os valores desta função, para valores da abcissa iguais a $t = 0.5, 4(0.5)$ são iguais a $\lambda_T(t) = 0.984451, 1.76893, 2.22839, 1.92529, 1.26555, 1.01493, 0.980125, 0.979563$. Assim se conclui que $\lambda_T(t)$ não é uma função monótona e o artigo em questão não possui duração nem *IHR*, nem *DHR*.

•

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 98–105); Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 35–9); Ross (2003, pp. 571–576).

3.4 Outras noções de envelhecimento estocástico

Na realidade, exigir que a função taxa de falha seja monótona pode ser tremendamente restritivo. Não surpreende pois que se considere em certas situações que esse comportamento monótono se verifique somente em média e se encontre na literatura outras formas de caracterização dos tempos de vida em termos de envelhecimento estocástico.

Estas noções escrevem-se de um modo geral à custa da função de fiabilidade e revelar-se-ão úteis no estabelecimento de limites para a função de fiabilidade, limites esses de que se falará na próxima secção, bem como no contexto de estratégias de manutenção.

Definição 3.32 — Outras noções de envelhecimento estocástico (caso contínuo)

Sejam T uma v.a. contínua não negativa com função de fiabilidade $R_T(t)$ e $T_t =_{st} (T - t | T \geq t)$ a vida residual no instante t ($t \geq 0$), cuja função de fiabilidade é dada por $R_{T_t}(u) = R_T(t + u) / R_T(t)$. Então:

- T diz-se **ILR** (*Increasing Likelihood Ratio*)⁵ sse $f_T(t) / f_T(t + \epsilon)$ for crescente em $(0, +\infty)$ para qualquer $\epsilon > 0$, i.e.,

$$\ln[f_T(t)] \text{ for concâva em } (0, +\infty); \quad (3.26)$$

- T diz-se **IHR** (*Increasing Hazard Rate*) sse $\lambda_T(t)$ for crescente em $(0, +\infty)$, i.e., sse, para qualquer u fixo,

$$R_{T_t}(u) = \frac{R_T(t + u)}{R_T(t)} \text{ decrescer com } t \text{ em } (0, +\infty); \quad (3.27)$$

⁵Ou “razão de verosimilhança crescente” ou ainda designada por Barlow e Proschan (1975, p. 76) de “Pólya frequency of order 2” (PF_2).

- T diz-se **IHRA** (*Increasing Hazard Rate in Average*) sse $R_T^{1/t}(t)$ decrescer em $(0, +\infty)$, ou seja,

$$\frac{\Lambda_T(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda_T(u) du \uparrow_t, t > 0; \quad (3.28)$$

- T diz-se **NBU** (*New Better than Used*) sse $T \geq_{st} T_t$ para $t \geq 0$, i.e.,

$$R_T(u) \geq R_{T_t}(u) = \frac{R_T(t + u)}{R_T(t)}, t, u \geq 0; \quad (3.29)$$

- T diz-se **NBUE** (*New Better than Used in Expectation*) sse $E(T) \geq E(T_t)$ para $t \geq 0$, ou seja,

$$\int_0^{+\infty} R_T(u) du \geq \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du. \quad (3.30)$$

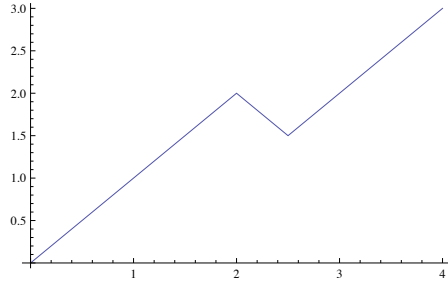
Nota 3.33 — Outras noções de envelhecimento estocástico (caso contínuo)

Pode, por exemplo, afirmar-se que, caso a duração de uma componente seja uma v.a. **NBU/NBUE**, valerá sempre a pena substituir a componente que está a ser usada por uma nova componente. Por seu lado, se a duração da componente for **NWU/NWUE**, nunca valerá a pena efectuar semelhante substituição.

Exercício 3.34 — Prove que a função taxa de falha

$$\lambda(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 2 \\ -t + 4, & 2 < t \leq 2.5 \\ t - 1, & t > 2.5, \end{cases} \quad (3.31)$$

está associada a uma duração **IHRA** apesar não ser uma função monótona crescente, como ilustra a Figura 2.9 de Gertsbakh (1995, pp. 70):



Segue-se o análogo discreto destas noções de envelhecimento estocástico, reescrito de modo ligeiramente diferente mas equivalente.

Definição 3.35 — Outras noções de envelhecimento estocástico (caso discreto)

Seja T uma v.a. discreta não negativa com função de probabilidade $P(i) = P(T = i)$ e função de fiabilidade definida agora por $R_T(i) = P(T \geq i)$. Considere-se ainda que $T_i =_{st} (T - i | T \geq i)$ representa a vida residual associada ao ciclo i e possui função de fiabilidade $R_{T_i}(i) = \frac{R_T(i+j)}{R_T(i)}$. Então:

- T diz-se **ILR** (*Increasing Likelihood Ratio*) sse $P(i)/P(i + 1)$ for crescente em \mathbb{N}_0 , i.e.,

$$P(i) \times P(i + 2) \leq P^2(i + 1), i \in \mathbb{N}_0, \quad (3.32)$$

i.e., o incremento relativo $inc(i) = [1 - P(i + 1)/P(i)] \times 100\%$ na f.p. de T aumenta com i ;

- T diz-se **IHR** (*Increasing Hazard Rate*) sse $\lambda_T(i)$ for crescente em \mathbb{N}_0 , ou seja,

$$R_T(i) \times R_T(i + 2) \leq R_T^2(i + 1), i \in \mathbb{N}_0; \quad (3.33)$$

- T diz-se **IHRA** (*Increasing Hazard Rate in Average*) sse

$$R_T^{1/i}(i) \downarrow_i, i \in \mathbb{N}_0; \quad (3.34)$$

- T diz-se **NBU** (*New Better than Used*) sse $T \geq_{st} T_i, i \in \mathbb{N}_0$, ou seja,

$$R_T(j) \geq R_{T_i}(j) = \frac{R_T(i + j)}{R_T(i)}, i, j \in \mathbb{N}_0; \quad (3.35)$$

- T diz-se **NBUE** (*New Better than Used in Expectation*) sse $E(T) \geq E(T_i), i \in \mathbb{N}_0$

$$E(T) = \sum_{j=0}^{+\infty} R_T(j) \geq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{R_T(i + j)}{R_T(i)} = E(T_i), i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.36)$$

As noções de v.a. **DLR** (*Decreasing Likelihood Ratio*), **DHRA** (*Decreasing Hazard Rate in Average*), **NWU** (*New Worse than Used*) e **NWUE** (*New Worse than Used in Expectation*) definem-se de modo análogo considerando comportamentos monótonos e desigualdades nos sentidos opostos quer para v.a. contínuas quer para v.a. discretas.

Proposição 3.36 — Implicações das noções de envelhecimento estocástico

$T \in ILR \Rightarrow T \in IHR \Rightarrow T \in IHRA \Rightarrow T \in NBU \Rightarrow T \in NBUE$. Analogamente, $T \in DLR \Rightarrow T \in DHR \Rightarrow T \in DHRA \Rightarrow T \in NWU \Rightarrow T \in NWUE$.

Esta proposição permite averiguar, de uma forma mais cómoda, se uma v.a. é ou não *IHR/IHRA/NBU/NBUE* (resp. *DHR/DHRA/NWU/NWUE*).

Exercício 3.37 — a) Classifique as seguintes distribuições quanto ao comportamento monótono da função taxa de falha:

1. binomial
2. normal truncada (não negativa e com $\mu = 0$)
3. lognormal.

b) Discuta a pertinência desta última distribuição na caracterização de tempos de vida, calculando para o efeito $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_T(t)$. •

Exercício 3.38 — Implicações das noções de envelhecimento estocástico

Refira-se a título de curiosidade que uma estrutura coerente com componentes cujas durações de vida são v.a. *IHRA* possui duração também ela *IHRA* o mesmo nem sempre acontece caso sejam *IHR*.⁶

Verifique que $T_i \stackrel{indep}{\sim} \text{Exponencial}(i) \in \text{IHR}, \text{CHR}, \text{DHR}, i = 1, 2$, ilustram o resultado acabado de enunciar. •

Tabela 3.2: Preservação da propriedade de envelhecimento face a operações de fiabilidade (“Não” \equiv “Nem sempre”).

Distribuição	Formação de sistemas coerentes	Convoluções	Misturas arbitrárias
IHR	Não	Sim	Não
IHRA	Sim	Sim!!!	Não
NBU	Sim	Sim	Não
NBUE	Não	Sim	Não
DHR	Não	Não	Sim
DHRA	Não	Não	Sim
NWU	Não	Não	Não
NWUE	Não	Não	?

⁶Recorde-se o resultado (3.13) da Proposição 3.23, resultado este ilustrado pelo Exercício 3.24.

Para mais detalhes acerca deste e de outros resultados relacionados com estas noções de envelhecimento e a preservação face a operações de fiabilidade, consulte-se a Tabela 3.2 ou ainda Barlow e Proschan (1975/1981, pp. 104 e 187).

Exercício 3.39 — Admita que um sistema coerente é constituído por n componentes (não necessariamente independentes) com durações *IHR* e f.f. e f.t.f. comuns $R_i(t) = R(t)$ e $\lambda_i(t) = \lambda(t)$.

a) Uma vez que a função de fiabilidade da duração T deste sistema é dada por $R_T(t) = P(T > t) = r(\underline{\mathbf{p}}(t)) = r(R(t), \dots, R(t))$, prove que a função taxa de falha de T é igual a

$$\lambda_T(t) = \frac{d}{dt} [1 - r(\underline{\mathbf{p}}(t))] \times \frac{1}{r(\underline{\mathbf{p}}(t))}. \quad (3.37)$$

b) Uma vez que a função de fiabilidade $R(t)$ é comum a todas as componentes pode simplificar-se a notação, passando a escrever-se $\lambda_T(t) = \frac{(d/dt)[1-r(p(t))]}{r(p(t))}$, onde $p(t) = R(t)$. Assim sendo, mostre que $\lambda_T(t) = \lambda(t) \times p(t) \times \frac{dr(p(t))}{dp(t)} \times \frac{1}{r(p(t))}$ e que o sistema possui distribuição *IHR*, caso

$$p(t) \times \frac{dr(p(t))}{dp(t)} \times \frac{1}{r(p(t))} \quad (3.38)$$

seja uma função decrescente de $p(t)$.

(Ver Ross, 2003, pp. 573–574.) •

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975/1981, pp. 98–104 e pp. 182–187).

3.5 Limites para a função de fiabilidade e momentos

Nesta secção são apresentados limites para a função de fiabilidade e outros parâmetros da duração de sistemas/componentes.

Estes limites assumem particular relevância pois obtêm-se assumindo que se conhece somente um momento ou um percentil da referida duração e que esta verifica uma propriedade de envelhecimento estocástico. Por exemplo, assumir que a componente possui duração esperada conhecida μ e função taxa de falha crescente porque sujeita a desgaste.

Os limites que apresentaremos dividem-se nas seguintes categorias:

- limites para a função de fiabilidade baseados num quantil conhecido;
- limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido;
- limites para momentos da duração de uma componente;
- limites para a função de fiabilidade de um sistema baseados em momentos conhecidos;
- limites para o valor esperado da duração de um sistema baseados em momentos conhecidos.

3.5.1 Limites para a função de fiabilidade baseados num quantil conhecido

O resultado que se segue basea-se no facto de uma v.a. *IHRA* (*DHRA*) possuir função de fiabilidade que se cruza uma única vez com a

função de fiabilidade de uma *exponencial* num ponto que corresponde ao quantil de probabilidade p de ambas as v.a. A forma como tal cruzamento ocorre é descrita no teorema seguinte.

Teorema 3.40 — Limites para a função de fiabilidade baseados num quantil conhecido

Sejam $T \in IHRA$, ξ_p o quantil de ordem p de T (i.e. $R_T(\xi_p) = 1 - p$) e $\lambda = -(1/\xi_p)\ln(1 - p)$. Então

$$R_T(t) \begin{cases} \geq e^{-\lambda t} = (1 - p)^{t/\xi_p}, & 0 < t \leq \xi_p \\ \leq e^{-\lambda t} = (1 - p)^{t/\xi_p}, & t \geq \xi_p. \end{cases} \quad (3.39)$$

As desigualdades invertem-se para o caso *DHRA*. •

Exercício 3.41 — Elabore gráficos por forma a ilustrar o Teorema 3.40. •

Exercício 3.42 — Solicitou-se a um engenheiro que produzisse um sistema com fiabilidade de 0.95 para um período de funcionamento de 1000 horas. O referido sistema deveria ser coerente e constituído por pequenas peças com durações independentes e *IHRA*.

Obtenha um limite inferior para a fiabilidade de tal sistema ao fim de um período de funcionamento de 900 horas (Barlow e Proschan, 1975, p. 110). •

3.5.2 Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido

É também possível obter limites superiores para a função de fiabilidade de v.a. *IHRA*, uma vez conhecido o seu valor esperado.

Teorema 3.43 — Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido

Seja $T \in IHRA$ com valor esperado μ . Então, para t fixo positivo,

$$R_T(t) \leq \begin{cases} 1, & t \leq \mu \\ e^{-wt}, & t > \mu, \end{cases} \quad (3.40)$$

onde $w = w(t)$ é constante positiva e função de t satisfazendo

$$1 - w\mu = e^{-wt} \quad (3.41)$$

e e^{-wt} ($t > 0$) é a função de fiabilidade de v.a. *exponencial* com parâmetro de escala w^{-1} . •

Exemplo 3.44 — Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido

Obtenha uma tabela com limites superiores para a função de fiabilidade da duração de uma componente com valor esperado unitário e função taxa de falha crescente, considerando para o efeito $t = 1.5, 2.0$.

- $\mu = 1.0$;

$t = 1.0$;

$While[(t = t + 0.5) \leq 2,$

$h = FindRoot[1 - w \mu - Exp[-w t] == 0, \{w, 1\}];$

$raiz = \{w\} /. Dispatch[h];$

$Print[\{t, raiz[[1]], Exp[-raiz[[1]] t\}]]$

$\{1.5, 0.582812, 0.417188\}$

$\{2., 0.796812, 0.203188\}$ •

Pode obter-se limites inferiores ainda mais sofisticados que os limites superiores do Teorema 3.43 para a função de fiabilidade de v.a. *IHRA*. Para mais detalhes consulte-se o Teorema 6.11 de Barlow e Proschan (1975, p. 116).

Pode adiantar-se um limite inferior para a função de fiabilidade ao lidar-se com uma v.a. contínua *IHR* com momento de ordem r ($r > 0$) μ_r conhecido.

Teorema 3.45 — Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido de ordem r

Sejam $T \in IHR$,

$$\mu_r = \int_0^{+\infty} t^r dF_T(t) = r \int_0^{+\infty} t^{r-1} R_T(t) dt, \quad (3.42)$$

o momento ordem $r > 0$ de T e $\lambda_r = \frac{\mu_r}{\Gamma(r+1)}$. Então

$$R_T(t) \geq \begin{cases} \exp\left(-t/\lambda_r^{1/r}\right), & t < \mu_r^{1/r} \\ 0, & t \geq \mu_r^{1/r}. \end{cases} \quad (3.43)$$

Nota 3.46 — Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido de ordem r

Na situação em que $T \in IHRA$ (*DHRA*), demonstra-se que o limite inferior $\exp\left(-t/\lambda_r^{1/r}\right)$ decresce (cresce) com r , para qualquer real t fixo e não negativo.

Para além disso o domínio em que tal limite inferior é valido, $[0, \mu_r^{1/r}]$, aumenta também com r para $T \in IHRA$. •

Ao considerar-se $r = 1$ obtém-se limite inferior para a função de fiabilidade da v.a. $T \in IHR$ bastando para tal conhecer o seu valor esperado.

Corolário 3.47 — Limites para a função de fiabilidade baseados no momento conhecido de primeira ordem

Seja $T \in IHR$ com valor esperado $\mu_1 = E(T)$. Logo

$$R_T(t) \geq \begin{cases} \exp(-t/\mu_1), & t < \mu_1 \\ 0, & t \geq \mu_1. \end{cases} \quad (3.44)$$

•

Exercício 3.48 — Obtenha agora uma tabela com limites inferiores para a função de fiabilidade da duração de uma componente com valor esperado unitário e função taxa de falha crescente, para $t = 0.0, 3.0(0.1)$.

Elabore um gráfico com limites inferiores e superiores para a função de fiabilidade da duração dessa mesma componente para períodos de funcionamento $t \in [0, 3]$.

•

Teorema 3.49 — Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido de ordem r

Seja $T \in IHR$ com momento de ordem r ($r > 0$), $\mu_r = \int_0^{+\infty} t^r dF_T(t)$.

Então, para t fixo positivo,

$$R_T(t) \leq \begin{cases} 1, & t \leq \mu_r^{1/r} \\ e^{-wt}, & t \geq \mu_r^{1/r}, \end{cases} \quad (3.45)$$

onde $w = w(t)$ é solução de

$$\mu_r = r \int_0^t x^{r-1} e^{-wx} dx = E(X^r), \quad (3.46)$$

onde $X \sim \text{Exponencial}(w)$.

•

Debrucemo-nos agora sobre o caso em que se lida com componentes **DHR**, i.e., com capacidade de rejuvenescimento/fortalecimento/melhoramento (*training effect*) à medida que o tempo de operação aumenta.

O teorema e o corolário que se seguem são análogos ao Teorema 3.45 e Corolário 3.47. Dizem, no entanto, respeito a uma duração **DHR**.

Teorema 3.50 — Limites para a função de fiabilidade baseados num momento conhecido de ordem r (caso DHR)

Sejam $T \in DHR$, μ_r o momento ordem r de T e $\lambda_r = \frac{\mu_r}{\Gamma(r+1)}$. Então

$$R_T(t) \leq \begin{cases} \exp(-t/\lambda_r^{1/r}), & t < r\lambda_r^{1/r} \\ \frac{r^r e^{-r} \mu_r}{\Gamma(r+1)t^r}, & t \geq r\lambda_r^{1/r}. \end{cases} \quad (3.47)$$

•

Corolário 3.51 — Limites para a função de fiabilidade baseados no valor esperado (caso DHR)

Seja $T \in DHR$ com valor esperado conhecido μ_1 . Logo

$$R_T(t) \leq \begin{cases} e^{-t/\mu_1}, & t \leq \mu_1 \\ \frac{\mu_1 e^{-1}}{t}, & t \geq \mu_1. \end{cases} \quad (3.48)$$

•

3.5.3 Limites para momentos da duração de uma componente

O Teorema 3.40 e o que se segue são particularmente importantes porque em testes de vida nem sempre se dispõe da média das durações

das componentes em teste (pois nem todas as componentes falham durante o teste) mas é frequente dispôr de quantis de probabilidade (empíricos). À custa destes quantis pode obter-se limites para o valor esperado de v.a. *IHR*.

O próximo teorema pode encontrar-se em Barlow e Proschan (1965/1996, p. 30).

Teorema 3.52 — Limites para o valor esperado da duração de uma componente

Assuma que $T \in IHR$ e que o seu quantil de probabilidade p é representado por ξ_p . Se $p \leq 1 - e^{-1}$ então

$$-\frac{p \xi_p}{\ln(1-p)} \leq \mu \leq -\frac{\xi_p}{\ln(1-p)}. \quad (3.49)$$

Caso $p \geq 1 - e^{-1}$, tem-se

$$-\frac{p \xi_p}{\ln(1-p)} \leq \mu \leq \xi_p. \quad (3.50)$$

•

O teorema seguinte permite obter limites inferiores e superiores para o momento de ordem r ($r > 0$) de v.a. *IHRA* (*DHRA*).

Teorema 3.53 — Limites para momentos de ordem r da duração de uma componente

Seja $T \in IHRA$. Então os limites para o momento ordem r de T , μ_r , são dados por

$$\mu_r \begin{cases} \geq \Gamma(r+1) \mu_1^r, & 0 < r \leq 1 \\ \leq \Gamma(r+1) \mu_1^r, & r \geq 1. \end{cases} \quad (3.51)$$

As desigualdades invertem-se ao lidar-se com $T \in DHRA$.

•

Corolário 3.54 — Limite para o coeficiente de variação duração de uma componente

Ao considerar-se $r = 2$, o Teorema 3.53 permite comparar o coeficiente de variação de uma v.a. $T \in IHRA$ com o coeficiente de variação unitário de qualquer v.a. com distribuição *exponencial*:

$$T \in IHRA \Rightarrow \frac{\sigma}{\mu} \leq 1. \quad (3.52)$$

A desigualdade inverte-se para $T \in DHRA$.

•

Exercício 3.55 — Demonstre o Corolário 3.54.

•

3.5.4 Limites para a função de fiabilidade de um sistema baseados em momentos conhecidos

Na fase inicial de planeamento da produção de sistemas é frequentemente necessário prever a fiabilidade dos mesmos com o mínimo de informação — como o tipo de estrutura, os valores esperados das durações das componentes que o constituem. Ora, os limites fornecidos pelo Corolário 3.47 tem aplicações óbvias.

Teorema 3.56 — Limites para a função de fiabilidade de um sistema em série baseados em momentos conhecidos

Caso um sistema seja constituído por n componentes dispostas em *série* e com durações T_i independentes e *IHR*, com valores esperados $\mu_i = E(T_i)$ e funções de fiabilidade $R_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, pode concluir-se que a função de fiabilidade do sistema verifica

$$R_{T_{(1)}}(t) \geq \begin{cases} \exp \left[-t \sum_{i=1}^n (\mu_i)^{-1} \right], & t < \min_{i=1, \dots, n} \mu_i \\ 0, & t \geq \min_{i=1, \dots, n} \mu_i. \end{cases} \quad (3.53)$$

•

Exercício 3.57 — Forneça limites para a função de fiabilidade $R_{T(n)}(t)$ de um sistema constituído por n componentes independentes IHR dispostas em paralelo e com durações esperadas μ_i (Barlow e Proschan, 1965/1996, p. 28). •

São válidos resultados similares para sistemas coerentes constituídos por componentes com durações independentes e IHR .

Teorema 3.58 — **Limites para a função de fiabilidade de um sistema coerente baseados em momentos conhecidos**

Considere-se sistema coerente com n componentes com durações T_i independentes e IHR , com valores esperados μ_i e funções de fiabilidade $R_i(t), i = 1, \dots, n$. Então, a função de fiabilidade do sistema verifica, para $t < \min_{i=1, \dots, n} \mu_i$,

$$R_T(t) = r(R_1(t), \dots, R_n(t)) \geq r(e^{-t/\mu_1}, \dots, e^{-t/\mu_n}), \quad (3.54)$$

onde, recorde-se, $r(\mathbf{p})$ representa a fiabilidade do sistema calculada para o vector \mathbf{p} das fiabilidades das componentes. •

Nota 3.59 — **Limites para a função de fiabilidade de um sistema coerente baseados em momentos conhecidos**

Este resultado permite concluir que, no intervalo $[0, \min_{i=1, \dots, n} \mu_i)$, a fiabilidade do sistema no instante t é superior ou igual à de um outro sistema exactamente com a mesma estrutura mas com componentes com durações *exponenciais* e durações esperadas μ_i . •

Exercício 3.60 — Considere um circuito electrónico, com três componentes, que funciona caso a primeira das componentes e uma das duas restantes funcionem. Admita que estas componentes possuem durações independentes, IHR e com valores esperados (em horas) $\mu_1 = 1000, \mu_2 = 1200, \mu_3 = 1600$.

Obtenha um limite inferior para a função de fiabilidade do circuito para um período de operação de 800, 900, 950 e 975 horas (Barlow e Proschan, 1975, p. 119). •

Exercício 3.61 — Um sistema em paralelo é composto por duas componentes independentes e $IHRA$ com fiabilidade de 0.95 para um período de 500 horas.

- a) Determine limites inferiores para a fiabilidade para um período de 400 horas usando os dois métodos seguintes:
 1. Calcular um limite inferior para cada uma das duas componentes e de seguida um limite inferior para a fiabilidade do sistema.
 2. Calcular a função de fiabilidade do sistema para um período de 500 horas e de seguida obter um limite inferior recorrendo ao Teorema 3.40.
- b) Qual destes dois métodos lhe parece conduzir a melhores resultados considerando para o efeito $t \in [0, 500)$? (Barlow e Proschan, 1975, p. 119.)
- c) Repita a) e b) admitindo que o sistema é em série e elaborando um gráfico com os dois tipos de limites inferiores para a fiabilidade para períodos de t horas ($t \in [0, 500)$). •

3.5.5 Limites para a duração esperada de um sistema baseados em momentos conhecidos

O próximo limite inferior (superior) diz respeito à duração esperada de um sistema em série constituído por n componentes associadas **positivamente** e *NBUE* (*NWUE*).

Teorema 3.62 — Limites para a duração esperada de um sistema baseados em momentos conhecidos

Seja T_i (μ_i) a duração (esperada) da i -ésima componente de um sistema em série com n componentes com durações associadas **positivamente** e *NBUE*. Então a duração esperada deste sistema em série, μ_s , verifica

$$\mu_s \geq \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.55)$$

A desigualdade inverte-se para $T \in \text{NWUE}$. •

De notar que o limite inferior em (3.55) mais não é que o valor esperado da duração de um sistema em série com componentes independentes, exponencialmente distribuídas e com duração esperada μ_i .

Exercício 3.63 — Demonstre o Teorema 3.62 (Gertsbakh, 1995, pp. 62–63). •

Teorema 3.64 — Limites para a duração esperada de sistema em série (resp. paralelo) baseados em momentos conhecidos

Considere-se um sistema em série (resp. paralelo) com n componentes com durações associadas **positivamente** e *IHRA*. Então a duração esperada do sistema em série (resp. paralelo), μ_s (resp. μ_p), pode

comparar-se com a duração esperada de um sistema também em série (resp. paralelo) com n componentes com durações (resp. durações *exponenciais*), independentes e com valor esperado μ_i ($i = 1, \dots, n$) e satisfaz

$$\mu_s \geq \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} \right)^{-1} \quad (3.56)$$

$$\mu_p \leq \int_0^{+\infty} \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-t/\mu_i}) \right] dt. \quad (3.57)$$

As desigualdade invertem-se, caso as componentes sejam *DHRA*. •

Importa referir que a integranda em (3.57) corresponde à função de fiabilidade de um sistema em paralelo com componentes independentes, exponencialmente distribuídas e com duração esperada μ_i . Assim sendo, o limite superior em (3.57) mais não é que o valor esperado do sistema acabado de descrever.

O próximo resultado é apresentado a título de exercício em Gertsbakh (1995, p. 71).

Teorema 3.65 — Limite para a duração esperada de um sistema coerente baseados em momentos conhecidos

Considere-se agora um sistema coerente com n componentes com durações independentes e *NBUE* e caminhos mínimos $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_p$. Então a duração esperada μ deste sistema satisfaz

$$\mu \geq \max_{j=1, \dots, p} \left\{ \left(\sum_{i \in \mathcal{P}_j} \mu_i^{-1} \right)^{-1} \right\}. \quad (3.58)$$

•

Exercício 3.66 — Demonstre o Teorema 3.65 recorrendo ao Teorema 3.62 e à desigualdade de Jensen (http://en.wikipedia.org/wiki/Jensen's_inequality). •

Exercício 3.67 — Considere um conjunto de dois geradores eléctricos em paralelo que fornecem electricidade a uma bomba de extracção de petróleo. Admita que estas três componentes possuem durações até falha mecânica independentes, *NBUE* e com valores esperados (em horas) $\mu_1 = 1000$, $\mu_2 = 1200$, $\mu_3 = 1600$.

Obtenha um limite inferior para duração esperada deste sistema circuito. •

Exercício 3.68 — Repita o exercício anterior considerando agora que está a lidar com um sistema do tipo 2 – de – 3. •

Barlow e Proschan (1975, p. 124) enunciam um resultado similar ao Teorema 3.65.

Teorema 3.69 — Limites para a duração esperada de um sistema coerente baseados em momentos conhecidos

Considere-se um sistema coerente com n componentes com durações independentes e *IHRA*, durações esperadas μ_i , caminhos mínimos $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_p$ e cortes mínimos $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_q$. Então a duração esperada μ deste sistema satisfaz

$$\max_{j=1, \dots, p} \left\{ \left(\sum_{i \in \mathcal{P}_j} \mu_i^{-1} \right)^{-1} \right\} \leq \mu \leq \min_{j=1, \dots, q} \left\{ \int_0^{+\infty} \left[1 - \prod_{i \in \mathcal{K}_j} (1 - e^{-t/\mu_i}) \right] dt \right\}. \quad (3.59)$$

Exercício 3.70 — Demonstre e comente os resultados do Teorema 3.69. •

É curioso notar que Barlow e Proschan (1965/96, pp. 41–45) também adiantam limites para a função de fiabilidade e momentos, baseados no valor limite e no comportamento monótono da função de taxa de falha.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 109–125); Barlow e Proschan (1965/96, pp. 26–35 e 39–45); Gertsbakh (1995, p. 61–68); Ross (2003, pp. 580–586).

Capítulo 4

Modelos paramétricos importantes em fiabilidade

4.1 Introdução

Uma distribuição de falha¹ mais não é que o resultado de uma tentativa de descrever matematicamente a duração de vida de um material, estrutura ou dispositivo.

A forma como ocorrem as falhas num item afecta a forma analítica da distribuição de falha. Os materiais e as estruturas podem falhar de diversas formas, podendo dar-se o caso de terem ocorrido simultaneamente dois ou mais tipos de falhas.

Foram vistos previamente alguns exemplos de tipos de falha, como as **falhas estáticas** aquando de fracturas por aplicação de carga, a **corrosão química** devida a *hydrogen embrittlement*, a fadiga devido a **sobrecargas cíclicas** ou a *gripagem* de componentes mecânicas.

Certos aparelhos electrónicos ou digitais falham devido à alteração de **parâmetros críticos** para o seu desempenho, tais como a temperatura, a humidade ou, de um modo geral, as condições

¹Tradução livre de *failure distribution*.

atmosféricas.

As falhas iniciais no equipamento devem-se de um modo geral a planeamento/ fabrico/uso impróprio/inadequado.

Infelizmente a escolha/selecção de uma distribuição de falha baseada nestas considerações físicas ainda é uma arte.

No entanto, em alguns casos a relação entre o mecanismo de falha e a **função taxa de falha** pode ser de utilidade na referida selecção já que as observações são de um modo escassas nas caudas não possibilitando a destrição efectiva entre as distribuições candidatas à modelação.

Neste capítulo irão ser revistas algumas das mais comuns distribuições de falha, como é o caso da distribuição *exponencial*, famosa pela sua propriedade de falta de memória entre algumas outras propriedades que enunciaremos mais tarde.

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 9–12).

4.2 Distribuições discretas

As distribuições discretas são muito menos utilizadas em fiabilidade que as contínuas pelo que merecerão um pouco menos de **atenção**.

4.2.1 A distribuição geométrica

É sabido que a distribuição *geométrica* é o análogo discreto da distribuição *exponencial* e poderá representar:

- o **número de insucessos** que precedem o primeiro sucesso numa sucessão de provas de *Bernoulli* independentes e identicamente

distribuídas, tomando neste caso valores $0, 1, \dots$; ou então

- o **número total de provas** de *Bernoulli* independentes e identicamente distribuídas realizadas até à ocorrência do primeiro sucesso, assumindo neste caso os valores $1, 2, \dots$

Nota 4.1 — Distribuição geométrica

A distribuição geométrica é por vezes designada de distribuição discreta do tempo de espera pelo primeiro sucesso.²

Exemplo 4.2 — Distribuição geométrica

Todas as manhãs verifica-se se um dispositivo de segurança falhou. Há a probabilidade p de ocorrer falha num dia escolhido ao acaso. Não há razões que levem a crer que essa probabilidade se altere com o tempo nem que o facto de não ter ocorrido falha no dispositivo no dia m venha a influenciar a probabilidade de isso ocorrer no dia $(m + 1)$. O número total de inspeções até registar-se a falha, T , possui distribuição *geométrica*(p) e função de probabilidade (f.p.) dada por

$$P(T = m) = (1 - p)^{m-1} p, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

onde p representa a probabilidade de ocorrência de falha.

Nota 4.3 — Falta de memória

Esta distribuição possui função taxa de falha constante que traduz a seguinte propriedade:

$$P(T \geq m_1 + m_2 | T \geq m_1) = P(T \geq m_2), \quad (4.2)$$

i.e., efectuadas pelo menos m_1 inspeções sem que tenha sido registada a primeira falha, a probabilidade de ainda vir a efectuar-se adicionalmente pelo menos mais m_2 inspeções é exactamente igual

²*Sucesso* significa aqui avaria, falha, etc.

à probabilidade de se efectuar – a partir do momento inicial – pelo menos m_2 inspeções até ao registo da primeira falha.

Esta propriedade é sugestivamente designada por **falta de memória**.

Exercício 4.4 — Considere agora que o dispositivo de segurança descrito no Exemplo 4.2 só deixa de funcionar ao fim de exactamente r falhas.

Qual a distribuição do número total de inspeções efectuadas até que o dispositivo deixe de funcionar? Escreva a função de probabilidade desta nova v.a.

Nota 4.5 — Distribuição binomial negativa

A distribuição *binomial negativa* é por vezes designada de distribuição discreta do tempo de espera pelo r -ésimo sucesso. Trata-se, obviamente, da generalização da distribuição geométrica.

Na Tabela 4.1 podem encontrar-se algumas características desta e de outras distribuições discretas.

Tabela 4.1: Algumas distribuições discretas importantes.

T	$P(T = t)$	$E[T]$	$V[T]$	$E[z^T]$
Uniforme($\{1, \dots, n\}$)	$1/n, t = 1, \dots, n$	$(n + 1)/2$	$(n^2 - 1)/12$	$\frac{z(1-z^n)}{n(1-z)}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}, t = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$	$(1-p + pz)^n$
Geométrica(p)	$(1-p)^{t-1} p, t = 1, 2, \dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$\frac{pz}{1-(1-p)z}$
BinomialNegativa(r, p)	$\binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{t-r}, t = r, r+1, \dots$	r/p	$r(1-p)/p^2$	$\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^r$
Poisson(λ)	$e^{-\lambda} \lambda^t / t!, t = 0, 1, \dots$	λ	λ	$e^{-\lambda(1-z)}$

Texto de apoio: Gertsbakh (1989, pp. 43–44).

4.2.2 A distribuição binomial

Comece-se por recordar que a função de distribuição da v.a. Binomial(n, p) já foi utilizada para calcular a fiabilidade de sistemas $k - de - n$. Com efeito, caso a fiabilidade das n componentes seja igual a p e estas sejam independentes, o sistema $k - de - n$ possui fiabilidade dada por

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= E[\phi(\mathbf{X})] \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= 1 - F_{Binomial(n,p)}(k-1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Recorde-se que a v.a. Binomial(n, p) representa o número de sucessos num conjunto de n provas de *Bernoulli* independentes e identicamente distribuídas.

Exercício 4.6 — Uma companhia produz um tipo específico de interruptores, tendo-se constatado que 5% da produção é defeituosa.

- Calcule o valor esperado e a variância do número de interruptores defeituosos numa amostra de 50 interruptores (Dhillon, 1984, p. 132).
- Determine um valor aproximado para a probabilidade de tal número ser inferior a 15.
- Obtenha o gráfico da função taxa de falha desta v.a. Classifique esta v.a. quanto ao comportamento monótono da sua função taxa de falha. •

Exercício 4.7 — Considere-se uma aeronave com 4 motores. Suponha-se que ela só será capaz de voar se possuir pelo menos 2 dos motores a funcionar.

- Determine a probabilidade de a aeronave estar em condições de voar (i.e., a fiabilidade), caso a fiabilidade de cada motor seja de 99% (Leitch, 1995, p. 47).
- Obtenha limites inferiores e superiores para a fiabilidade da aeronave, assumindo agora que os 4 motores estão associados (positivamente). •

Texto de apoio: Leitch (1995, pp. 46–48).

4.2.3 A distribuição de Poisson

A distribuição de *Poisson* é utilizada na contabilização do número de falhas que ocorrem independentemente num período fixo de tempo. Poderá tratar-se do número de visitas mensais a uma oficina por parte de uma frota de veículos ou do número de acidentes semanais num troço específico de auto-estrada. De notar que à partida não há limite superior para o número de falhas/acidentes como aconteceria se considerássemos a distribuição *binomial*.

A independência a que se refere acima significa que uma falha num futuro próximo não depende da ocorrência ou não de falhas no passado recente.

A v.a. *Poisson*(λ) possui f.p. dada por

$$P(T = t) = e^{-\lambda} \lambda^t / t!, \quad t \in \mathbb{N}_0. \quad (4.5)$$

Na Tabela 4.1 encontram-se esta e outras características da distribuição de *Poisson*(λ), que tem a particularidade de possuir o

valor esperado e a variância iguais ao parâmetro λ , que define a distribuição.

Exercício 4.8 — Efectuou-se o registo do número de acidentes mensais de uma frota de veículos na tabela abaixo.

Tabela 4.2: Número de acidentes mensais.

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
1	2	1	0	3	1	0	3	2	2	1	2

- Obtenha a estimativa de MV do número esperado de acidentes mensais (Leitch, 1995, p. 49).
- Determine uma estimativa para a probabilidade de o número de acidentes mensais exceder 2, bem como para o quantil de ordem $q = 0.5$. Dê uma interpretação a este quantil. •

Mais tarde explorar-se-á a relação entre as distribuições de *Poisson* e *exponencial*.

Texto de apoio: Leitch (1995, pp. 48–49).

4.3 Distribuições contínuas

Neste secção irão ser revistas algumas das distribuições contínuas mais comuns na descrição tempos até falha, como é o caso da distribuição *exponencial*, que sabemos gozar da propriedade de falta de memória entre outras propriedades enunciadas oportunamente.

Será ainda (re)vistas as distribuições:

- *bathhtub* (ou distribuição em forma de banheira);

- *log-normal*, que surge ao efectuar-se uma *mudança de escala* de t para e^t mas de uso algo questionável em fiabilidade de equipamento;
- *Weibull*, generalização do modelo *exponencial* que inclui distribuições com função taxa de falha monótona decrescente, constante e crescente;
- *normal* e a *normal truncada*;
- *gama*, outra generalização natural do modelo exponencial que descreve o tempo de vida no caso em que há a ocorrência de vários choques até que a componente falhe definitivamente;
- *gaussiana inversa*;
- *gama inversa*;
- *beta*.

Convinha notar que Bagdonavicius e Nikulin (2002, pp. 2–17) fazem um apanhado de algumas destas distribuições contínuas e de outras quantas, nomeadamente a distribuição de Gompertz-Makeham (pp. 6–7), a mistura de exponenciais (p. 8), a Weibull generalizada (p. 8), a Weibull exponenciada (pp. 11–12), a Log-logística (pp. 12–13) e a distribuição de Birnbaum-Saunders (p. 14).

4.3.1 A distribuição exponencial

Trata-se certamente da distribuição contínua mais utilizada em fiabilidade assim como o é a distribuição *normal* em Estatística. Este facto prende-se essencialmente com a evidência empírica e alguma argumentação matemática...

Considere-se um grande equipamento, por exemplo, um computador, e suponha-se que ele falha assim que tal aconteça com pelo menos uma das suas componentes. Caso se substitua uma componente imediatamente a seguir à ocorrência da sua falha e as durações das componentes sejam independentes, a sequência de falhas do equipamento corresponderá grosso modo à sequência de falhas individuais das componentes.

Ora, admitindo que o equipamento é constituído por um grande número de componentes e são válidas certas condições (fracas), os tempos entre falhas consecutivas do equipamento são i.i.d. com distribuição *exponencial* com parâmetro comum λ e o número de falhas num período de tempo fixo de amplitude t é uma v.a. com distribuição de *Poisson*(λt).

Estamos na presença do que se designa na disciplina de Processos Estocásticos de um **processo de Poisson**.

Se a duração esperada das componentes for limitada uniforme e superiormente por um real (positivo) e tais durações forem *IHR*, o número de falhas do referido equipamento é um processo de *Poisson*.

A f.d.p. e outras características desta distribuição, assim como de outras distribuições contínuas importantes podem encontrar-se na Tabela 4.3.

Esta distribuição possui, recorde-se, função taxa de falha constante

$$\lambda_T(t) = \lambda, t \geq 0, \quad (4.6)$$

pelo que é útil na descrição do comportamento probabilístico de sistemas que não envelhecem, nem rejuvenescem no tempo. Há estruturas cujo tempo de vida goza desta propriedade como o caso de fusíveis eléctricos, cuja vida futura se mantém praticamente inalterada

Tabela 4.3: Algumas distribuições contínuas importantes.

T	$f_T(t)$	$E[T]$	$V[T]$	$E[e^{-sT}]$
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}, a \leq t \leq b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}$
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$
Gama(α, λ)	$\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t \geq 0$	α/λ	α/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha$
Erlang(n, λ)	$\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$	n/λ	n/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$
Weibull(δ, α)	$\frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\alpha\right], t \geq 0$	$\delta \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$	$\delta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\right]$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^\alpha \delta^n}{n!} \times \Gamma(1 + n/\alpha), \alpha \geq 1$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{-\mu s + \frac{s\sigma^2}{2}}$

desde que a falha ainda não tenha ocorrido.

Esta propriedade que caracteriza univocamente a distribuição *exponencial* entre as distribuições contínuas tem uma consequência importante aquando de testes de vida de componentes com o objectivo de estimar o valor esperado, quantis e a fiabilidade desta distribuição:

- os dados recolhidos podem dizer exclusivamente respeito ao número total observado de horas de vida e ao número de avarias efectivamente registadas — as idades efectivas das componentes testadas são irrelevantes.

Teorema 4.9 — Momentos da distribuição exponencial

Seja $T \sim$ exponencial(λ). Então

$$E(T^s) = \frac{\Gamma(s+1)}{\lambda^s}, s > -1, \quad (4.7)$$

onde: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \lambda^s t^{s-1} e^{-\lambda t} dt$ e $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, para $s > 0$; e $\Gamma(s+1) = s!$, para $s \in \mathbb{N}_0$. •

Teorema 4.10 — Transformada inversa

Seja $U \sim$ uniforme(0, 1). Então $T = -\ln(U) \sim$ exponencial(1). •

Exercício 4.11 — Prove os teoremas 4.9–4.10. Pronuncie-se sobre a utilidade deste último resultado. •

Importa referir (relembrar) outras propriedades da distribuição *exponencial* particularmente relevantes em fiabilidade, nomeadamente as propriedades dos *spacings* de primeira ordem, i.e., tempos entre falhas sucessivas em testes simultâneos.

Teorema 4.12 — Spacings de primeira ordem

Sejam $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$ as estatísticas ordinais de uma distribuição *exponencial*(λ) e D_1, D_2, \dots, D_n os correspondentes *spacings* de primeira ordem, i.e.,

$$D_1 = T_{(1)}, D_2 = T_{(2)} - T_{(1)}, \dots, D_n = T_{(n)} - T_{(n-1)}. \quad (4.8)$$

Então

$$D_k \sim_{indep} \text{exponencial}((n - k + 1)\lambda) \quad (4.9)$$

$$E_k = (n - k + 1) D_k \sim_{i.i.d.} \text{exponencial}(\lambda), \quad (4.10)$$

para $k = 1, \dots, n$, onde E_k é usualmente designado de *spacing normalizado*. •

O Teorema 4.12 permite concluir que os tempos entre falhas sucessivas — em teste simultâneos de componentes com durações i.i.d. e distribuição *exponencial* — possuem distribuição também ela *exponencial*.

Corolário 4.13 — Representação de Rényi

No que diz respeito às estatísticas ordinais $T_{(r)}$ (i.e., os tempos até à r -ésima falha), pode afirmar-se que, para $k = 1, \dots, n$, correspondem a combinações lineares de v.a. *exponenciais* independentes:

$$T_{(k)} \stackrel{st}{=} \sum_{i=1}^k \frac{E_i}{(n - i + 1)} \quad \left(= \sum_{i=1}^k D_i \right) \quad (4.11)$$

$$E[T_{(k)}] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n - i + 1) \lambda} \quad (4.12)$$

$$V[T_{(k)}] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n - i + 1)^2 \lambda^2}.$$

(4.11) corresponde ao tempo esperado até à r -ésima falha e aquilo que se designa por representação de Rényi. •

Exercício 4.14 — Elabore um esquema que ilustre o resultado (4.11) do Corolário 4.13 e permita demonstrar informalmente o Teorema 4.12 (Barlow e Proschan, 1975, p. 60).

Demonstre formalmente o resultado (4.9). •

Nota 4.15 — Tempo total em teste

O *tempo total em teste* (ou tempo acumulado em teste) é definido por $\sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n T_{(i)}$. •

Exercício 4.16 — Identifique a distribuição do *tempo total em teste*, $\sum_{i=1}^n T_i$. •

Exercício 4.17 — Admita que $T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}$. Identifique o *tempo total em teste até ao instante t*, $\tau(t)$, à custa de um esquema gráfico. Prove ainda que $\tau(t) = \sum_{j=1}^i T_{(j)} + (n - i)t$. •

Nota 4.18 — Exponencial biparamétrica

Há a possibilidade de generalizar a distribuição *exponencial* ao considerar-se a f.d.p.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, t \geq \mu. \quad (4.13)$$

Neste caso lida-se com a distribuição *exponencial biparamétrica* onde μ representa o parâmetro de localização (*threshold parameter*) que em termos de fiabilidade corresponde ao período de garantia da componente (i.e., em $[0, \mu]$ não ocorrem quaisquer falhas). •

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, pp. 156–161); Martz e Waller (1982, pp. 86–89).

4.3.2 A distribuição bathtub

A distribuição “bathtub” ou em *forma de banheira* vai buscar o seu nome ao aspecto gráfico da sua função taxa de falha.

A f.d.p., f.d., função de fiabilidade e função taxa de falha da v.a. $T \sim bathtub(\mu, \theta)$ são, para $t \geq 0$, dadas por

$$f_T(t) = \theta\mu(\mu t)^{\theta-1} \exp\{-[e^{(\mu t)^\theta} - (\mu t)^\theta - 1]\} \quad (4.14)$$

$$F_T(t) = 1 - \exp\{-[e^{(\mu t)^\theta} - 1]\} \quad (4.15)$$

$$R_T(t) = \exp\{-[e^{(\mu t)^\theta} - 1]\} \quad (4.16)$$

$$\lambda_T(t) = \theta\mu(\mu t)^{\theta-1} e^{(\mu t)^\theta}, \quad (4.17)$$

respectivamente, onde μ ($\mu > 0$) é o recíproco do parâmetro de escala e θ ($\theta > 0$) representa o parâmetro de forma.

Exercício 4.19 — Elabore os gráficos da função taxa de falha da distribuição *bathtub* com parâmetros $(\mu, \theta) = (1, 0.5), (0.5, 0.6)$.

Identifique os tipos de falhas típicos associados aos seus três troços. •

Os três troços distintos da função taxa de falha da distribuição *bathtub* possuem as seguintes características (veja-se a Figura 4.1 de Martz e Waller, 1982, p. 81):

- *Troço 1* — A função taxa de falha é decrescente neste troço. Esta região é também conhecida por *período de mortalidade infantil*. Neste período as falhas devem-se a defeitos de design e fabrico.
- *Troço 2* — A função taxa de falha é praticamente constante neste troço também designado por *período de vida útil*.
- *Troço 3* — Neste último troço a função taxa de falha é crescente. Por este motivo alguns autores designam-no de *período de desgaste*. As falhas ocorrem com cada vez mais frequência porque a componente já ultrapassou o seu *período de vida útil*.

Texto de apoio: Dhillon (1984, pp. 134–135).

4.3.3 A distribuição log-normal

As características desta v.a. escrevem-se naturalmente à custa das da v.a. *normal* já que se $X \sim normal(\mu, \sigma^2)$ então $T = e^X \sim log-normal(\mu, \sigma^2)$. Assim, para $t \geq 0$,

$$f_T(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{\phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma t} \quad (4.18)$$

$$R_T(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.19)$$

$$\lambda_T(t) = \frac{1}{\sigma t} \times \frac{\phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)} \quad (4.20)$$

onde ϕ e Φ representam a f.d.p. e f.d. da v.a. *normal* padrão, respectivamente.

Exercício 4.20 — Obtenha o valor esperado e a variância da distribuição *log-normal* e elabore o gráfico da função taxa de falha de distribuição *log-normal*(0, 1), fazendo uso do *Mathematica*. •

Alguns autores questionam a utilidade da distribuição *log-normal* na modelação de tempos até falha. Tal deve-se essencialmente ao facto de a sua função taxa de falha ser inicialmente crescente para depois decrescer para zero.

Há, no entanto, evidência empírica e argumentação sólida apontando no sentido da utilidade da distribuição *log-normal* na modelação de tempos de reparação. Com efeito, parece razoável que se após algum tempo a reparação ainda não tiver sido concluída, menos verosímil será a sua conclusão imediata devido a factores psicológicos e logísticos. Por exemplo, um reparador pode ficar desencorajado depois de um período de trabalho mal sucedido, ou o tempo excessivo de reparação poderá dever-se à não disponibilidade de uma peça necessária à reparação.

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, p. 11); Martz e Waller (1982, pp. 94–95).

4.3.4 A distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull de mínimos — a que alguns autores se referem como distribuição de Weibull — deve o seu nome ao apelido do físico sueco Waloddi Weibull. Este utilizou-a em Weibull (1939a, 1939b) para representar a **tensão de ruptura de materiais** e discutiu, posteriormente, a sua utilidade na modelação de outras v.a. em Weibull (1951).

É o caso da **resistência do aço Bofors**, do **tamanho de cinzas industriais**, da **resistência da fibra de algodão indiano**. Nessa mesma referência é ilustrada a utilização da mistura de duas distribuições de Weibull na caracterização do **comprimento da**

espécie *Cyrtoideae*, do **tempo até fadiga do aço** do tipo *St-37*, da **estatura dos adultos** do sexo masculino nascidos nas Ilhas Britânicas, da **largura das sementes da espécie *Phaseolus Vulgaris***.

Em Kao (1959) pode encontrar-se uma mistura de duas distribuições de Weibull a caracterizar o comportamento estocástico do **tempo até falha de tubos de electrões**. Berrettoni (1964) também ilustrou o uso da distribuição de Weibull e da mistura de duas dessas distribuições na descrição de dados referentes: à **resistência à corrosão de placas com uma liga de magnésio**; à classificação de produtos defeituosos devolvidos, de acordo com o número de semanas após remessa; ao **tempo até o derrame de pilhas**; à **esperança de vida de produtos farmacêuticos**; à fiabilidade de **motores descontínuos** (*reliability of step motors*); e à fiabilidade de **condensadores de tantálio sólido**.

Definição 4.21 — Distribuição Weibull (biparamétrica)

A v.a. T diz-se com distribuição de Weibull (biparamétrica) com parâmetro de forma α ($\alpha > 0$) e de escala δ ($\delta > 0$) se, para $t \geq 0$,

$$f_T(t) = \frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\alpha\right] \quad (4.21)$$

$$R_T(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\alpha\right] \quad (4.22)$$

$$\lambda_T(t) = \frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\alpha-1}. \quad (4.23)$$

Nesta caso é costume representar a distribuição de T de uma forma mais abreviada: $T \sim \text{Weibull}(\delta, \alpha)$. •

Exercício 4.22 — Considere $T \sim \text{Weibull}(\delta, \alpha)$.

- a) Elabore gráficos da f.d.p., da f. de fiabilidade e f. taxa de falha da distribuição *Weibull*(1, α), $\alpha = 0.25, 1, 2, 4$ (Martz e Waller, 1982,

p. 91), fazendo uso do *Mathematica*.

b) Obtenha a expressão geral para o quantil de ordem p e prove que o valor esperado e a variância de T são dados por $E(T) = \delta \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)$ e $V(T) = \delta^2 [\Gamma(\frac{2}{\alpha} + 1) - \Gamma^2(\frac{1}{\alpha} + 1)]$, respectivamente.

Sugestão: Calcule o momento de ordem k ($k = 1, 2$) efectuando para o efeito a mudança de variável $y = (t/\delta)^\alpha$ e recordando que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} y^{s-1} e^{-y} dy$, $s > 0$. •

A distribuição de *Weibull*, por possuir um parâmetro de forma, é caracterizada por uma f.d.p. que pode tomar uma grande diversidade de aspectos, como se ilustrou no Exercício 4.22. Quando o parâmetro de forma pertence ao intervalo $(0, 1]$, o aspecto da f.d.p. é em J invertido; nesta situação a f.d.p. é monótona decrescente e a moda coincide com a origem. Caso o referido parâmetro pertença a $(1, +\infty)$ a f.d.p. é unimodal com moda definida, segundo Johnson e Kotz (1970, p. 251), por $\delta (\frac{\alpha-1}{\alpha})^{1/\alpha}$.

A popularidade da distribuição de *Weibull* deve-se a esta excepcional flexibilidade: engloba a distribuição *exponencial* ($\alpha = 1$) e a distribuição *Rayleigh* (quando $\alpha = 2$ e δ é substituído por $\sqrt{2}\delta$); e inclui funções taxa de falha constantes e monótonas crescentes e decrescentes, dependendo do valor do parâmetro de forma, como se pôde ver no Exercício 4.22 e se ilustra na tabela seguinte.

Parâmetro de forma	F. taxa de falha	
$0 < \alpha < 1$	Decrescente	$T \in DHR$
$\alpha = 1$	Constante	$T \in CHR$
$\alpha > 1$	Crescente	$T \in IHR$

Não surpreende pois que a distribuição de *Weibull* seja provavelmente a distribuição mais utilizada no domínio da fiabilidade, a seguir à distribuição *exponencial*, e se encontre na maior parte dos textos de introdução à estatística e à fiabilidade.

Exercício 4.23 — Foram registados os seguintes 9 tempos até falha (em anos) de um *heat exchanger used in the alkylation unit*³ de uma refinaria de gasolina: 0.41, 0.58, 0.75, 0.83, 1.00, 1.08, 1.17, 1.25 e 1.35 (Martz e Waller, 1982, pp. 395–396).

- Determine a estimativa de MV de δ assumindo que o parâmetro de forma é conhecido e igual a $\alpha = 3.5$.
- Após ter escrito as equações de verosimilhança, determine numericamente as estimativas de MV dos parâmetros δ e α .
- Obtenha estimativas da fiabilidade para períodos de 1 ano e de 1 ano e 3 meses, recorrendo para tal às estimativas obtidas nas alíneas a) e b). •

A popularidade da distribuição de *Weibull* encontra uma justificação não só prática como também num dos mais surpreendentes resultados da teoria assintótica de valores extremos: o teorema de Gnedenko na sua versão para o mínimo de um conjunto de v.a. i.i.d. (Para mais detalhes consulte-se Morais, 1995, pp. 109–115.)

Nota 4.24 — Distribuição Weibull (tri-paramétrica)

Há também a possibilidade de generalizar a distribuição *Weibull* de mínimos ao considerar-se a f.d.p.

³The act or process of introducing one or more alkyl groups into a compound (as to increase octane number in a motor fuel). An alkyl has a monovalent organic group and especially one C_nH_{2n+1} (as methyl) derived from an alkane (as methane).

$$f_T(t) = \frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{t - \eta}{\delta} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \eta}{\delta} \right)^\alpha \right], t \geq \eta. \quad (4.24)$$

Neste caso é frequente dizer-se que T possui distribuição de Weibull tri-paramétrica com parâmetros de localização, escala e forma iguais a η, δ e α , respectivamente — e representar a distribuição de T de uma forma mais abreviada: $T \sim \text{Weibull}(\eta, \delta, \alpha)$.

O parâmetro de localização corresponde mais uma vez ao período de vida garantida ou período de garantia da componente.

Não existem razões matemáticas que impeçam que este parâmetro seja negativo. Contudo, na maior parte das aplicações é costume ter-se $\eta \geq 0$. •

É possível estabelecer relações entre a distribuição de Weibull e, pelo menos, duas outras distribuições (Johnson e Kotz, 1970, p. 266) como se poderá ver no exercício seguinte.

Exercício 4.25 — Suponha que $T \sim \text{Weibull}(\eta, \delta, \alpha)$.

- a) Prove que a seguinte potência da v.a. T , $Y = [(T - \eta)/\delta]^\alpha$, é uma v.a. com distribuição *exponencial*(1).⁴
- b) Conclua que $Y = \alpha \ln[(T - \eta)/\delta]$ possui distribuição de *Gumbel* de mínimos com parâmetro de localização nulo e parâmetro de escala unitário, i.e., $F_Y(y) = 1 - e^{-e^y}$, $y \in \mathbb{R}$.⁵
- c) Prove por fim que $T_i \sim_{i.i.d.} T$, $i = 1, \dots, n$, se e só se $T_{(1)} \sim \text{Weibull}(\eta, \frac{\delta}{n^{1/\alpha}}, \alpha)$. •

⁴Este resultado será de extrema utilidade na caracterização distribucional de uma v.a. fulcral para o parâmetro de escala quando os restantes parâmetros (localização e forma) são conhecidos.

⁵Autores como Engelhardt e Bain (1977) tiraram partido desta relação para estimar os parâmetros de escala e forma quando o parâmetro de localização é nulo.

Refira-se por fim que, entre os domínios em que tem sido utilizada a distribuição de Weibull tri-paramétrica, conta-se também a **otimização combinatoria**. Golden (1977) refere que McRoberts (1966), ao lidar com *combinatorially explosive plant-layout problems*, foi o primeiro autor a associar a distribuição de Weibull à modelação probabilística de soluções aproximadas do **problema do caixeiro viajante**.⁶ Por tratar-se de um problema para o qual ainda se conjectura a inexistência de algoritmos com tempo de execução polinomial, o problema do caixeiro viajante tem vindo a ser abordado sob o ponto de vista estatístico, com vista à obtenção de estimativas quer pontuais (Golden, 1977), quer intervalares (Golden e Alt, 1979) para o custo do solução óptima que corresponde ao parâmetro de localização de uma distribuição de Weibull tri-paramétrica. Para mais detalhes consulte-se Morais (1998).

Textos de apoio: Morais (1995, pp. 109–115); Martz e Waller (1982, pp. 89–91).

⁶Nesta mesma referência McRoberts sugeriu que a distribuição de Weibull também fosse utilizada na modelação de soluções aproximadas de outros problemas de otimização combinatoria: Cerdeira (1986) é disso um exemplo.

4.3.5 As distribuições normal e normal truncada

A distribuição *normal* é sobejamente conhecida pelo que não nos alongaremos nesta exposição. No entanto, convém realçar que, embora o suporte desta distribuição seja $(-\infty, +\infty)$, ao considerar-se valores positivos para μ suficientemente grandes quando comparados com o valor de σ (e.g. $\mu/\sigma \gg 3$) a probabilidade de registar-se valores negativos é irrisória.

Caso tal não aconteça, a distribuição *normal* deve ser truncada para valores negativos e reescalada em conformidade, obtendo-se assim a distribuição *normal truncada* cuja f.d.p. é dada por

$$f_T(t) = \frac{1}{a} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad t \geq 0, \quad (4.25)$$

onde $a = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt$. Neste caso escreve-se abreviadamente $T \sim \text{normal truncada}(\mu, \sigma^2)$. Caso $\mu = 0$ a distribuição normal truncada é designada na literatura anglo-saxónica por *half normal*.

Exercício 4.26 — Suponha que $T \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$.

- Elabore gráficos da f.d.p., função de fiabilidade e função taxa de falha, para os pares de valores $(\mu, \sigma) = (0.5, 0.075), (1, 0.1), (2, 0.15)$.
- Prove que a função taxa de falha $\lambda_T(t)$ desta v.a. é crescente e que possui a assíntota $y = (t - \mu)/\sigma$.

Obs: Recorde-se que a recta $mt+a$ diz-se uma assíntota da função $g(t)$ se e só se $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)/t = m$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} [g(t) - mt] = a$. •

Exercício 4.27 — Repita a alínea a) do exercício anterior considerando agora $T \sim \text{normal truncada}(\mu, \sigma^2)$. •

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, p. 163); Martz e Waller (1982, pp. 90–94).

4.3.6 A distribuição gama

Estamos mais uma vez na presença de uma distribuição com parâmetro de forma pelo que apresenta um leque extremamente variado de f.d.p. — decrescentes ou monótonas por dois troços (crescentes e de seguida decrescentes) —, embora todas positivamente assimétricas e mais alongadas que a *normal*.

A f.d.p. desta v.a. é dada por

$$f_T(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (4.26)$$

e passaremos a escrever abreviadamente $T \sim \text{gama}(\alpha, \lambda)$, onde α e λ^{-1} representam os parâmetros de forma e escala, respectivamente.

A distribuição *gama* possui como casos particulares as seguintes distribuições:

- *exponencial* — $\alpha = 1$;
- *Erlang* — $\alpha \in \mathbb{N}$;
- *qui-quadrado* com ν graus de liberdade — $\alpha = \nu/2, \lambda = 1/2$.

A distribuição *gama*, designadamente, a distribuição *Erlang* pode descrever o tempo de vida no caso em que há a ocorrência de vários choques até que a componente falha definitivamente aquando do n -ésimo choque e em que os tempos entre choque sucessivos são v.a. i.i.d. *exponenciais*. E é sabido que a distribuição *Erlang* surge também como a distribuição do instante da n -ésima ocorrência de um processo de *Poisson*, i.e., como a distribuição de uma soma de v.a. i.i.d. *exponenciais*.

A grande variedade de formas desta distribuição e a sua simplicidade matemática explicam o seu uso frequente em fiabilidade, como na descrição de fluxos máximos de corrente, de resistências críticas de betão pré-esforçado, etc.

Exercício 4.28 — Ilustre a variedade de f.d.p. e de comportamentos monótonos da função taxa de falha da v.a. $T \sim \text{gama}(\alpha, \lambda)$, considerando $(\lambda, \alpha) = (0.5, 0.5), (1, 0.5), (2, 0.25), (2, 1)$. •

Exercício 4.29 — É possível relacionar a função de fiabilidade da v.a. $T \sim \text{Erlang}(\alpha, \lambda)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, com a função de distribuição de uma v.a. de *Poisson*:

$$\begin{aligned} R_T(t) &= 1 - \sum_{i=\alpha}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i / i! \\ &= F_{\text{Poisson}(\lambda t)}(\alpha - 1), t > 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Prove este resultado.

Sugestão: Use um resultado conveniente de Processos Estocásticos ou então recorra à integração por partes. •

Exercício 4.30 — Com o objectivo de estudar o tempo até falha de certo equipamento electrónico (em dezenas de milhar de horas), uma gestora recolheu um total de 50 observações que conduziram à média geométrica amostral $m_g = \left(\prod_{i=1}^{50} t_i\right)^{1/50} = 4.2427$.

Admita que a f.d.p. do tempo até falha é, para $\lambda > 0$, dada por

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\lambda 2.5^\lambda}{t^{\lambda+1}}, t \geq 2.5 \\ 0, \text{c.c.}, \end{cases}$$

i.e., $T \sim \text{Pareto}(2.5, \lambda)$.

a) Prove que a estimativa de máxima verosimilhança de λ é igual a $\hat{\lambda} = [\ln(m_g) - \ln(2.5)]^{-1}$.

b) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança da fiabilidade para um período de 35 000 horas.

c) Sabendo que $2\lambda \sum_{i=1}^{50} \ln(T_i/2.5) \sim \chi_{(100)}^2$ é uma v.a. fulcral para λ , onde $M_g = \left(\prod_{i=1}^{50} T_i\right)^{1/50}$, deduza um intervalo de confiança a 95% para este parâmetro, bem como para a fiabilidade referida na alínea b).

d) Deduza um intervalo de confiança a 95% para λ com amplitude esperada mínima. •

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, p. 162); Barlow e Proschan (1975, pp. 72–75).

4.3.7 A distribuição gaussiana inversa

O nome desta distribuição deve-se a uma relação entre a função geradora dos cumulantes (ou segunda função característica) da *gaussiana inversa* e a da distribuição *normal*.

Nota 4.31 — Distribuição gaussiana inversa

Seja $\phi_T(z) = E(e^{izT})$, onde $i = \sqrt{-1}$, a função característica de T . Então $\phi_T(z) = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} E(T^s) \frac{(iz)^s}{s!}$. Para além disso, a função geradora dos cumulantes é igual a

$$\begin{aligned} K(z) &= \ln \phi_T(z) \\ &= \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s \frac{(iz)^s}{s!}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde os coeficientes ξ_s são denominados de cumulantes da distribuição de T . Para mais detalhes consulte-se Murteira (1990, pp. 223–226 e 250–252). •

A distribuição *gaussiana inversa* tem-se revelado útil na modelação de situações em que as falhas iniciais dominam a vida de um sistema. Estas situações poderiam sugerir a utilização da distribuição *lognormal* pelo facto de possuir função taxa de falha crescente e posteriormente decrescente: com efeito a taxa de falha destas duas distribuições possuem o mesmo comportamento monótono por troços. No entanto, há várias vantagens em usar a distribuição *gaussiana inversa*. Primeiro, porque é menos difícil justificar fisicamente a sua utilização já que surge, por exemplo, como a distribuição de um tempo de primeira passagem do movimento browniano. Segundo, porque vem enriquecer a classe de distribuições de falha. E por último, os procedimentos inferenciais estão muito bem desenvolvidos (para os parâmetros e para a função de fiabilidade) e são similares aos da distribuição *normal*.

A f.d.p., a f. fiabilidade e a f. taxa de falha de $T \sim \text{gaussiana inversa}(\mu, \lambda)$ são, para $t \geq 0$, $\mu > 0$ e $\lambda > 0$, iguais a:

$$f_T(t) = \left(\frac{\lambda}{2\pi t^3}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}\right] \quad (4.29)$$

$$R_T(t) = \Phi\left[\left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right] - \exp(2\lambda/\mu) \Phi\left[-\left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{t}{\mu}\right)\right] \quad (4.30)$$

$$\lambda_T(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}, \quad (4.31)$$

onde μ e λ não correspondem aos parâmetros de localização e forma no sentido usual — na verdade λ/μ é que é o parâmetro de forma.

De notar também que

$$E(T) = \mu \quad (4.32)$$

$$V(T) = \frac{\mu^3}{\lambda} \quad (4.33)$$

$$mo(T) = -\frac{3\mu^2}{2\lambda} + \mu \left(1 + \frac{9\mu^2}{4\lambda^2}\right)^{1/2} \quad (4.34)$$

e que a função taxa de falha é crescente para $t < mo(T)$, decrescente para $t > \frac{2\lambda}{3}$ e atinge máximo no ponto t que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\lambda}{2\mu^2} + \frac{3}{2t} - \frac{\lambda}{2t^2} = 0. \quad (4.35)$$

Exercício 4.32 — Admita que $T \sim \text{gaussiana inversa}(\mu, \lambda)$.

- Elabore gráficos da f.d.p., função de fiabilidade e função taxa de falha, para $\mu = 1$ e $\lambda = 0.5, 1, 3, 10$ (Martz e Waller, 1982, p. 99).
- O registo de tempos até fadiga (em horas) de 10 rolamentos de certo tipo conduziu às seguintes observações ordenadas:
152.7, 172.0, 172.5, 173.3, 193.0, 204.7, 216.5, 239.9, 262.6, 422.6 (Seshadri, 1999, p. 35).

Obtenha as estimativas de MV de μ , de λ , da f. de fiabilidade e da f. taxa de falha para um período de 100 horas. •

Textos de apoio: Martz e Waller (1982, pp. 95–99); Seshardi (1999, pp. 1–4, 206–219).

4.3.8 As distribuições gama inversa e beta

Este par de distribuições pouco interesse tem para a modelação de tempos até falha. No entanto, as distribuições gama inversa e beta revelam-se de extrema utilidade quando se efectua **inferência bayesiana** sobre o parâmetro da distribuição *exponencial* e a

probabilidade de sucesso da distribuição *binomial* (respectivamente): são aquilo que se denomina de densidades *a priori* dos parâmetros.⁷ Por este motivo não nos alongaremos na descrição desta duas distribuições nem nos reportaremos às respectivas funções de fiabilidade e taxa de falha.

A distribuição *gama inversa* é derivada do seguinte modo: se $Y \sim \text{gama}(\alpha, \lambda)$ então $T = Y^{-1} \sim \text{gama inversa}(\alpha, \lambda)$. Assim, possui as seguintes características

$$f_T(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{\lambda}{t}\right), t, \lambda, \alpha > 0 \quad (4.36)$$

$$E(T) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \alpha > 1 \quad (4.37)$$

$$V(T) = \frac{\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \alpha > 2 \quad (4.38)$$

De notar que o momento de ordem s , $E(T^s)$, e qualquer outro de ordem superior a s não existem caso s seja maior que a parte inteira de α .

A distribuição *beta* possui as seguintes características:

$$f_T(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}, 0 < t < 1, \alpha, \beta > 0 \quad (4.39)$$

$$E(T) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (4.40)$$

$$V(T) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}, \quad (4.41)$$

onde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

⁷Em inferência bayesiana um parâmetro desconhecido é considerado uma v.a. com uma densidade *a priori* antes da recolha da informação e uma densidade *a posteriori* após a recolha de observações. As estimativas pontuais mais frequentes de tal parâmetro são o valor esperado e a moda *a posteriori*, i.e., calculados à custa da densidade *a posteriori*.

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \quad (4.42)$$

De referir que neste caso se escreve $T \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$ e que a distribuição uniforme é obviamente um caso particular da distribuição *beta* para $\alpha = \beta = 1$.

Parâmetros	Aspecto da f.d.p.
$\alpha, \beta > 1$	Uma única moda em $t = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$
$\alpha < 1, \beta > 1$	Uma única anti-moda em $t = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$ (forma em U)
$(\alpha - 1)(\beta - 1) \leq 0$	Forma em J
$\alpha = \beta$	Simétrica em torno de $1/2$ (e.g. constante ou parabólica)
$\alpha < \beta$	Assimétrica positiva
$\alpha > \beta$	Assimétrica negativa

De realçar também a enorme variedade de formas admissíveis para a f.d.p., como se ilustra na Tabela 4.3.8, e a seguinte relação entre as f.d. das distribuições *beta* e *binomial* quando α e β são inteiros:

$$F_{\text{beta}(\alpha, \beta)}(t) = 1 - F_{\text{binomial}(\alpha+\beta-1, t)}(\alpha - 1). \quad (4.43)$$

Exercício 4.33 — Ilustre cada um dos aspectos da f.d.p. da distribuição *beta* referidos na Tabela 4.3.8 e obtenha as equações de verosimilhança cuja resolução conduzirá às estimativas de MV dos parâmetros α e β . •

Texto de apoio: Martz e Waller (1982, pp. 101–105).

Capítulo 5

Inferências sobre modelos para diferentes tipos de ensaio

5.1 Introdução

Um dos objectivos da (teoria da) fiabilidade é adiantar estimativas de características como a função taxa de falha, a função de fiabilidade ou a duração esperada de um sistema.

Uma breve revisão dos capítulos anteriores permite-nos concluir que o **ponto de partida** para a obtenção de resultados é a **informação** sobre a duração de vida. Esta informação pode vir sob a forma de considerações tão genéricas sobre o comportamento monótono da função taxa de falha ou tão específicas como a forma paramétrica da distribuição de vida. É óbvio que somente a análise estatística de **dados experimentais** possibilita a **validação** destas considerações/**assunções**.

Neste capítulo podemos encontrar a descrição de algumas das técnicas para a análise de dados de fiabilidade.

Abordar-se-á a **estimação não paramétrica** da f.d.p., da f. fiabilidade e da f. taxa de falha.

Serão descritos alguns **procedimentos gráficos** que orientarão a selecção de modelos.

Serão revistos alguns **tipos de censura** já que uma das características mais comuns de **dados experimentais**, que se reportam ao domínio da fiabilidade, é serem de um modo geral **incompletos**/censurados pois é frequente que alguns dos itens em teste sobrevivam por períodos superiores à duração planeada para o teste.

Far-se-á uso de uma das ferramentas mais importantes em **inferência paramétrica** — o **método da MV** (resp. v.a. fulcral) à custa do qual se obterá estimativas pontuais (resp. intervalares) para a fiabilidade, método este facilmente aplicável a situações em que se lida com dados completos ou censurados/incompletos.

Gertsbakh (1989, p. 156) é da opinião que não é um exagero afirmar que pelo menos dois terços da literatura de fiabilidade está orientada para as distribuições **exponencial** e **Weibull**. A extrema popularidade destas duas distribuições prende-se com dois factos: elas permitem um tratamento matemático/estatístico simples e elegante e, simultaneamente, fornecem em muitas situações práticas uma descrição adequada do comportamento estocástico das v.a. de interesse.¹

Poderiam ainda ter sido abordadas outras técnicas/modelos igualmente importantes e interessantes como a inferência bayesiana, os modelos de Cox (que envolvem variáveis explicativas), ou os modelos que fazem uso de dados multivariados, etc. Para o leitor mais interessado recomenda-se a consulta de Martz e Waller (1982) e Dhillon

¹No capítulo 9 de Martz e Waller (1985) pode encontrar-se a estimação bayesiana da fiabilidade para os modelos Weibull, normal, log-normal, gaussiana inversa e gama.

(1985) no que respeita a inferência bayesiana e modelos de Cox, respectivamente.

Texto de apoio: Gertsbakh (1989, pp. 155–157).

5.2 Identificação e selecção de modelos

As características de fiabilidade de um equipamento são estimadas a partir dos registos dos tempos até falha. Este dados são usualmente obtidos durante a fase de desenvolvimento do equipamento (*development phase*) ou durante a fase de uso em laboratório (*field use phase*). A recolha de dados deve ser efectuada com extremo cuidado em qualquer das duas fases. Por exemplo, é preciso certificar-se que os dados são recolhidos nas condições para que foi pensado o equipamento.

Uma vez recolhidos os dados procede-se à análise dos **mesmos**, obtendo-se, **por exemplo** estimativas da f.d.p., intervalos de confiança para a função taxa de falha, o tempo esperado até falha e a função de fiabilidade, **ou informação sobre a** bondade do ajustamento da distribuição ao conjunto de dados.

Texto de apoio: Dhillon (1985, p. 207).

5.2.1 Estimação não paramétrica de características da fiabilidade — dados completos

Passe-se à discussão de procedimentos não paramétricos (i.e., procedimentos que não requerem o conhecimento da forma da distribuição do tempo até falha) passíveis de utilização na estimação da f.d.p., f. fiabilidade e f. taxa de falha à custa de um pequeno número

de observações ou de uma amostra de dimensão considerável que foi previamente agrupada em classes.

Considere-se em primeiro lugar o caso em que se dispõe de uma amostra com (dimensão pequena e) **observações não agrupadas** (*ungrouped failure data*).

Sejam $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$ as observações ordenadas de um grupo de n tempos até falha. Na Tabela 5.1 encontram-se expressões para as **estimativas não paramétricas** das três mais importantes características de fiabilidade — f.d.p., f.f. e f.t.f.

A estimativa $\hat{R}[t_{(i)}] = \frac{n-i+0.625}{n+0.25}$, $i = 1, \dots, n$, deve-se a Blom (1958), é muito usada na literatura por conduzir a bons resultados empíricos. Apesar de as estimativas tabeladas serem muito utilizadas não são de modo algum as únicas estimativas das referidas características. Por exemplo, $\frac{n-i+1}{n+1}$, $\frac{n-i+0.7}{n+0.4}$, $\frac{n-i+0.5}{n}$ e $\frac{n-i}{n}$ são outras estimativas possíveis para a f. fiabilidade.

Tabela 5.1: Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — amostra não agrupada.

Função	Estimativa
f.d.p.	$\hat{f}[t_{(i)}] = \frac{1}{(n+0.25) \times [t_{(i+1)} - t_{(i)}]}$, $i = 1, \dots, n-1$
f. fiabilidade	$\hat{R}[t_{(i)}] = \frac{n-i+0.625}{n+0.25}$, $i = 1, \dots, n$
f. taxa de falha	$\hat{\lambda}[t_{(i)}] = \frac{1}{(n-i+0.625) \times [t_{(i+1)} - t_{(i)}]}$, $i = 1, \dots, n-1$

Exercício 5.1 — Discuta a pertinência e os inconvenientes da f. fiabilidade empírica, $\tilde{R}[t_{(i)}] = 1 - \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, como estimativa da f. fiabilidade. •

Exercício 5.2 — Foram recolhidos os seguintes 9 tempos ordenados até falha (em anos) de um *heat exchanger used in the alkylolation unit*

de uma refinaria de gasolina: 0.41, 0.58, 0.75, 0.83, 1.00, 1.08, 1.17, 1.25 e 1.35.

- a) Determine estimativas da f.d.p., da f.f. e da f.t.f. preenchendo para o efeito a Tabela 5.2 (Martz e Waller, 1982, pp. 106–107).

Tabela 5.2: Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — dados da refinaria de gasolina.

i	$t_{(i)}$	$t_{(i+1)} - t_{(i)}$	$\hat{f}[t_{(i)}]$	$\hat{R}[t_{(i)}]$	$\hat{\lambda}[t_{(i)}]$
1	0.41	0.17	$\frac{1}{9.25 \times 0.17} = 0.64$	$\frac{8.625}{9.25} = 0.93$	$\frac{1}{8.625 \times 0.17} = 0.68$
2	0.58				
3	0.75				
4	0.83				
5	1.00				
6	1.08				
7	1.17				
8	1.25				
9	1.35				

- b) Elabore um gráfico de $\hat{\lambda}(t)$.
- c) Que distribuição sugeriria para o tempo até falha face ao comportamento monótono da estimativa da f.t.f.?

Nota — Ao lidar com amostras pequenas, importa agir com extrema cautela pois é sabido que uma simples observação discordante (*outling observation*) pode ter uma influência considerável nas estimativas obtidas.

Considere agora que se lida com uma amostra com dimensão n considerável e **observações agrupadas** (*grouped failure data*).

Sejam:

- $N(t)$ o número de unidades sobreviventes (em funcionamento) no instante t (*number of survivors at time t*);
- k o número de classes em que foram agrupados os dados;
- $[t_j, t_{j+1})$ (resp. $[t_k, t_{k+1})$) a j -ésima classe, $j = 1, \dots, k-1$ (resp. $j = k$) e $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ a respectiva amplitude.

Neste caso as estimativas não paramétricas da f.d.p. e da f.t.f. são definidas por

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{\text{no. de falhas na classe } j}{\text{dimensão da amostra} \times \text{amplitude da classe } j} \\ &= \frac{N(t_j) - N(t_{j+1})}{n \times \Delta t_j} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(t) &= \frac{\text{no. de falhas na classe } j}{\text{no. de sobrev. até ao instante } t_j \times \text{amp. classe } j} \\ &= \frac{N(t_j) - N(t_{j+1})}{N(t_j) \times \Delta t_j}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

para $t_j \leq t < t_j + \Delta t_j$, e a da f.f. dada por

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= \frac{\text{no. de sobreviventes até ao instante } t}{\text{dimensão da amostra}} \\ &= \frac{N(t)}{n}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A Tabela 5.3 resume estas expressões para as estimativas da f.d.p., f.f. e f.t.f. para dados agrupados.

Tabela 5.3: Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — amostra agrupada.

Função	Estimativa
f.d.p.	$\hat{f}(t) = \frac{N(t_j) - N(t_{j+1})}{n \times \Delta t_j}, t_j \leq t < t_j + \Delta t_j$
f. fiabilidade	$\hat{R}(t) = \frac{N(t)}{n}, t \geq 0$
f. taxa de falha	$\hat{\lambda}(t) = \frac{N(t_j) - N(t_{j+1})}{N(t_j) \times \Delta t_j}, t_j \leq t < t_j + \Delta t_j$

Exercício 5.3 — São efectuadas medições da resistência de diversas componentes, num grande laboratório governamental, recorrendo para o efeito a dispositivos de teste cujo funcionamento depende de baterias.

A duração destas baterias tem sido um motivo constante de preocupação pelo que se recolheu o seguinte conjunto de 50 observações do tempo até falha (em meses) dessas mesmas baterias:

Intervalo	No. de falhas no intervalo
[0, 3)	21
[3, 6)	10
[6, 9)	7
[9, 12)	9
[12, 15)	2
[15, 18]	1

a) Preencha a Tabela 5.4 com estimativas da f.d.p., da f.f. e da f.t.f. (Martz e Waller, 1982, pp. 108–109).

Tabela 5.4: Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f e f.t.f. — baterias.

j	t_j	t_{j+1}	$N(t_j)$	$N(t_j) - N(t_{j+1})$	$\hat{f}(t)$	$\hat{R}(t)$	$\hat{\lambda}(t)$
1	0	3	50	$50 - 29 = 21$	$\frac{21}{50 \times 3} = 0.14$	$\frac{50}{50} = 1.00$	$\frac{21}{50 \times 3} = 0.14$
2	3	6					
3	6	9					
4	9	12					
5	12	15					
6	15	18					

b) Elabore e comente os gráficos de $\hat{f}(t)$, $\hat{R}(t)$ e $\hat{\lambda}(t)$. •

Exercício 5.4 — Os *turbofan jet engines* começaram a ser usados há mais de 20 anos como meio de propulsão de aeronaves comerciais: constituem o que se considera uma forma económica e segura de transportar carga e passageiros.

Os números de pequenas falhas registadas em intervalos (em horas) por parte de um conjunto de 432 desses motores estão resumidos na Tabela 5.5 (Dhillon, 1985, pp. 208–209).

Elabore um programa em *Mathematica* por forma a preencher a Tabela 5.5 com estimativas da f.d.p., da f.f. e da f.t.f. e a elaborar gráficos de $\hat{f}(t)$, $\hat{R}(t)$ e $\hat{\lambda}(t)$.

Tabela 5.5: Estimativas não paramétricas da f.d.p., f.f. e f.t.f. — *turbofan jet engines*.

t_j	t_{j+1}	$N(t_j)$	$N(t_j) - N(t_{j+1})$	$10^2 \times \hat{f}(t)$	$\hat{R}(t)$	$10^2 \times \hat{\lambda}(t)$
0	100	432	121	$\frac{10^2 \times 121}{432 \times 100} = 0.280$	$\frac{432}{432} = 1.00$	$\frac{10^2 \times 121}{432 \times 100} = 0.280$
100	200		80			
200	300		70			
300	400		63			
400	500		30			
500	600		25			
600	700		21			
700	800		10			
800	900		7			
900	1000		5			

•
Para a descrição da estimação não paramétrica de características da fiabilidade referentes a dados incompletos/censurados recomenda-se a leitura de Gertsbakh (1989, pp. 158–168).

Textos de apoio: Dhillon (1985, pp. 207–210); Martz e Waller (1982, pp. 105–109).

5.2.2 Gráficos TTT

Os gráficos *TTT* (*total time on test plots*) foram propostos por Barlow e Campo (1975) e, nesta subsecção, concentramo-nos-emos no seu uso como forma de determinar qual o **comportamento monótono da função taxa de falha** a partir de um conjunto de n observações completas.

Seja $N(\tau)$ o número de unidades sobreviventes até ao instante τ . Então

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^t N(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

representa o **tempo total em teste** (*total time on test*) até ao instante t . Caso as unidades tenham falhado nos instantes ordenados $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$, o tempo total em teste observado até ao instante $t_{(i)}$ é igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t_{(i)}) &= \int_0^{t_{(i)}} N(\tau) d\tau \\ &= n t_{(1)} + (n-1)(t_{(2)} - t_{(1)}) + \dots \\ &\quad + (n-i+1)(t_{(i)} - t_{(i-1)}) \\ &= \sum_{j=1}^i (n-j+1)(t_{(j)} - t_{(j-1)}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $t_{(0)} = 0$. (Justifique!) O quociente

$$0 \leq \frac{\mathcal{T}(t_{(i)})}{\mathcal{T}(t_{(n)})} \leq 1 \quad (5.6)$$

é usualmente denominado de **tempo total em teste escalado** (*scaled total time on test*) no instante $t_{(i)}$.

Ao gráfico com abcissa i/n e ordenada $\mathcal{T}(t_{(i)})/\mathcal{T}(t_{(n)})$, com $i = 0, 1, \dots, n$, e $t_{(0)} = 0$, dá-se o nome de **gráfico TTT** (*TTT plot*). É

também costume unir estes pontos com segmentos de recta para uma melhor visualização.

Nota 5.5 — O gráfico *TTT* para observações provenientes de um modelo *exponencial* deve ser uma recta com 45° .² Se a função taxa de falha for crescente então o gráfico *TTT* deverá ser côncavo (i.e., acima de um segmento de recta com 45°); caso $\lambda(t)$ seja monótona decrescente o correspondente gráfico *TTT* deverá ser convexo (i.e., abaixo do referido segmento). Logo a curvatura do gráfico *TTT* dá indicação do comportamento monótono mais ou menos acentuado de função taxa de falha e, assim, sugerir um modelo adequado. •

Exercício 5.6 — Simule dados provenientes de uma distribuição *exponencial* com parâmetro de escala unitário e confirme que o gráfico *TTT* pouco se distingue de um segmento de recta com 45° . •

Exercício 5.7 — Considere-se novamente os 9 tempos ordenados até falha (em anos) de um *heat exchanger used in the alkylation unit* de uma refinaria de gasolina.

²Para uma justificação formal deste resultado consulte-se Barlow (1998, pp. 28–30).

Tabela 5.6: Cálculos auxiliares para obter gráfico *TTT* — refinaria de gasolina.

i	$t_{(i)}$	$t_{(i)} - t_{(i-1)}$	$n - i + 1$	$(n - i + 1)(t_{(i)} - t_{(i-1)})$	$\mathcal{T}(t_{(i)})$	$\frac{\mathcal{T}(t_{(i)})}{\mathcal{T}(t_{(n)})}$
1	0.41	0.41	9	3.69	3.69	0.44
2	0.58	0.17				
3	0.75					
4	0.83					
5	1.00					
6	1.08					
7	1.17					
8	1.25					
9	1.35					

Após ter preenchido a Tabela 5.6, elabore e comente o gráfico *TTT*. Serão as suas conclusões consistentes com aquelas a que chegou na alínea c) do Exercício 5.2 (Martz e Waller, 1982, p. 111)? •

Nota 5.8 — A construção de gráficos *TTT* restringe-se ao quadrado unitário permitindo assim a comparação de vários conjuntos de dados com distribuições distintas. Estes gráficos são ainda invariantes a mudanças de escala e de interpretação simples e directa. •

Exercício 5.9 — Elabore os gráficos *TTT* num mesmo quadrado unitário, para os dados dos Exercícios 5.10 e 5.12 e pronuncie-se sobre o comportamento monótono das funções taxa de falha das durações para estes dois conjuntos de dados. •

Texto de apoio: Martz e Waller (1982, pp. 109–111).

5.2.3 Papel de probabilidade

A aplicação do papel de probabilidade visa essencialmente:

- a obtenção de uma confirmação visual rápida do ajustamento de um determinado modelo e
- a estimação grosseira do(s) parâmetro(s) do modelo.

Para a sua construção postula-se que a amostra provém de um membro da família de localização–escala,³ i.e., a f.d. é do tipo

$$F_{\lambda,\delta}(t) = G\left(\frac{t - \lambda}{\delta}\right), \quad (5.7)$$

onde λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) e δ ($\delta > 0$) representam aqui os parâmetros de localização e escala, respectivamente.

³Ou que esse membro está de algum modo relacionado com uma família desse tipo.

O **papel de probabilidade** é obtido considerando como ordenadas as observações ordenadas (ou uma sua transformação, por exemplo, logarítmica) e como abcissas quantis de probabilidade (ou uma sua transformação) escolhidos de tal forma que o **gráfico é aproximadamente linear** quando o **modelo postulado** se adequa às observações.

Para compreender os **aspectos teóricos subjacentes ao papel de probabilidade**, é necessário definir algumas quantidades e atender a alguns factos:

- defina-se

$$p_i = F_{\lambda,\delta}[t_{(i)}] = G\left(\frac{t_{(i)} - \lambda}{\delta}\right); \quad (5.8)$$

- o quantil de probabilidade p_i é igual a

$$G^{-1}(p_i) = \frac{1}{\delta} \times t_{(i)} - \frac{\lambda}{\delta}, \quad (5.9)$$

logo corresponde a uma função linear de $t_{(i)}$;

- os quantis $G^{-1}(p_i)$ são desconhecidos uma vez que se desconhece os parâmetros da f.d. da população; estes quantis têm de ser, portanto, estimados;
- a v.a. $F_{\lambda,\delta}[T_{(i)}]$ (função de distribuição da v.a. de interesse T , avaliada em $T_{(i)}$) verifica, para qualquer **modelo contínuo**,

$$F_{\lambda,\delta}[T_{(i)}] \sim \text{beta}(i, n - i + 1); \quad (5.10)$$

- uma estimativa possível para $p_i = F_{\lambda,\delta}[t_{(i)}]$ é o valor esperado $E\{F_T[T_{(i)}]\} = \frac{i}{n+1}$, usualmente designado de **plotting point**,

donde se segue que a correspondente estimativa do quantil $G^{-1}(p_i)$ seja

$$\widehat{G^{-1}(p_i)} = G^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right). \quad (5.11)$$

Esta estimativa deve ser confrontada graficamente com $t_{(i)}$. Ao gráfico cuja

- abcissa é igual a $G^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$ (ou uma sua transformada) e cuja
- ordenada é igual a $t_{(i)}$ (ou uma sua função)

dá-se o nome de **papel de probabilidade**.⁴

A ordenada na origem (λ) e o declive (δ) da recta traçada *a olho* constituem estimativas grosseiras dos parâmetros do modelo.

Por forma a ilustrar a construção de papéis de probabilidade, serão considerados alguns exercícios.

Exercício 5.10 — Foram registados os seguintes tempos até falha (em meses) de um osciloscópio⁵ usado numa das oficinas de um grande laboratório: 0.30, 0.55, 0.56, 0.86, 0.93, 1.15, 1.42, 1.75 (Martz e Waller, 1982, pp. 113–114).

- Construa um papel de probabilidade para averiguar a adequação do modelo *exponencial* a este conjunto de dados.
- Obtenha uma estimativa grosseira para o parâmetro de escala deste modelo.
- Repita as alíneas a) e b) considerando agora a seguinte abcissa

$$\ln\left(\frac{n + 0.25}{n - i + 0.625}\right)$$

e comente os resultados agora obtidos. •

⁴Este gráfico é por vezes designado de *Q-Q plot* (Q de quantil).

⁵Aparelho que permite a visualização dos sinais eléctricos num ecrã fluorescente.

Exercício 5.11 — Com o objectivo de estudar o tempo até falha de certo equipamento electrónico (em milhares de horas), uma matemática e um engenheiro recolheram e ordenaram um total de 50 observações, obtendo o seguinte conjunto de observações:

2.001	2.007	2.017	2.026	2.036	2.075	2.077	2.082	2.101	2.137
2.156	2.161	2.181	2.196	2.214	2.227	2.320	2.367	2.424	2.443
2.444	2.449	2.478	2.520	2.579	2.581	2.598	2.637	2.691	2.715
2.720	2.825	2.863	2.867	3.016	3.176	3.360	3.413	3.567	3.721
3.727	3.769	3.803	4.329	4.420	4.795	6.009	6.281	6.784	8.305

Dada a natureza dos dados, os elementos de tal equipa de trabalho suspeitam que as observações tenham sido geradas por um modelo *Pareto*, com parâmetros λ e δ e cuja função de distribuição é dada por

$$F_{\lambda,\delta}(t) = 1 - \left(\frac{\lambda}{t}\right)^\delta, \quad t \geq \lambda, \quad (5.12)$$

para $\lambda, \delta > 0$.

Descreva detalhadamente como poderia a equipa confirmar graficamente tal suspeita e ilustre a utilização da técnica gráfica em questão, elaborando para o efeito um programa em *Mathematica*. •

Exercício 5.12 — Suspeita-se que os seguintes tempos até falha sejam provenientes de uma distribuição pertencente ao modelo *Weibull* com parâmetros de escala e forma λ e α : 49, 73, 103, 140, 162, 164, 181, 196, 232, 248, 288, 290, 309, 377, 388, 464, 500 horas.

Construa o correspondente papel de probabilidade por forma a averiguar a razoabilidade de tal suspeita. •

Exercício 5.13 — Para o estudo do tempo (em minutos) até à ocorrência da mitose⁶ de certa estirpe de bactéria recolheu-se a

⁶Conjunto de fenómenos citoplasmáticos e nucleares que culminam na divisão da célula em que ocorreram.

seguinte amostra: 1.242, 1.626, 0.123, 2.957, 0.388, 3.841, 1.961, 0.938.

Para escolher um modelo probabilístico adequado, um biólogo traçou um gráfico, onde marcou os pontos $(\ln(9/(9-i)), t_{(i)})$.

Ao constatar que os pontos traçados apresentavam uma disposição aproximadamente linear que passava pela origem, o biólogo escolheu certo modelo uniparamétrico.

- Identifique o modelo escolhido, justificando o procedimento usado pelo biólogo.
- Com base no gráfico, o biólogo considerou o valor 0.56 como estimativa razoável para o parâmetro desconhecido. Diga como procedeu o biólogo para obter a estimativa referida. •

Como pudemos ver o papel de probabilidade — embora nos dê uma ideia visual do ajustamento de um modelo a um conjunto de dados — tem a desvantagem de terem de ser construído especificamente para cada um dos modelos postulados, ao contrário do que acontecia com os gráficos *TTT*.⁷

Acrescente-se que a técnica do papel de probabilidade não pode ser usado para modelos discretos⁸ nem para modelos contínuos como os modelos *gama* (a menos que o parâmetro de forma seja conhecido) e *beta* (a menos que se trate do modelo uniforme, porque ambos os parâmetros são de forma).

Em Martz e Waller (1982, pp. 112–118) podem encontrar-se papéis de probabilidade para os modelos *exponencial*, *Weibull*, *normal* e *log-normal*. Estes papéis de probabilidade fazem — sem excepção — uso de *plotting points* distintos daquele aqui usado, $\frac{i}{n+1}, i = 1, \dots, n$.

⁷Recorde-se que os gráficos *TTT* não se prestam à verificação do ajustamento de modelos.

⁸Basta pensar na génese do *plotting point* usado no papel de probabilidade.

Textos de apoio: Martz e Waller (1982, pp. 112–118); Paulino (1992, pp. 42–46).

5.2.4 Testes de ajustamento

Nesta subsecção serão recordados a título de exercício os testes de ajustamento de Kolmogorov-Smirnov e do qui-quadrado. São, em qualquer dos casos, procedimentos estatísticos que permitem avaliar se os dados são ou não consistentes com uma dada hipótese sobre o modelo gerador dos dados, modelo este que poderá ser uma distribuição específica (hipótese nula simples) ou uma família de distribuições (hipótese nula composta).

Exercício 5.14 — Retome o Exercício 5.13 e descreva, justificando e efectuando alguns cálculos ilustrativos, o procedimento que o biólogo deveria adoptar para testar a hipótese formulada: $T \sim$ exponencial (0.56). •

Exercício 5.15 — Retome agora o Exercício 5.11 e averigue a adequação da distribuição $Pareto(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$ onde $\hat{\lambda} = t_{(1)}$ e $\hat{\delta} = [\ln(m_g/t_{(1)})]^{-1}$ representam as estimativas de MV de λ e δ e $m_g = \left(\prod_{i=1}^{50} t_i\right)^{1/50} = 2.852$ a média geométrica da amostra. Para tal calcule estas mesmas estimativas e confirme que as frequências absolutas observadas resultantes do agrupamento dos dados em 5 classes equiprováveis sob a conjectura acima são: 12, 6, 13, 7 e 12.

•

Para uma discussão mais alongada acerca destes testes de ajustamento consulte-se Paulino (1992, pp. 46–56).

Texto de apoio: Paulino (1992, pp. 46–56).

5.3 Testes de vida e estimação de MV

Como se viu, os métodos de estimação assumem a existência de dados recolhidos naquilo que usualmente se designa de **teste de vida** ou ensaios.

Para o efeito e dependendo do objectivo de tal teste, uma amostra de n itens é posta em teste sob condições experimentais/ambientais específicas, procedendo-se ao registo dos tempos até falha.

Caso um item seja substituído quando falha por um outro item novo, diz-se que o **teste de vida** está a ser efectuado **com reposição**. Caso contrário, o **teste de vida** diz-se **sem reposição**.

Já tivemos oportunidade de referir que algumas situações experimentais conduzem a **dados incompletos**/censurados, aquando da ilustração da utilidade das estatísticas ordinais em fiabilidade no Capítulo 2. É sabido que tal censura pode ser feita ou ao fim de decorrido um tempo fixo t_0 — **Censura de Tipo I** (à direita) —, ou após o registo de um número fixo r de falhas — **Censura de Tipo II**.

Em qualquer destes testes de vida pode ocorrer a **retirada** (*withdrawal*) de um item antes de este sequer ter falhado, sendo somente registado o tempo de sobrevivência/presença da unidade no teste.

Refira-se ainda que, por forma a induzir falhas em equipamento muito fiável, são usados métodos de teste especiais denominados de **testes de vida acelerados** (*accelerated life tests*). Neste tipo de teste, as unidades são testados sob condições ambientais extremas, de longe mais severas que aquelas em que as unidades virão a funcionar na prática. São então usadas relações matemáticas (propostas ou

existentes) para extrapolar os resultados obtidos nos testes de vida acelerados para as condições ambientais usuais.

Definição 5.16 — Uma vez feitas estas considerações gerais sobre testes de vida, é de listar os 4 tipos de testes de vida mais usuais de acordo com Martz e Waller (1982, p. 119) e aqueles que irão ser considerados doravante:

1. **Teste de vida com reposição e censura do Tipo II** (*Type II/item-censored testing with replacement*) — O teste é concluído após a ocorrência de um número pré-especificado r de falhas e uma unidade que falhe é imediatamente substituída por uma outra nova no decurso do teste.
2. **Teste de vida sem reposição e com censura do Tipo II** (*Type II/item-censored testing without replacement*) — O teste é concluído após a ocorrência de um número pré-especificado r de falhas e as unidades não são substituídas quando falham.
3. **Teste de vida com reposição e censura do Tipo I** (*Type I/item-censored testing with replacement*) — O teste é concluído após decorrido um tempo pré-especificado t_0 e uma unidade que falhe é imediatamente substituída por uma outra nova no decurso do teste.
4. **Teste de vida sem reposição e com censura do Tipo I** (*Type I/item-censored testing without replacement*) — O teste é concluído após decorrido um tempo pré-especificado t_0 e as unidades não são substituídas quando falham. •

No planeamento do teste é importante ter presente que a qualidade das estimativas depende do número de unidades em teste, do número

pré-especificado de falhas r até à conclusão do teste de vida (ou da duração fixa do mesmo t_0). Quanto mais unidades forem colocadas em teste, mais rapidamente se registará r falhas; contudo, é preciso arranjar uma solução de compromisso entre as vantagens económicas de um teste com pequena duração e as desvantagens económicas de ter muitas unidades em teste. O problema da optimização subjacente à escolha de r e n será discutido mais adiante.

Definição 5.17 — Sejam $T_{(1)}, \dots, T_{(n)}$ as estatísticas ordinais e \mathcal{T} o **tempo total acumulado em teste** pelas n unidades em teste incluindo aquelas que falharam durante o teste e aquelas que não falharam antes da conclusão do mesmo. Então tem-se para os 4 tipos de testes de vida:

1. **Teste de vida com reposição e censura do Tipo II**

$$\mathcal{T} = nT_{(r)}, \text{ onde } r \text{ é uma constante fixa à partida e } T_{(r)} \text{ uma v.a.};$$

2. **Teste de vida sem reposição e com censura do Tipo II**

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \sum_{i=1}^r T_{(i)} + (n-r)T_{(r)} \\ &= nT_{(1)} + (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}) + \dots + (n-r+1)(T_{(r)} - T_{(r-1)}), \quad r \leq n, \end{aligned}$$

onde r é uma constante fixa à partida e $T_{(r)}$ uma v.a.;

3. **Teste de vida com reposição e censura do Tipo I**

$$\mathcal{T} = nt_0, \text{ onde } t_0 \text{ é a duração fixa à partida para o teste de vida e } R \text{ é a v.a. que representa o número de falhas ocorridas nesse intervalo de tempo;}$$

4. **Teste de vida sem reposição e com censura do Tipo I**

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^R T_{(i)} + (n-R)t_0, \quad R \leq n, \text{ onde } t_0 \text{ é a duração fixa à partida para o teste de vida e } R \text{ é, mais uma vez, a v.a. que}$$

representa o número de falhas ocorridas nesse mesmo intervalo de tempo. •

Nota 5.18 — Nos casos 1. e 3., n representa o número de locais disponíveis para efectuação dos testes de vida e r e R podem exceder n uma vez que há reposição/substituição das unidades que falham.

No caso 3. e com $T_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exponencial}(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$, tem-se $R \sim \text{Poisson}(n\lambda t_0)$. Ao adoptar teste de vida sem reposição e com censura do Tipo I (caso 4.), tem-se $R \sim \text{Binomial}(n, F(t_0))$, caso $T_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} F$, $i = 1, \dots, n$. •

No Capítulo 2 constatou-se que o **método da MV**⁹ facilmente se adaptava aos tipos de censura I e II (sem substituição por falha das unidades no decurso do teste), permitindo a estimação de parâmetros à custa de dados censurados nas situações 2. e 4. da Definição 5.16. Na altura foram ainda adiantadas expressões para a função de verosimilhança nestes dois casos.

A seguir encontram-se as funções de verosimilhança para as situações 2. e 4. da referida definição, considerando-se para tal que $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ é o vector de parâmetros desconhecidos que se pretende estimar, que $t_{i:n} = t_{(i)}$ e que $\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ é a respectiva estimativa de MV.

Teorema 5.19 — Sejam $L(\underline{\theta})$ a função de verosimilhança e $F_{\underline{\theta}}(t)$ ($R_{\underline{\theta}}(t)$) a função de distribuição (fiabilidade) da duração de vida das n unidades. Então a função de verosimilhança toma as seguintes expressões dependendo do tipo de ensaio efectuado:

2. Teste de vida sem reposição e censura do Tipo II

⁹O método da MV foi introduzido por R. Fisher numa série de trabalhos, o primeiro dos quais publicado em 1912.

$$L(\underline{\theta}) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f_{\underline{\theta}}(t_{i:n}) \right] \times [R_{\underline{\theta}}(t_{r:n})]^{n-r}, \quad (5.13)$$

para $-\infty < t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < \infty$ e $r = 1, \dots, n$;

4. Teste de vida sem reposição e censura do Tipo I

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}) &= h_{\underline{\theta}}(t_{1:n}, \dots, t_{r:n} \mid R=r) \times P_{\underline{\theta}}(R=r) \\ &= r! \prod_{i=1}^r \left[\frac{f_{\underline{\theta}}(t_{i:n})}{F_{\underline{\theta}}(t_0)} \right] \times \binom{n}{r} [F_{\underline{\theta}}(t_0)]^r [R_{\underline{\theta}}(t_0)]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f_{\underline{\theta}}(t_{i:n}) \right] [R_{\underline{\theta}}(t_0)]^{n-r}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

para $-\infty < t_{1:n} < \dots < t_{r:n} < t_0 < \infty$ e $r = 1, \dots, n$. •

A razão pela qual não foram adiantadas expressões para a função de verosimilhança em testes de vida com substituição (situações 1. e 3.) prende-se com a dificuldade em obter expressões genéricas para **as funções de verosimilhança associadas a** tais testes. Refira-se, no entanto, que elas são relativamente simples para populações *exponenciais*, como poderemos constatar na secção seguinte.

Os estimadores de MV obtidos à custa destas funções de verosimilhança possuem boas propriedades, senão melhores que as dos estimadores obtidos por outros métodos de estimação.

Para nos debruçarmos brevemente sobre algumas dessas propriedades importa considerar que $\hat{\Theta}_j(n)$ representa o estimador de MV de θ_j , $j = 1, \dots, k$, obtido com base em amostra aleatória de dimensão n e definir a seguinte matriz.

Definição 5.20 — A matriz de informação de Fisher é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\underline{\theta}, n) &= [I_{ij}(\underline{\theta}, n)]_{i,j=1,\dots,k} \\ &= \left[E \left(-\frac{\partial^2 \ln L(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \right]_{i,j=1,\dots,k}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde $\ln L(\underline{\theta})$ depende de n e deve ser encarado como se de uma v.a. se tratasse, i.e., as observações que figuram na sua expressão usual devem ser substituídas pelas respectivas v.a. •

Nota 5.21 — Sob certas condições de regularidade os estimadores de MV verificam entre outras propriedades as duas seguintes:

- $\hat{\Theta}_j(n)$ é estimador consistente de θ_j e
- o estimador de MV devidamente reduzido, $\frac{\hat{\Theta}_j(n) - \theta_j}{\sqrt{[\mathbf{I}^{-1}(\underline{\theta})]_{jj}}}$ (onde $[\mathbf{I}^{-1}(\underline{\theta})]_{jj}$ representa a j -ésima entrada da diagonal da inversa da matriz de informação de Fisher) possui distribuição assintótica normal padrão. •

É à custa deste último resultado que se pode adiantar intervalos de confiança e construir testes de hipóteses (em qualquer dos casos assintóticos) para os parâmetros desconhecidos.

Para mais generalidades e alguns detalhes acerca deste tipo de inferência no domínio da fiabilidade consulte-se Gertsbakh (1989, pp. 186–193).

Textos de apoio: Gertsbakh (1989, pp. 179–194); Martz e Waller (1982, pp. 118–120).

5.4 Inferências sobre o modelo exponencial

Como foi referido anteriormente, o modelo *exponencial* é sem sombra de dúvida o mais frequentemente considerado em testes de vida. Não é raro constatar que a sua aplicação prática se deve sobretudo à simplicidade do modelo (e das inferências sobre o mesmo) e não à sua adequação aos dados.

Pretende-se, essencialmente, nesta secção, adiantar procedimentos que permitam inferir — com certa precisão e evitando ultrapassar sempre que possível certo custo fixo — algumas características de fiabilidade de um tempo até falha com distribuição pertencente ao modelo *exponencial* uni-paramétrico, i.e., com a seguinte f.d.p.

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (5.16)$$

Com efeito procurar-se-á, de um modo geral, obter estimadores centrados de variância uniformemente mínima (*UMVUE*),¹⁰ bem como intervalos de confiança (ou testes de hipóteses) para:

- $E(T) = \lambda^{-1}$, o valor esperado do tempo até falha (ou, equivalentemente, para a sua função taxa de falha, $\lambda_T(t) = \lambda, t \geq 0$);
- $R_T(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$, a função de fiabilidade; ou ainda,
- $F_T^{-1}(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$, o quantil de probabilidade p , também designado de **reliable life** na literatura anglo-saxónica versando fiabilidade.

Textos de apoio: Gomes e Barão (1999, pp. 164–175); Martz e Waller (1982, pp. 120–129); Kapur e Lamberson (1977, pp. 233–290).

¹⁰ *Uniformly minimum variance unbiased estimator.*

5.4.1 Validação do modelo exponencial

Antes de nos debruçarmos sobre as inferências sobre o modelo *exponencial* propriamente ditas, descreveremos um teste de hipóteses que, a par dos testes de ajustamento de Kolmogorov–Smirnov e do qui-quadrado, permitirá averiguar o adequação de um modelo com taxa de falha constante, i.e., *exponencial*: o **teste de ajustamento de Bartlett** que se baseia numa razão de verosimilhanças.

Embora não se trate do mais comum dos testes para avaliar a adequação do modelo *exponencial* é, de acordo com alguns autores, o mais potente na avaliação da adequação deste modelo.

Considere-se que $T_{(1)}, \dots, T_{(r)}, \dots, T_{(n)}$ representam as estatísticas ordinais e r o número de falhas que determinam o instante de conclusão do teste de vida (com qualquer dos dois tipos de censura).

O procedimento geral deste teste compreende os seguintes passos que nos escusamos a comentar em grande detalhe:

- **Hipóteses** — $H_0 : T \sim \text{exponencial}$ vs. $H_1 : T \sim \text{Weibull}(\delta, \alpha)$, $\alpha \neq 1$.¹¹
- **Nível de significância** — α_0 .
- **Estatística de teste** — Esta estatística será doravante representada por B_r e depende do tipo de teste de vida com que estejamos a lidar. Ao lidar-se com **dados completos**

$$B_r = \frac{2r}{1 + \frac{r+1}{6r}} \left\{ \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^r T_{(i)}}{r} \right) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln[T_{(i)}] \right\} \underset{H_0}{\sim} \chi_{(r-1)}^2 \quad (5.17)$$

onde $r = n$ e $T_{(i)}$ representa o instante da i -ésima falha.

Ao lidar-se com **teste de vida com censura do Tipo II sem reposição** tem-se

$$B_r = \frac{2r}{1 + \frac{r+1}{6r}} \left(\ln \left(\frac{\mathcal{T}}{r} \right) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln \{ (n - i + 1) [T_{(i)} - T_{(i-1)}] \} \right) \underset{H_0}{\sim} \chi_{(r-1)}^2 \quad (5.18)$$

onde $T_{(i)} - T_{(i-1)}$ representa o tempo entre a $(i - 1)$ - e i -ésima falhas.

Tratando-se de **teste de vida com censura do Tipo I com reposição** tem-se

$$B_r = \frac{2r}{1 + \frac{r+1}{6r}} \left\{ \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^r Z_i}{r} \right) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln(Z_i) \right\} \underset{H_0}{\sim} \chi_{(r-1)}^2 \quad (5.19)$$

onde os Z_i 's representam os tempos entre falhas.¹²

- **Região de rejeição de H_0** — $W = \left(0, F_{\chi_{(r-1)}^2}^{-1}(\alpha_0/2) \right) \cup \left(F_{\chi_{(r-1)}^2}^{-1}(1 - \alpha_0/2), +\infty \right)$
- **Decisão** — Seja b_r o valor observado da estatística de teste. Então:
 - se $b_r \in W$ devemos rejeitar H_0 (hipótese de exponencialidade) para qualquer nível de significância $\alpha \geq \alpha_0$;

¹¹A leitura de Kapur e Lamberson (1977, p. 240) leva a crer que seja esta a hipótese alternativa.

¹²Kapur e Lamberson (1977, pp. 239–247) apresentam somente estas duas estatísticas de teste ao longo dos exemplos apresentados com dados censurados.

– caso contrário, não devemos rejeitar H_0 para nenhum nível de significância $\alpha \leq \alpha_0$.

O teste de Bartlett será aplicado de seguida a situações representativas do que se pode encontrar na prática.

Exercício 5.22 — Os dados na Tabela 5.7 dizem respeito ao número de horas até falha de 20 termóstatos sujeitos a testes de vida acelerados por aplicação de sobrecarga voltaica (Kapur e Lamberson, 1977, p. 240).

Tabela 5.7: Horas até falha de 20 termóstatos

No. de horas até falha			
100	7120	24110	36860
340	12910	28570	38540
1940	13670	31620	42110
5670	19490	32800	43970
6010	23700	34910	64730
Tempo total em teste			469170

Averigúe a adequação do modelo *exponencial* a este conjunto de dados, considerando para o efeito um nível de significância de 10%. •

Exercício 5.23 — Os instantes de falha e os tempos entre falhas de travões consecutivos de um camião de meia tonelada sujeito a 245 horas de vibração encontram-se na Tabela 5.8.

Após ter identificado o tipo de teste de vida, examine este conjunto de dados e averigüe se estes tempos entre falhas podem ser exponencialmente distribuídos (Kapur e Lamberson, 1977, pp. 239–240). •

Tabela 5.8: Instantes de falha e os tempos entre falhas consecutivas de camião.

Instantes de falha				Tempos entre falhas			
21.2	74.7	108.6	157.4	21.2	0.1	15.3	5.8
47.9	76.8	112.9	164.7	26.7	2.1	4.3	7.3
59.2	84.3	127.0	196.8	11.3	7.5	14.1	32.1
62.0	91.0	143.9	214.4	2.8	6.7	16.9	17.6
74.6	93.3	151.6	218.9	12.6	2.3	7.7	4.5

Exercício 5.24 — A Tabela 5.9 contém um conjunto de dados resultante de um teste de vida com características distintas à do Exercício 5.22. Foram usados neste teste de vida 9 locais. Em cada um deles foi colocado um termóstato que era imediatamente substituído por outro novo assim que falhasse. Cada um dos locais de teste esteve em observação durante 20000 horas.

Tabela 5.9: Dados referentes a nove locais de teste de termóstatos.

Local	Instantes de falha	Tempos entre falhas
1	6700	6700
2	4600	4600
3	4100, 18100, 18950	4100, 14000, 850
4	5400	5400
5	3100, 8100	3100, 5000
6	2600	2600
7	Sem registo de falha	—
8	4700	4700
9	Sem registo de falha	—

Identifique o teste de vida descrito e averigüe quão razoável é o modelo *exponencial* para este conjunto de dados (Kapur e Lamberson, 1977, pp. 241–242), **ao nível de significância de 10%**. •

Texto de apoio: Kapur e Lamberson (1977, pp. 239–247).

5.4.2 Amostra completa

Começar-se-á por considerar a situação mais simples, aquela que envolve dados completos, passando depois para inferências sobre o modelo *exponencial* nas 4 situações consideradas em que há censura.

O **estimador de MV** de λ é, para o caso em que lidamos com a amostra completa, igual ao recíproco da média da amostra aleatória

$$\hat{\Lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n T_i} = \bar{T}^{-1}. \quad (5.20)$$

Deste modo, invocando a propriedade de invariância dos estimadores de MV, obtemos as estimativas de MV da Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Algumas estimativas de MV.

Parâmetro	Estimativa MV
$E(T) = \lambda^{-1}$	$\hat{E}(T) = \hat{\lambda}^{-1}$
$R_T(t) = e^{-\lambda t}$	$\hat{R}_T(t) = e^{-\hat{\lambda} t}$
$F_T^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-p)$	$\hat{F}_T^{-1}(p) = -\frac{1}{\hat{\lambda}} \ln(1-p)$

Mais adiantamos que $\hat{\Lambda}^{-1} = \bar{T}$ é um estimador **UMVUE** para $E(T)$ e que $\sum_{i=1}^n T_i$ (e naturalmente $\hat{\Lambda}$) é uma **estatística suficiente**¹³ para λ .

Exercício 5.25 — Prove que $\hat{R}_T(t) = e^{-\hat{\lambda} t}$ não é um estimador centrado de $R_T(t)$, i.e., $E[\hat{R}_T(t)] \neq R_T(t) (= e^{-\lambda t})$. •

Pelo facto de o estimador de MV não ser um estimador centrado da função de fiabilidade é costume recorrer a um estimador alternativo

¹³I.e., contém toda a informação relevante para a estimação de λ .

$UMVUE$ ¹⁴ definido do seguinte modo:

$$\tilde{R}_T(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\hat{\lambda} t}{n}\right)^{n-1}, & t < n\hat{\Lambda}^{-1} = \sum_{i=1}^n T_i \\ 0, & t \geq n\hat{\Lambda}^{-1}. \end{cases} \quad (5.21)$$

Refira-se, por fim, que a **v.a. fulcral** a utilizar por forma a obter um intervalo de confiança para λ (ou a obter uma estatística de teste para λ) é $2n\lambda/\hat{\Lambda} = 2\lambda \sum_{i=1}^n T_i \sim \chi_{(2n)}^2$.

Exercício 5.26 — Retome os dados do Exercício 5.22 que se reportam ao número de horas até falha de 20 termóstatos sujeitos a testes de vida acelerados.

a) Obtenha uma estimativa pontual centrada bem como um intervalo de confiança equilibrado a $(1 - \alpha) \times 100\% = 95\%$ para a fiabilidade para um período de 30000 horas, $R_T(30000)$.

Sugestão: Para obter este intervalo de confiança tire partido de a função de fiabilidade ser uma função monótona decrescente de λ e utilize os quantis de probabilidade $\alpha/2$ e $(1 - \alpha/2)$.

b) A quantas horas se estima que metade dos termóstatos serão capazes de resistir/sobreviver? Adiante uma estimativa pontual e outra intervalar para tal número, i.e., para $F_T^{-1}(0.50)$. •

Textos de apoio: Bain (1978, pp. 121–134); Gomes e Barão (1999, pp. 164–175); Martz e Waller (1982, pp. 120–123).

¹⁴Este estimador é, por sinal, obtido por aplicação do Teorema de Rao-Blackwell (Bain, 1978, p. 124). A dedução deste estimador pode encontrar-se em Gomes e Barão (1999, pp. 166–167).

5.4.3 Testes de vida com censura

O tempo total acumulado em teste \mathcal{T} (e R , o número de falhas ocorridas em $(0, t_0]$) desempenha(m) um papel preponderante na estimação de λ ao lidar-se com o modelo *exponencial* e situações de censura.

Para já, as expressões do **estimador de MV** de λ para os 4 casos encontram-se nas Tabelas 5.11 e 5.13, onde, recorde-se, \mathcal{T} se define para os 4 tipos de teste de vida com censura de acordo com a Tabela 5.12. Mais, r é uma constante fixa à partida e $T_{(r)}$ uma v.a., em testes de vida com censura do Tipo II; t_0 é a duração fixa à partida e R representa o número de falhas ocorridas em $(0, t_0]$, para testes de vida com censura do Tipo I.

Tabela 5.11: Estimadores de MV para λ — dados censurados.

Censura	Estimador de MV ($\hat{\Lambda}$)
1./2. Tipo II com/sem reposição	$\frac{r}{\mathcal{T}}$
3./4. Tipo I com/sem reposição	$\frac{R}{\mathcal{T}}, R > 0$

Tabela 5.12: Tempos totais acumulados em teste — dados censurados.

Censura	Tempo total acumulado em teste (\mathcal{T})
1. Tipo II com reposição	$nT_{(r)}$
2. Tipo II sem reposição	$\sum_{i=1}^r T_{(i)} + (n-r)T_{(r)}, r \leq n$
3. Tipo I com reposição	nt_0
4. Tipo I sem reposição	$\sum_{i=1}^R T_{(i)} + (n-R)t_0, R \leq n$

Exercício 5.27 — Escreva as funções de verosimilhança para testes de vida com censura do Tipo I (situações 3. e 4.), distinguindo os casos em que $R = 0$ e $R > 0$. •

Importante — Na verdade, para testes de vida com **censura do Tipo I**, por termos duas expressões para a função de verosimilhança nas situações 3. e 4., o estimador de MV de λ só é igual a $\frac{R}{\mathcal{T}}$ para $R > 0$. Assim, lidaremos com os estimadores de MV da Tabela 5.13. **Importa notar que, de acordo com Gomes e Barão (1999, pp. 172–173), no caso 4. com $R = 0$ não se está a lidar com o estimador de MV de λ mas sim com uma proposta de estimador que se deve a Bartholomew (1957).**

Tabela 5.13: Estimadores de MV para λ — dados censurados.

Censura	Estimador de MV de λ ($\hat{\Lambda}$)
1./2. Tipo II com/sem reposição	$\frac{r}{\mathcal{T}}$
3. Tipo I com reposição	$\begin{cases} 0, R = 0 \\ \frac{R}{\mathcal{T}}, R > 0 \end{cases}$
4. Tipo I sem reposição	$\begin{cases} 1/\mathcal{T}, R = 0 \\ R/\mathcal{T}, R = 1, \dots, n \end{cases}$

Invocando mais uma vez a propriedade de invariância dos estimadores de MV, os estimadores de MV de $E(T)$, $R_T(t)$ e $F_T^{-1}(p)$ obtêm-se substituindo $\hat{\lambda}$ nas expressões da Tabela 5.10 por $\hat{\Lambda} = \frac{r}{\mathcal{T}}$ (resp. $\frac{R}{\mathcal{T}}, R > 0$), ao lidar-se com **censura do tipo II (resp. II) com/sem reposição**.

Quanto à existência de **estimadores UMVUE** para $E(T)$ e $R_T(t)$, a Tabela 5.14 deixa bem claro que modificações ligeiras nos testes de vida podem gerar dificuldades na obtenção de estimadores deste tipo para esse par de parâmetros.

Por outro lado, a Tabela 5.15 resume as **estatísticas** que, isolada ou conjuntamente, são **suficientes** para o modelo/ parâmetro na

Tabela 5.14: Estimadores *UMVUE* de $E(T)$ e $R_T(t)$ — dados censurados.

Censura	Estimador <i>UMVUE</i> de	
	$E(T)$	$R_T(t)$
1./2. Tipo II com/sem reposição	\mathcal{T}/r	$\tilde{R}_T(t) = \begin{cases} (1 - \mathcal{T}^{-1}t)^{r-1}, & t < \mathcal{T} \\ 0, & t \geq \mathcal{T} \end{cases}$
3. Tipo I com reposição	Não existe	$\tilde{R}_T(t) = (1 - \mathcal{T}^{-1}t)^R, t < \mathcal{T}, R > 0$
4. Tipo I sem reposição	Em aberto	Em aberto

presença de censura.

Tabela 5.15: Estatísticas suficientes para λ — dados censurados

Censura	Estatística suficiente
1./2. Tipo II com/sem reposição	\mathcal{T}
3. Tipo I com reposição	R
4. Tipo I sem reposição	(\mathcal{T}, R)

Por fim, adiantem-se expressões para os **intervalos de confiança** equilibrados a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para λ , $IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\lambda)$, **para alguns tipos de teste de vida**. Para tal, considere-se que o valor observado do tempo total acumulado em teste é representado por \tilde{t} .

Assinale-se que o intervalo de confiança para λ na situação 3. é aproximado e depende de quantis respeitantes a duas distribuições do qui-quadrado com número de graus de liberdade distintos.

Estes resultados prendem-se com o facto de a **v.a. fulcral** para λ depender naturalmente do tipo de teste de vida.

Por exemplo, é suposto lidar com a v.a. fulcral da Tabela 5.17, onde a expressão do estimador de MV (resp. tempo total acumulado em

Tabela 5.16: Intervalos de confiança para λ — dados censurados.

Censura	$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\lambda)$
1./2. Tipo II com/sem reposição	$\left[\frac{F_{\chi_{(2r)}^2}^{-1}(\alpha/2)}{2\tilde{t}}; \frac{F_{\chi_{(2r)}^2}^{-1}(1-\alpha/2)}{2\tilde{t}} \right]$
3. Tipo I com reposição	$\left[\frac{F_{\chi_{(2r)}^2}^{-1}(\alpha/2)}{2\tilde{t}}; \frac{F_{\chi_{(2r+2)}^2}^{-1}(1-\alpha/2)}{2\tilde{t}} \right]$

teste), $\hat{\Lambda}$ (resp. \mathcal{T}), depende do teste de vida efectuado com **censura do Tipo II**.

Tabela 5.17: V.a. fulcrais para λ — dados censurados.

Censura	V.a. fulcral para λ
1./2. II com/sem reposição	$\frac{2r\lambda}{\Lambda} = 2\lambda\mathcal{T} \sim \chi_{(2r)}^2$

Ao lidar-se com **censura do Tipo I com reposição**, vemo-nos confrontados com uma estatística suficiente com distribuição discreta

$$R \sim \text{Poisson}(n\lambda t_0), \quad (5.22)$$

cuja f.d. está relacionada do seguinte modo com a f.d. de uma v.a. do qui-quadrado:

$$\begin{aligned} P(R \leq r) &= F_{\text{Poisson}(nt_0\lambda)}(r) \\ &= 1 - F_{\chi_{(2(r+1))}^2}(2nt_0\lambda), \end{aligned} \quad (5.23)$$

para qualquer inteiro positivo r , donde

$$\begin{aligned} P(R \geq r) &= 1 - P(R \leq r - 1) \\ &= 1 - F_{\text{Poisson}(nt_0\lambda)}(r - 1) \\ &= F_{\chi_{(2r)}^2}(2nt_0\lambda). \end{aligned} \quad (5.24)$$

A natureza discreta de R não permite a obtenção de um intervalo com grau de confiança exactamente igual a $(1 - \alpha) \times 100\%$, a menos que se escolha em primeiro lugar um par de quantis de probabilidade da distribuição de R , r_L e r_U , e se averigue depois qual o grau de confiança do intervalo, i.e., se calcule a probabilidade $P(r_L \leq R \leq r_U)$.

De referir também que se pode tirar partido do facto de $E(T) = \lambda^{-1}$ ser uma função monótona decrescente de λ para obter intervalos de confiança (exactos ou aproximados) a partir daqueles que constam da Tabela 5.16.

Exercício 5.28 — Deduza $IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\lambda)$ para um teste de vida com censura do Tipo I com reposição (Bain, 1978, pp. 156–7). •

Exercício 5.29 — Num estudo foram registadas 50 falhas no ano de 1972 (8760 horas) num total de 5613 componentes utilizadas em reactores nucleares (Martz e Waller, 1982, p. 123).

Determine estimativas pontuais e intervalos de confiança equilibrados a 95% para: λ ; a fiabilidade para um período de 1 ano, i.e., $R_T(8760)$; e $F_T^{-1}(0.80)$. •

Textos de apoio: Bain (1978, pp. 136–142); Gomes e Barão (1999, pp. 167–171); Martz e Waller (1982, pp. 120–123).

5.4.4 Escolha da fracção a censurar e minimização de custos de amostragem

Suponha-se que se está a efectuar um teste de vida em que é conveniente dá-lo por concluído após a ocorrência de r falhas, i.e., o teste está associado a **censura do Tipo II** (já agora) **sem reposição**.

Para além disso, assuma-se que se pretende **seleccionar o número de unidades** a colocar em teste, n , por forma a verificar-se uma **redução específica na duração esperada do mesmo** ou de modo a que o **custo esperado do teste** seja minimizado.

É sobre estes dois problemas de optimização que nos debruçaremos já de seguida.

É sabido que o valor esperado do **duração do teste** com este tipo de censura é igual a $E(T_{r:n}) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{(n-i+1)\lambda}$. Por forma a eliminar a dependência de $E(T_{r:n})$ do parâmetro desconhecido λ é costume considerar o quociente entre a duração esperada do teste com censura do Tipo II sem reposição e o que se esperaria se $n = r$ (Bain, 1978, p. 139; Martz e Waller, 1982, p. 121)

$$\frac{E(T_{r:n})}{E(T_{r:r})} = \frac{\sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{r-i+1}}. \quad (5.25)$$

Alternativamente, pode considerar-se a redução relativa percentual na duração esperada do teste, tendo como referência a duração esperada do teste com censura do Tipo II sem reposição quando $n = r$:

$$\left[1 - \frac{E(T_{r:n})}{E(T_{r:r})} \right] \times 100\% = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{r-i+1}} \right) \times 100\%. \quad (5.26)$$

Exercício 5.30 — **Fracção a censurar e minimização de custos de amostragem**

- Obtenha o valor do quociente em (5.25), caso dispusse de 20 itens e decidisse terminar o teste ao fim de 8 falhas (Martz e Waller, 1982, p. 121).
- Construa uma tabela com os valores do quociente em (5.25), para $r = 10, 20, 30, 50, 100$ e $n/r = 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 2, 3$ (Bain, 1978, p. 139).

- c) Repita b), calculando desta feita a redução relativa percentual em (5.26). •

O custo associado a um teste de vida com censura do Tipo II sem reposição — envolvendo n unidades e conclusão à ocorrência da r -ésima falha — é dado pela equação

$$C(n, r) = c_1 \times T_{r:n} + c_2 \times n + c_3. \quad (5.27)$$

A constante c_1 representa o custo por unidade de tempo em teste. Por seu lado, c_2 poderá representar o custo por cada unidade em teste. Por último, c_3 representa o custo fixo de cada teste (por exemplo, o custo incorrido por se usar equipamento de teste) independentemente do número de unidades em teste e da duração do mesmo.

É possível determinar n à custa de r por forma a minimizar $E[C(n, r)]$. O valor recomendado por Bain (1978, p. 141) é

$$n = \left\lceil 0.5 r + 0.5 r \left(1 + \frac{4c_1}{c_2 r \lambda} \right)^{1/2} \right\rceil. \quad (5.28)$$

Ora, pelo facto de se desconhecer λ e de $V[\text{EMV}(\lambda^{-1})] = \frac{1}{r\lambda^2}$ deve considerar-se que r foi escolhido por forma a que o estimador de λ possuísse variância v e deste modo substituir-se λ por $(r \times v)^{-1/2}$, obtendo-se

$$n = \left\lceil 0.5 r + 0.5 r \left(1 + \frac{4c_1 \sqrt{r \times v}}{c_2 r} \right)^{1/2} \right\rceil. \quad (5.29)$$

Exercício 5.31 — Deduza a Equação (5.28).

Sugestão: Deve aumentar-se n até que $D(n, r) = E[C(n-1, r)] - E[C(n, r)]$ seja negativo, para r fixo. •

Exercício 5.32 — Prove que $V[\text{EMV}(\lambda^{-1})] = \frac{1}{r\lambda^2}$, tirando para o efeito partido das propriedades dos *spacings* de 1a. ordem. •

À laia de conclusão, refira-se que a estimação no modelo *Weibull* é substancialmente mais difícil que no modelo *exponencial* pois aquele não goza da propriedade chave que este último possui: a falta de memória. Para o efeito, remete-se o leitor para os seguintes textos de apoio: Bain (1978, pp. 205–301); Gertsbakh (1989, pp. 155–179); Kapur e Lamberson (1977, pp. 291–341).

Texto de apoio: Bain (1978, pp. 138–142).

Capítulo 6

Estratégias de manutenção

6.1 Introdução

Em muitas situações, a **falha** de uma componente/estrutura durante a sua fase de operação acarreta **custos elevados** ou pode mesmo ser **perigosa**, pelo que, se a componente/estrutura possuir taxa de falha crescente, parece razoável substituí-la antes que ela envelheça demasiado. A substituição é uma das muitas intervenções que se enquadra no domínio da manutenção.

Definição informal 6.1 — Manutenção

Pode ser entendida como o conjunto de **intervenções** num sistema para que este se mantenha ou volte a encontrar-se num estado específico de funcionamento. A manutenção subdivide-se em:

- **manutenção preventiva** (*preventive maintenance*) — efectuada em intervalos e de acordo com procedimentos pré-determinados por forma a reduzir, por exemplo, falhas por desgaste e a detectar e reparar *hidden failures* (i.e., falhas em “partes redundantes”)¹

¹As “partes redundantes”, quando implementadas, permitem que a reparação das mesmas seja efectuada enquanto o sistema está a operar e sem que seja necessária a interrupção da operação do mesmo.

de modo a aumentar a vida útil do sistema;

- **manutenção correctiva** (*corrective maintenance* ou *repair*) — desencadeada após a detecção de falha e com o objectivo de o sistema voltar a desempenhar as funções requeridas e compreende pelo menos um dos seguintes passos: localização, isolamento, desmontagem, substituição, montagem, alinhamento e verificação. •

As secções que se seguem debruçam-se, por exemplo, sobre a utilidade e o impacto de algumas noções de envelhecimento no contexto da manutenção nomeadamente no estabelecimento de limites para:

- probabilidades de eventos que dizem respeito ao número de falhas de equipamento num intervalo de tempo fixo;
- a função de renovamento;
- funções convexas crescentes do referido número de falhas.

Textos de apoio: Birolini (1999, p. 114 e pp. 117–122); Barlow e Proschan (1965/96, pp. 46–48).

6.2 Sobre o impacto das noções de envelhecimento em manutenção

Há famílias de distribuições que, pelas suas características de envelhecimento estocástico, são particularmente úteis em manutenção. São disso exemplo as distribuições *NBU* (*NWU*) e *NBUE* (*NWUE*) já definidas no Capítulo 3.

Estas quatro famílias surgem por sinal no contexto de modelos de choques (Barlow e Proschan, 1975, p. 91–92), descritos no exemplo seguinte (Barlow e Proschan, 1975, p. 160).

Exemplo 6.2 — Dispositivo sujeito a choques

Considere-se que um dispositivo é sujeito a choques ao longo do tempo de acordo com um processo de Poisson de taxa λ . Importa notar que o dispositivo poderá ou não vir a sobreviver à ocorrência de um choque. Com efeito, considere-se que \bar{P}_k representa a probabilidade de um dispositivo sobreviver à ocorrência do k -ésimo choque ($k \in \mathbb{N}_0$). Esta probabilidade pode ser entendida como $R_X(k) = P(X \geq k)$,² a função de fiabilidade da v.a. discreta X , que representa o número de choques ocorridos até que o dispositivo falhe definitivamente.³ E, como seria de esperar, estas probabilidades são decrescentes:

$$1 = R_X(0) \geq R_X(1) \geq \dots \quad (6.1)$$

Neste caso, a função de fiabilidade da duração T do dispositivo é dada por:

$$R_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_X(k) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad t \geq 0. \quad (6.2)$$

Importa notar que a duração de um dispositivo sujeito a choques preserva, em certos casos, o carácter de envelhecimento estocástico do número de choques ocorridos até à falha definitiva do dispositivo como se pode constatar no teorema seguinte.

²Barlow e Proschan (1975, p. 160) preferem representar a função de fiabilidade de X por \bar{P}_k , $k = 0, 1, \dots$

³Recorde-se que Barlow e Proschan (1975) definem do mesmo modo a função de fiabilidade de uma v.a. discreta. Veja-se também a Definição 3.35. Recorde-se também que o denominador da função taxa de falha de uma v.a. discreta é exactamente $R_Y(k) = P(Y \geq k)$.

Teorema 6.3 — Preservação do carácter de envelhecimento estocástico por dispositivo sujeito a choques

Sejam T a duração de um dispositivo sujeito a choques e X o número de choques ocorridos até à falha definitiva do mesmo. Então

$$X \in NBU (NWU) \Rightarrow T \in NBU (NWU). \quad (6.3)$$

Para além disso,

$$X \in NBUE (NWUE) \Rightarrow T \in NBUE (NWUE). \quad (6.4)$$

Uma vez enunciado este teorema convinha adiantar uma interpretação de um dos seus resultados:

- caso a probabilidade do dispositivo sobreviver à ocorrência de k choques adicionais, dado que já sobreviveu a l choques ($R_X(k+l)/R_X(l)$), for menor que a probabilidade de sobreviver a k choques ($R_X(k)$), i.e., $X \in NBU$ então a vida residual do dispositivo em qualquer instante t é estocasticamente menor no sentido usual que a vida do dispositivo ($R_{T_t}(x) \leq R_T(x)$, $-\infty < x < \infty$), pelo que é razoável efectuar substituições preventivas do dispositivo.

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 159–161).

6.3 Teoria do renovamento e manutenção

A teoria do renovamento quando conjugada com algumas noções de envelhecimento estocástico revela-se particularmente útil em manutenção como se terá ocasião de ver já de seguida.

Comece-se por recordar (informalmente) a noção de processo de renovamento e já agora alguns dos seus resultados básicos.

Um processo de renovamento é, grosso modo, caracterizado por uma sequência de v.a. não negativas $\{X_1, X_2, \dots\}$, i.i.d. à v.a. X com f.d. F . Estas v.a. representam os tempos entre ocorrências consecutivas, sejam elas eventos, falhas, etc. Mais, é costume representar o número de renovamentos/eventos/falhas no intervalo $[0, t]$, $t \geq 0$, por $N(t)$, e a colecção de v.a. $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de contagem usualmente designado de processo de renovamento.

Ao denotar por $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ o tempo até à ocorrência do n -ésimo renovamento, pode adiantar-se que $N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$, pelo que:

$$\begin{aligned} P[N(t) \geq n] &= P(S_n \leq t) \\ &= F^{(n)}(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$P[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t), \quad (6.6)$$

onde $F^{(n)}(t)$ representa a convolução de ordem n da distribuição sobre si própria.

A título de exemplo, caso $X \sim \text{exponencial}(\lambda)$, $\{N(t), t \geq 0\}$ diz-se um processo de Poisson de taxa λ e $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Note-se também que $S_n \sim \text{gama}(n, \lambda)$, pelo que

$$\begin{aligned} P[N(t) \geq n] &= P(S_n \leq t) \\ &= F^{(n)}(t) \\ &= 1 - F_{\text{Poisson}(\lambda t)}(n-1). \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.3.1 Limites para a convolução

Dado que a convolução $F^{(n)}(t)$ só se pode obter por via numérica, salvo em raríssimas excepções como aquela acabada de ver, é fundamental adiantar limites para probabilidades de eventos que digam respeito ao número de falhas $N(t)$ e para o fazer será necessário saber de antemão o comportamento monótono da função taxa de falha de X como se poderá ver no teorema seguinte.

Teorema 6.4 — Limite superior para a convolução de v.a. IHR

Considere que o tempo entre ocorrências sucessivas são v.a. i.i.d. com função taxa de falha crescente ($X \in IHR$) e valor esperado $E(X) = \mu$. Então, tirando partido do facto de

$$X \in IHR \Rightarrow R_X(t) \geq e^{-t/\mu}, \quad 0 \leq t < \mu, \quad (6.8)$$

conclui-se que, para $n \in N_0$,

$$\begin{aligned} P[N(t) \geq n] &\leq \sum_{j=n}^{\infty} e^{-t/\mu} \frac{(t/\mu)^j}{j!} \\ &= R_{\text{Poisson}(t/\mu)}(n), \quad 0 \leq t < \mu. \end{aligned} \quad (6.9)$$

•

O Teorema 6.4 prova-se sem grande dificuldade a partir do resultado (6.8) uma vez que este permite-nos concluir que um tempo entre renovamentos IHR é tendencialmente maior que o tempo entre ocorrências de um processo de Poisson no intervalo $[0, \mu)$, donde se conclua que o número de renovamentos no intervalo $[0, t]$ é tendencialmente menor que o número de ocorrências do processo de Poisson no referido intervalo.

Este teorema permite ainda afirmar que, caso os tempos entre falhas sucessivas das componentes sejam i.i.d., com valor esperado μ e taxa de falha crescente, a função de fiabilidade da v.a. de Poisson(t/μ) sobrestima a verdadeira probabilidade de ocorrerem pelo menos n falhas no intervalo $[0, t]$, desde que t seja inferior à duração esperada das componentes.

Importa notar que o limite (6.9) não é válido para alguns tempos entre falhas NBU , nem para $t \geq \mu$. Posto isto, é crucial estabelecer limites para $P[N(t) \geq n]$ nestas situações.

Teorema 6.5 — Limites para a convolução de v.a. NBU (NWU) e IHR (DHR)

Seja X uma v.a. contínua com f.d. $F(t)$ tal que $F(0) = 0$ e função de fiabilidade $R(t) = 1 - F(t)$. Considere-se ainda a função $G(t) = -\ln[R(t)]$.

Se $X \in NBU$ (NWU) então, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P[N(t) \geq n] &\leq (\geq) \sum_{j=n}^{\infty} e^{-G(t)} \frac{[G(t)]^j}{j!} \\ &= R_{Poisson(G(t))}(n), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Pode também afirmar-se que, caso $X \in IHR$ (DHR), se tem, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P[N(t) \geq n] &\geq (\leq) \sum_{j=n}^{\infty} e^{-nG(t/n)} \frac{[nG(t/n)]^j}{j!} \\ &= R_{Poisson(nG(t/n))}(n), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

•

Nota 6.6 — Limite superior para a convolução de v.a. IHR

Se tirarmos partido novamente do resultado (6.8) da desigualdade (6.10) e do facto de $X \in IHR \Rightarrow X \in NBU$, rapidamente concluímos que

$$\sum_{j=n}^{\infty} e^{-G(t)} \frac{[G(t)]^j}{j!} \leq R_{Poisson(t/\mu)}(n), \quad 0 \leq t < \mu. \quad (6.12)$$

Assim, o limite superior em (6.10) vem melhorar o limite superior estabelecido em (6.9).

•

Exercício 6.7 — Utilize o Teorema 6.5 para obter limites para $P[N(t) \leq n]$ e $P[N(t) \geq n]$ onde $N(t)$ é o número de falhas em $[0, t]$ associado a tempos com distribuição Weibull(λ^{-1}, α), onde $\lambda > 0$ e $\alpha > 1$.⁴

•

Exemplo 6.8 — Limite superior para a convolução de v.a. IHR e obtenção do número de peças sobressalentes (Barlow e Proschan, 1975, pp. 164–166)

Os pneus de uma aeronave têm maior tendência a falhar quando esta levanta vôo ou durante a aterragem que em qualquer outra altura. Assim sendo, é razoável que a f.f. do tempo entre falhas consecutivas de um pneu seja uma função em escada com pontos de descontinuidade que distam de h unidades de tempo, onde h representa o tempo entre (inícios de) vôos X . Uma possibilidade seria

$$R_X(t) = e^{-\alpha \lceil t/h \rceil}, \quad t \geq 0, \quad (6.13)$$

onde $\alpha > 0$ e $\lceil t/h \rceil$ representa a parte inteira do quociente t/h . Por sinal a v.a. assim definida é NBU (embora não seja nem IHR , nem

⁴Escusado será dizer que estes limites são bastante convenientes já que se desconhece uma fórmula fechada para a f.d. da soma de v.a. de Weibull.

IHRA) o que é, aliás, razoável dado que um pneu novo é seguramente preferível a um pneu usado.

Tendo em conta o carácter de envelhecimento estocástico de X e o Teorema 6.5, pode concluir-se que a probabilidade de o número de falhas do pneu i não exceder n , no intervalo $[0, t]$, satisfaz

$$\begin{aligned} P[N_i(t) \leq n] &\geq \sum_{j=0}^n e^{-\lfloor t/h \rfloor} \frac{(\lfloor t/h \rfloor)^j}{j!} \\ &= F_{Poisson(\lfloor t/h \rfloor)}(n), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Admita-se agora que a duração dos vôos é de $h = 2$ horas, que os 8 pneus da aeronave funcionam de modo independente e que qualquer deles possui f.f.

$$R_X(t) = e^{-0.002\lfloor t/2 \rfloor}, \quad t \geq 0, \quad (6.15)$$

associada a um tempo esperado entre falhas igual a

$$E(X) = \int_0^{+\infty} R_X(t) dt = \frac{2}{1 - e^{-0.002}}. \quad (6.16)$$

A questão que se coloca agora é a seguinte:

- quantos pneus sobressalentes deve dispor-se de forma a assegurar que a probabilidade de não haver falhas de pneus durante um período de operação de $t = 200$ horas seja maior ou igual a 0.95?

Ora, se se considerar que $N_i(200)$ representa o número de falhas do pneu i no intervalo $[0, 200]$, para $i = 1, \dots, 8$, e que

$$M_i(200) \sim_{iid} \text{Poisson}(0.002 \times \lfloor 200/2 \rfloor = 0.2), \quad i = 1, \dots, 8, \quad (6.17)$$

(6.14) pode reescrever-se do seguinte modo, para $i = 1, \dots, 8$:

$$P[N_i(200) \geq n] \leq R_{Poisson(0.2)}(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (6.18)$$

ou, equivalentemente, $N_i(200) \leq_{st} M_i(200)$.

Invocando agora o facto de a relação de ordem estocástica \leq_{st} ser fechada para somas de um número fixo de parcelas, o número total de falhas dos 8 pneus num período de operação de 200 horas, $N(200) = \sum_{i=1}^8 N_i(200)$, satisfaz

$$N(200) \leq_{st} \sum_{i=1}^8 M_i(200) \sim \text{Poisson}(8 \times 0.2 = 1.6), \quad (6.19)$$

ou seja,

$$P[N(200) \leq n] \geq F_{Poisson(1.6)}(n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.20)$$

Por fim, ao consultar-se as tabelas da f.d. da Poisson, pode afirmar-se que, para $n = 4$, se tem $F_{Poisson(1.6)}(4) = 0.970 \geq 0.95$. Assim, 4 pneus sobressalentes são suficientes para assegurar que a probabilidade de não haver falhas de pneus durante 200 horas de operação seja maior ou igual a 0.95. •

Exercício 6.9 — Um sistema em série possui três componentes (1, 2 e 3), cujas durações distribuem-se exponencialmente com taxas $\lambda_1 = 0.001$, $\lambda_2 = 0.002$ e $\lambda_3 = 0.0015$. Para além disso, numa missão em que se utiliza este sistema, requer-se que a primeira, a segunda e a terceira componentes operem durante 3000, 5000 e 1000 horas, respectivamente.

Determine o número de componentes sobressalentes dos tipos 1, 2 e 3 de modo a garantir que estas componentes sejam suficientes com probabilidade não inferior a 0.95 para a missão em questão (Barlow e Proschan, 1975, p. 176). •

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 161–166).

6.3.2 Limites para a função de renovamento

É altura de adiantar limites para a função de renovamento.

Comece-se por notar que

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P[N(t) \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) \quad (6.21)$$

e recordar que, de acordo com o Teorema Elementar do Renovamento,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \quad (6.22)$$

onde μ representa o valor esperado do tempo entre renovamentos.

Relembre-se também que, caso a v.a. X não seja periódica⁵ e possua valor esperado μ , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [M(t+h) - M(t)] = \frac{h}{\mu}, \quad (6.23)$$

de acordo com o Teorema de Blackwell.

Por fim, recorde-se que $A(t) = t - S_{N(t)}$ e $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$ representam a idade e a vida residual de um processo de renovamento no instante t , respectivamente.

Estamos pois em condições de tirar partido de algumas noções de envelhecimento estocástico para estabelecer limites para a função de renovamento.

Lema 6.10 — Limite superior para a f.f. da vida residual no instante t

Considere-se processo de renovamento caracterizado por $\{X_1, X_2, \dots\}$, onde $X_i \sim_{iid} X$ e X uma v.a. com f.f. $R_X(t)$. Então

$$X \in NBU \text{ (NWU)} \Rightarrow P[Y(t) > u] \leq (\geq) R_X(u), \quad u \geq 0. \quad (6.24)$$

⁵A v.a. diz-se periódica se existir uma constante positiva h tal que $P(X = nh, n \in N_0) = 1$.

Ou por outra, a vida residual, em qualquer instante t , é estocasticamente menor (resp. maior) no sentido usual que o tempo entre renovamentos, caso esta v.a. seja NBU (resp. NWU). •

O teorema que se segue permite concluir que a função de renovamento é superaditiva (resp. subaditiva) ao lidar-se com tempos entre renovamentos NBU (resp. NWU).⁶

Teorema 6.11 — Superaditividade (subaditividade) da função de renovamento

Considerem-se tempos entre renovamentos $X_i \sim_{iid} X$. Então

$$X \in NBU \text{ (NWU)} \Rightarrow M(h) \leq (\geq) M(t+h) - M(t). \quad (6.25)$$

O próximo teorema estabelece limites para a função de renovamento, limites estes particularmente úteis já que, à semelhança da convolução, a função de renovamento é de difícil cálculo.

Teorema 6.12 — Limites para a função de renovamento

Considerem-se tempos entre renovamentos $X_i \sim_{iid} X$. Então

$$E(X) = \mu < +\infty \Rightarrow M(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1, \quad t \geq 0; \quad (6.26)$$

$$X \in NBUE \text{ (NWUE)} \Rightarrow M(t) \leq (\geq) \frac{t}{\mu}, \quad t \geq 0. \quad (6.27)$$

Ao conjugar-se os dois resultados do Teorema 6.12 pode enquadrar-se a função de renovamento sob certas condições. Com efeito, para $t \geq 0$,

$$X \in NBUE, \quad E(X) = \mu < +\infty \Rightarrow \frac{t}{\mu} - 1 \leq M(t) \leq \frac{t}{\mu}, \quad (6.28)$$

⁶A função $f(x)$ diz-se superaditiva (resp. subaditiva) se $f(x+y) \geq (\leq) f(x) + f(y)$.

pelo que, neste caso, podemos adiantar a estimativa $(t/\mu - 1/2)$ para a função de renovamento, bem como afirmar que o erro associado a esta estimativa não excede $1/2$ (uniformemente).

Teorema 6.13 — Outros limites para a função de renovamento

Suponha que os tempos entre renovamentos possuem f.d. $F_X(x)$ e f.f. $R_X(x)$. Então

$$X \in IHR \Rightarrow \frac{t}{\int_0^t R_X(x)dx} - 1 \leq M(t) \leq \frac{tF_X(t)}{\int_0^t R_X(x)dx}. \quad (6.29)$$

•

Exercício 6.14 — Estime o número esperado de renovamentos no intervalo $[0, 1000]$ num processo de renovamento associado à f.d.p. $f_X(x) = 0.01^2 x e^{-0.01x}$, $x \geq 0$ e determine o erro máximo da estimativa que obteve (Barlow e Proschan, 1975, p. 176).

•

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 166–173).

6.3.3 Limites para algumas funções do número de renovamentos

Em determinadas situações lidamos não com o número de renovamentos mas sim com suas funções. Caso estas funções sejam convexas crescentes, pode adiantar-se um limite superior para processos de renovamento com tempos entre ocorrências *NBUE*.

Teorema 6.15 — Limites para funções convexas crescentes do número de renovamentos

Considere-se um processo de renovamento tal que $X_i \sim_{iid} X \in NBUE$ e $E(X) = \mu = 1/\lambda$. Tome-se também uma função $c(n)$ convexa

crescente tal que $c(0) = 0$.⁷ Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n) \times P[N(t) = n] \leq \sum_{n=0}^{\infty} c(n) \times e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, \quad (6.30)$$

ou seja,

$$E\{c[N(t)]\} \leq E\{c[N_{Poisson}(t)]\}, \quad t \geq 0, \quad (6.31)$$

onde $N_{Poisson}(t)$ representa o número de eventos, no intervalo $[0, t]$, para um processo de Poisson de taxa λ . •

Este resultado revela-se útil nomeadamente para resolver o problema de minimização descrito no exemplo seguinte.

Exemplo 6.16 — Limites para uma função convexa crescente do número de renovamentos

Suponha que pretende determinar o número de peças sobressalentes N de modo a que o valor esperado do número de peças sobressalentes necessárias não exceda determinado valor considerado crítico N^* (*minimizing expected shortage*).

Para já, refira-se que esta v.a. é definida por

$$c[N(t)] = \begin{cases} 0, & N(t) \leq N \\ N(t) - N, & N(t) > N. \end{cases} \quad (6.32)$$

Posto isto, caso a duração das peças seja *NBUE* e possua valor esperado igual a $\mu = 1/\lambda$, segue-se pelo Teorema 6.15:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (n - N) \times P[N(t) = n] \leq \sum_{n=N}^{\infty} (n - N) \times e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad (6.33)$$

⁷Esta igualdade pode ler-se do seguinte modo: a ausência de falhas não acarreta custos.

para $t \geq 0$. Por último, tendo em conta que

$$\sum_{n=N}^{\infty} (n - N) \times e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda t \times [1 - F_{Poisson(\lambda t)}(N - 2)] - N \times [1 - F_{Poisson(\lambda t)}(N - 1)], \quad (6.34)$$

a obtenção da solução de

$$N : c[N(t)] \leq N^* \quad (6.35)$$

passa por determinar o menor dos valores de N tal que

$$\lambda t \times [1 - F_{Poisson(\lambda t)}(N - 2)] - N \times [1 - F_{Poisson(\lambda t)}(N - 1)] \leq N^*, \quad (6.36)$$

valor este que se obtém sem grande dificuldade após algumas consultas das tabelas da f.d. da distribuição de Poisson. •

Sob certas condições é também possível estabelecer um limite superior (resp. inferior) para uma outra função do número de renovamentos que, embora convexa, não é crescente: a sua variância.

Teorema 6.17 — Limites para a variância do número de renovamentos

Considere-se um processo de renovamento com tempos entre ocorrências $X_i \sim_{iid} X$. Então

$$X \in NBU (NWU) \Rightarrow V[N(t)] \leq (\geq) M(t). \quad (6.37)$$

•

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 173–176).

6.4 Algumas estratégias de manutenção

Barlow e Proschan (1965/1996) abordam as **estratégias de manutenção** de um modo que nos parece mais completo que Birolini (1999), fazem uso da teoria de renovamento e concentram-se nas seguintes políticas de substituição

- *age replacement*
- *block replacement*
- *random age replacement.*

Um dos primeiros tratamentos sobre políticas de substituição deve-se a Lotka (1939).

Por seu lado, Campbell (1941) comparou as vantagens da substituição de um grupo de lâmpadas de candeeiros de rua aquando da falha de uma delas com as vantagens da substituição individual de lâmpadas à medida que as falhas vão ocorrendo.⁸

Definição informal 6.18 — Age replacement

De acordo com esta política a **componente i é substituída** imediatamente **aquando de uma falha** (*failure replacement* ou substituição devido a falha) ou **substituída caso atinja a idade** (não aleatória) Z (*planned replacement* ou substituições planeadas/programadas).

Refira-se também que de acordo com esta política ao ocorrer uma substituição planea-se imediatamente uma substituição daí a Z

⁸É claro que o custo por lâmpada associado à substituição do grupo de lâmpadas é inferior àquele associado à substituição individual somente aquando da ocorrência de uma falha de uma lâmpada. Contudo o custo das lâmpadas adicionais requeridas na manutenção preventiva deve equilibrar-se com o custo das falhas adicionais que venham a ocorrer caso a substituição das restantes lâmpadas (ainda em funcionamento) seja adiada.

unidades de tempo ou antes disso caso a componente não chegue a atingir a idade Z . •

Exercício 6.19 — A única componente relevante de um dispositivo mecânico está sujeita à política de manutenção do tipo *age replacement*, com substituições planeadas ao fim de 2 horas.

Admita que se sabe de antemão que as durações (em horas) da componente e suas 5 substitutas é de 1.5h, 1.2h, 2.1h, 4.5h, 1.8h e 2.4h, respectivamente. Quantas substituições ocorrerão no intervalo $[0, 8]$ e em que instantes? •

Exercício 6.20 — Admita que a componente (resp. estrutura com n componentes) possui duração de vida com função de fiabilidade $R(t)$ (resp. $R_T(t)$).

(a) Prove que a probabilidade da componente não falhar durante o serviço no intervalo $[0, t]$ é, para a política do tipo *age replacement* com substituições planeadas ao fim de Z unidades de tempo, dada pela expressão

$$\bar{S}_Z(t) = [R(Z)]^k [R(t - kZ)], \quad kZ \leq t < (k + 1)Z. \quad (6.38)$$

(b) Demonstre que a probabilidade da estrutura não falhar durante o serviço no intervalo $[0, t]$ é, nas condições acima, dada por

$$\bar{S}_{Z,est}(t) = [R_T(Z)]^k [R_T(t - kZ)], \quad kZ \leq t < (k + 1)Z. \quad (6.39)$$

(c) Obtenha expressões para $\bar{S}_{Z,est}(t)$ ao considerar estruturas em paralelo e em série. •

Proposição 6.21 — Se $T \in IHR$ então

$$\bar{S}_{Z_1}(t) \geq \bar{S}_{Z_2}(t), \quad t \geq 0, \quad Z_1 \leq Z_2, \quad (6.40)$$

ou seja, quanto mais frequentes forem as substituições, maior é o tempo até à ocorrência de uma falha durante o serviço, caso a duração das componentes possua f.t.f. crescente. •

Proposição 6.22 — Caso $T \in IHR$ tem-se

$$\bar{S}_Z(t) \geq \bar{F}(t), \quad t \geq 0, \quad (6.41)$$

i.e., a política de *age replacement* aumenta a probabilidade de sobrevivência durante o intervalo $[0, t]$ de uma componente quando a respectiva duração (T) é *IHR*. •

Exercício 6.23 — Prove as duas proposições anteriores. •

Exercício 6.24 — Demonstre que o tempo esperado até à primeira ocorrência de uma falha de uma componente durante o serviço é igual a

$$E_Z = \frac{\int_0^Z \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(Z)}. \quad (6.42)$$

Obtenha uma expressão similar para $E_{Z,est}$.⁹ •

Definição informal 6.25 — **Block replacement**

Ao adoptar-se esta política de substituição há **substituições de componentes** nos instantes $Z, 2Z, 3Z, \dots$ (*planned replacement*) independentemente do historial de falhas da estrutura. Para além disso ocorrem **substituições das componentes no instante das respectivas falhas** (*failure replacement*).¹⁰ •

⁹Em Barlow e Proschan (1965/1996, p. 62) encontram-se limites para este valor esperado.

¹⁰De acordo com Barlow e Proschan (1965/1996, p. 67) esta política de substituição é provavelmente mais prática que as políticas do tipo *age replacement* uma vez que não requiere o registo do uso das componentes.

A política de substituição do tipo *block replacement* é comum na manutenção de computadores digitais e outros sistemas electrónicos complexos, apesar de requerer a substituição de mais componentes ainda em funcionamento que a política do tipo *age replacement*. Refira-se, no entanto, que caso a duração das componente seja *IHR* o número de falhas ao utilizar-se uma política do tipo *block replacement* é menor que ao recorrer-se a uma política do tipo *age replacement*.

Exercício 6.26 — Repita o Exercício 6.19 considerando agora que a política de substituição é do tipo *block replacement*. •

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1965/96, pp. 48–61); Barlow e Proschan (1975, pp. 159–161).

6.5 Comparação de estratégias de manutenção

Barlow e Proschan (1965/1996) debruçam-se também sobre algumas **características primárias** de algumas estratégias de manutenção também denominadas de **políticas de substituição** (*replacement policies*). A saber:

- a distribuição do número de falhas;
- a distribuição do número total de substituições.

É com base nas características primárias que é costume comparar as duas políticas de substituição já descritas, *age replacement* *block replacement*.

Mas antes de enunciar quaisquer resultados convinha lembrar que:

- a v.a. X diz-se estocasticamente menor que Y (no sentido usual) — escrevendo-se neste caso $X \leq_{st} Y$ — sse

$$R_X(x) \leq R_Y(x), \quad -\infty < x < +\infty; \quad (6.43)$$

- a v.a. X_θ cresce estocasticamente com o parâmetro θ (no sentido usual) no conjunto Θ — escrevendo-se neste caso $X_\theta \uparrow_{st}$ com θ — sse

$$P(X_{\theta_1} \geq x) \leq P(X_{\theta_2} \geq x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (6.44)$$

para quaisquer $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ que verifiquem $\theta_1 \leq \theta_2$.

Note-se também que doravante:

- $N(t)$ representa o número de renovamentos/falhas no intervalo $[0, t]$ de um processo de renovamento;
- $N_A(t, Z)$ (resp. $R_A(t, Z)$) representa o número de falhas (resp. substituições planeadas ou devidas a falha) no intervalo $[0, t]$ ao adoptar-se uma política de manutenção do tipo *age replacement* com substituições planeadas ao fim de Z unidades de tempo;
- $N_B(t, Z)$ (resp. $R_B(t, Z)$) representa o número de falhas (resp. substituições planeadas ou devidas a falha) no intervalo $[0, t]$ ao adoptar-se uma política de manutenção do tipo *block replacement* com substituições planeadas de Z em Z unidades de tempo.

É curioso notar que $N(t)$ coincide com o número de substituições, caso se efectue somente manutenção correctiva, i.e., substituições de uma componente somente aquando da respectiva falha.

O teorema seguinte permitirá afirmar que a classe de distribuições *NBU* é a maior das classes para a qual a adopção das políticas de

manutenção dos tipo *age* e *block replacement* resulta numa diminuição estocástica (em sentido usual) do número de falhas no intervalo $[0, t]$, $t \geq 0$. Posto isto parece natural estudar estas duas políticas de manutenção para a classe das distribuições *NBU*.

Teorema 6.27 — Age e block replacement e a diminuição estocástica do número de falhas

Considere-se que X representa a duração das componentes. Então:

- $N_A(t, Z) \leq_{st} N(t)$, $t, Z \geq 0 \Leftrightarrow X \in NBU$;
- $N_B(t, Z) \leq_{st} N(t)$, $t, Z \geq 0 \Leftrightarrow X \in NBU$. •

É altura de averiguar qual o impacto de uma alteração do intervalo Z das políticas de manutenção dos tipos *age* e *block replacement* no número de falhas no intervalo $[0, t]$.

Teorema 6.28 — Impacto da alteração do intervalo Z nas políticas age e block replacement

Considere-se mais uma vez que X representa a duração das componentes. Então:

- $N_A(t, Z) \uparrow_{st}$ com Z ($Z \geq 0$), para $t \geq 0$ fixo $\Leftrightarrow X \in IHR$;
- $N_A(t, Z) \leq_{st} N_B(t, kZ)$, $t, Z \geq 0$, $k = 1, 2, \dots \Leftrightarrow X \in NBU$;
- $N_B(t, Z) \leq_{st} N_B(t, kZ)$, $t, Z \geq 0$, $k = 1, 2, \dots \Leftrightarrow X \in NBU$. •

Por exemplo, pode concluir-se que, ao lidar-se com durações *IHR* e ao adoptar-se uma política de manutenção do tipo *age replacement*, o número de falhas no intervalo $[0, t]$ aumenta estocasticamente (no sentido usual), caso se aumente o intervalo Z , i.e., se espace as substituições planeadas nesta política de manutenção.

É igualmente útil confrontar o número de substituições planeadas ou devidas a falha das políticas de manutenção.

Teorema 6.29 — Confronto entre as políticas age e block replacement

Seja X a v.a. que representa a duração das componentes. Então, para todo $t, Z > 0$:

- $X \in IHR \Rightarrow N_A(t, Z) \geq_{st} N_B(t, Z)$;
- $R_A(t, Z) \leq_{st} R_B(t, Z)$. •

O primeiro resultado do Teorema 6.29 pode ser interpretado do seguinte modo: caso as durações das componentes seja *IHR*, a política de manutenção *block replacement* conduz a um menor número de falhas no intervalo $[0, t]$ que a política de manutenção *age replacement*.

O segundo dos resultados leva a afirmar que a política de manutenção *block replacement* conduz a um maior número de substituições planeadas ou devidas a falha que a política de manutenção *age replacement*, independentemente da distribuição das durações das componentes.

Teorema 6.30 — Diminuição (resp. aumento) estocástica(o) do número de falhas

Caso a duração das componentes seja *IHR* (resp. *DHR*), tem-se

- $N(t) \geq_{st} N_A(t, Z) \geq_{st} N_B(t, Z)$
(resp. $N(t) \leq_{st} N_A(t, Z) \leq_{st} N_B(t, Z)$). •

Para mais detalhes sobre o confronto destas políticas de substituição, consulte-se Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 67-74) ou Shaked e Shanthikumar (1994, Cap. 15).

Textos de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 67–74); Barlow e Proschan (1975, pp. 178–182); Shaked e Shanthikumar (1994, pp. 461–483).

6.6 A política de manutenção random age replacement

Nem sempre é prático substituir componentes numa base periódica. Basta pensar, por exemplo, num mecanismo com um ciclo de operação variável que não permite ou que torna extraordinariamente difícil qualquer tipo de substituição durante o referido ciclo.

A política de manutenção, descrita já a seguir, revela-se particularmente útil nestes casos e acaba por ter associados pelo menos três processos de renascimento de interesse.

Definição informal 6.31 — Random age replacement

Ao assumir-se que as componentes só são substituídas quando falham, a colecção dos tempos entre substituições $\{X_1, X_2, \dots\}$, onde $X_i \sim_{iid} X$, caracteriza um processo de renascimento.

A seguir defina-se um outro processo de renascimento caracterizado por $\{Z_1, Z_2, \dots\}$, onde $Z_i \sim_{iid} Z$. Este processo está associado aos tempos entre substituições planeadas que não têm em conta as falhas das componentes.

Por fim, defina-se um terceiro processo de renascimento caracterizado por $\{U_1, U_2, \dots\}$, onde $U_i = \min\{X_i, Z_i\} \sim_{iid} U$. Ora, $\{U_1, U_2, \dots\}$ é a colecção dos intervalos entre substituições quer planeadas, quer devidas a falha. •

Nota 6.32 — Random age replacement

Esta política de manutenção corresponde a uma política do tipo *age replacement* com **substituições planeadas ao fim de um intervalo Z aleatório**. •

Sejam $R_X(x), R_Z(x)$ e $R_U(x)$ as f.f. das v.a. X, Z e U . Então é sabido que $R_U(x) = R_X(x) \times R_Z(x)$ e o tempo esperado entre substituições dado por $E(U) = \int_0^\infty R_X(x) \times R_Z(x) dx$.

Denote-se por $N_R(t, Z)$ (resp. $R_R(t, Z)$) o número de falhas (resp. de substituições quer planeadas quer devidas a falha) no intervalo $[0, t]$ ao adoptar-se uma política de manutenção do tipo *random replacement* com substituições originalmente planeadas de Z em Z unidades de tempo onde Z é uma v.a.

Ao recorrer-se ao Teorema Elementar do Renascimento pode ainda adiantar-se que o número esperado de substituições por unidade de tempo é, a longo-prazo, dado por:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R_R(t, Z)}{t} = \frac{1}{E(U)}. \quad (6.45)$$

E, ao tirar-se partido das propriedades de envelhecimento estocástico de U , pode adiantar-se limites quer para a f.f. de $R_R(t, Z)$, quer para a função de renascimento ou funções convexas desta v.a.

É possível associar esta política de manutenção a um quarto processo de renascimento de particular interesse para a obtenção de limites para o número esperado de falhas no intervalo $[0, t]$. A saber: $\{V_1, V_2, \dots\}$, onde

$$V_i = \begin{cases} 1, & \text{se } U_i = X_i \text{ (substituição } i \text{ devida a falha)} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (6.46)$$

Ora, $V_i \sim_{iid} \text{Bernoulli}(E(V))$, onde

$$E(V) = P(X \leq Z) = \int_0^\infty F_X(x) dF_Z(x). \quad (6.47)$$

Teorema 6.33 — Limites para o número esperado de falhas para a política random age replacement

É possível enquadrar o número esperado de falhas no intervalo $[0, t]$ ao recorrer-se à política *random age replacement* ($E[R_R(t, Z)]$) à custa de $E(V)$ e do número esperado de substituições nesse mesmo intervalo ($E[N_R(t, Z)]$):

$$\begin{aligned} E(V) \times \{E[R_R(t, Z)] + 1\} - 1 \\ \leq E[N_R(t, Z)] \leq \\ E(V) \times \{E[R_R(t, Z)] + 1\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

E, ao tirar partido do Teorema 6.13,¹¹ tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F_X(x) dF_Z(x) \times \frac{t}{\int_0^t R_U(x) dx} - 1 \\ \leq E[N_R(t, Z)] \leq \\ \int_0^\infty F_X(x) dF_Z(x) \times \left[\frac{tF_U(t)}{\int_0^t R_U(x) dx} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

•

Para uma descrição um pouco mais alargada desta política de substituição ver Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 72–74).

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1965/1996, pp. 72–74).

¹¹É curioso notar que Barlow e Proschan (1965/96, p. 74) enunciam o resultado que se segue sem exigir que a v.a. seja *IHR*.

6.7 Alguns resultados sobre disponibilidade

A manutenção de componentes/estruturas/equipamentos/sistemas possui grande influência na fiabilidade e disponibilidade (*availability*) dos mesmos.

Nesta secção serão enunciados alguns resultados que dizem respeito à disponibilidade de componentes sujeitas a reparação e dos sistemas por elas constituídos.

Definição 6.34 — Disponibilidade no instante t e disponibilidade a longo prazo

Seja $X(t)$ uma v.a. binária que toma o valor 1 caso a componente esteja a operar no instante t . Então a disponibilidade da componente no instante t é representada por $A(t)$ e igual a

$$A(t) = P[X(t) = 1] = E[X(t)]. \quad (6.50)$$

Ao limite

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) \quad (6.51)$$

dá-se o nome de disponibilidade a longo prazo (ou simplesmente disponibilidade).

•

Definição 6.35 — Disponibilidade média no intervalo $[0, T]$ e disponibilidade média a longo prazo

A disponibilidade média no intervalo $[0, T]$ é dada por

$$\frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \quad (6.52)$$

e a disponibilidade média a longo prazo pelo seguinte limite

$$A_{av} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt. \quad (6.53)$$

•

Nota 6.36 — Disponibilidades

Importa referir que a disponibilidade média no intervalo $[0, T]$ corresponde à proporção esperada de tempo em que o sistema está a operar nesse mesmo intervalo. Com efeito,

$$U(T) = \int_0^T X(t) dt \quad (6.54)$$

representa o tempo total em que sistema está a operar no intervalo $[0, T]$, pelo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} E[U(T)] &= \frac{1}{T} E \left[\int_0^T X(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T E[X(t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Por fim mencione-se que, caso exista $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ e seja igual a A , então $A_{av} = A$. Ou por outra, a disponibilidade média a longo prazo e a disponibilidade a longo prazo coincidem. •

É altura de avançar com uma expressão para a disponibilidade a longo prazo em termos dos períodos de funcionamento e de reparação.

Comece-se por considerar uma sequência de vectores i.i.d. $\{(T_i, D_i), i = 1, 2, \dots\}$, onde T_i e D_i representam os tempos de operação contínua (sistema *ON*) e de reparação (sistema *OFF*), respectivamente. De mencionar que, para $i = 1, 2, \dots$, $T_i \sim_{iid} T$ e $D_i \sim_{iid} D$, no entanto, as v.a. T_i e D_i podem depender uma da outra.

$\{(T_i, D_i), i = 1, 2, \dots\}$ define claramente um processo de renovamento alternado e se se assumir que a v.a. $T+D$ é não periódica pode concluir-se que

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$$

$$= \frac{E(T)}{E(T) + E(D)}, \quad (6.56)$$

bastando para isso invocar o Teorema-Chave do Renovamento.

A vantagem deste resultado é mais que óbvia: a disponibilidade a longo-prazo depende exclusivamente dos valores esperados dos tempos de operação e de reparação e nunca das respectivas distribuições.

6.7.1 Disponibilidade de sistemas com componentes independentes

Tal como aconteceu no capítulo inicial, começamos por considerar um sistema coerente cujas n componentes funcionam de forma independente. Mais, quando ocorre falha da componente i , esta vai a reparar, ao passo que as restantes continuam a operar.

Assim sendo, se a v.a. $X(t)$ (resp. $X_i(t)$) tomar valor 1, caso o sistema (resp. a componente i) estiver a operar no instante t , então

$$X(t) = \phi(X_1(t), \dots, X_n(t)), \quad (6.57)$$

onde ϕ representa, naturalmente, a função de estrutura do sistema. Para além disso, a disponibilidade do sistema no instante t é igual a

$$\begin{aligned} A(t) &= E[X(t)] \\ &= r(E[X_1(t)], \dots, E[X_n(t)]) \\ &= r(A_1(t), \dots, A_n(t)) \end{aligned} \quad (6.58)$$

onde, note-se, r denota a fiabilidade associada à função de estrutura ϕ e $A_i(t)$ representa a disponibilidade da componente i no instante t .

Resta calcular a disponibilidade do sistema a longo prazo. Para tal, considere-se uma sequência dupla de v.a. independentes $\{(T_{ij} + D_{ij}), i, j = 1, 2, \dots\}$, onde T_{ij} representa o j -ésimo período de

operação contínua da componente i e D_{ij} a duração da j -ésima reparação da componente i , respectivamente. Assuma-se também que: para qualquer i fixo, se tem, para $j = 1, 2, \dots, T_{ij} \sim_{iid} T_i$ e $D_{ij} \sim_{iid} D_i$; para $i = 1, 2, \dots, \mu_i = E(T_i) < \infty, \nu_i = E(D_i) < \infty$ e $T_i + D_i$ é uma v.a. não periódica. Então, ao ter em conta sucessivamente o facto de a fiabilidade ser uma função multilinear nos seus argumentos e o Teorema-Chave do Renovamento, a disponibilidade deste sistema de com n componentes é, a longo prazo, igual a:

$$A = r(A_1, \dots, A_n) = r\left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \nu_1}, \dots, \frac{\mu_n}{\mu_n + \nu_n}\right), \quad (6.59)$$

onde A_i representa a disponibilidade da componente i a longo prazo.

Exercício 6.37 — Um sistema é constituído por um computador e dois geradores eléctricos colocados em paralelo. Assuma que as durações das componentes e os períodos de reparação se comportam como se descreveu há pouco e possuem os valores esperados (em horas) condensados na tabela seguinte.

Componente i	$\mu_i = E(T_i)$	$\nu_i = E(D_i)$
1	1000	1
2	98	2
3	96	4

Determine a disponibilidade das três componentes a longo-prazo, bem como a disponibilidade do sistema a longo prazo (Barlow e Proschan, 1975, pp. 193–4).

6.7.2 Disponibilidade de sistemas em série

Desta feita está a lidar-se com um sistema ligeiramente diferente daquele considerado na sub-secção anterior.

- Para já, assume-se que o sistema não é um sistema coerente arbitrário mas que possui todas as suas componentes dispostas em série.
- Para além disso, enquanto a componente responsável pela falha do sistema em série está a ser substituída, as restantes componentes mantêm-se em *suspended animation*. Finda a referida reparação estas mesmas componentes retoma o seu funcionamento.¹²
- Assuma-se também que duas ou mais componentes não podem falhar no mesmo instante.¹³

A Figura 7.2.4 de Barlow e Proschan (1975, p. 195) ilustra uma realização deste tipo de sistema, em particular chama atenção para o facto de esta realização se descrever à custa de duas v.a.: $U(t)$ que representa o tempo acumulado em que o sistema está em funcionamento (*up time*); $D(t) = t - U(t)$ que representa o tempo acumulado em que as componentes do sistema suspendem o seu funcionamento devido a uma reparação (*down time*).

É possível adiantar resultados para, por exemplo, a percentagem de tempo em que o sistema está em funcionamento a longo prazo e para a disponibilidade do sistema a longo prazo. É curioso notar que estes resultados dependem exclusivamente dos valores esperados dos

¹²Neste instante não estão propriamente “como novas”, mas sim tal como estavam quando suspenderam o seu funcionamento.

¹³O que, aliás, é verdade, caso todas as distribuições sejam contínuas.

tempos de vidas das componentes μ_i ($0 < \mu_i < +\infty, i = 1, \dots, n$), bem como das durações esperadas das substituições ν_i ($0 < \nu_i < +\infty, i = 1, \dots, n$), e não das distribuições destas v.a.

Teorema 6.38 — Percentagem de tempo em que o sistema em série está em funcionamento a longo prazo

Tem-se, com probabilidade um,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(t)}{t} = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\mu_i} \right)^{-1}. \quad (6.60)$$

Corolário 6.39 — Disponibilidade média do sistema em série a longo prazo

$$\begin{aligned} A_{av} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E[U(t)]}{t} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\mu_i} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Nota 6.40 — Disponibilidade do sistema em série a longo prazo

Considere-se que $\xi(t)$ é igual a i , caso a componente i , responsável pela falha do sistema em série, esteja a ser substituída, e igual a 0, caso o sistema em série esteja a funcionar.

Importa notar que o processo $\{\xi(t), t \geq 0\}$ não tem pontos de regeneração e que o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} P[\xi(t) = 0]$ nem sempre existe. No entanto, tal limite existe desde que os tempos de vida das componentes sejam v.a. não periódicas ou possuam distribuição exponencial. Nesta

situação, a disponibilidade é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow +\infty} P[\xi(t) = 0] \\ &= A_{av}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

É possível estabelecer resultados assintóticos para $D(t)$, assim como para o tempo acumulado em que o sistema não está em funcionamento devido a falhas da componente i no intervalo $[0, t]$, $D_i(t)$.

Corolário 6.41 — Resultados assintóticos para o down time

Tem-se, com probabilidade 1:

$$\begin{aligned} D_{i,av} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{D_i(t)}{t} \\ &= A_{av} \times \frac{\nu_i}{\mu_i}; \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} D_{av} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{D(t)}{t} \\ &= A_{av} \times \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\mu_i}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

A justificação heurística de (6.63) assenta num argumento de igualdade das taxas de entrada e de saída de um estado. Com efeito, $A_{av} (1/\mu_i) dt$ pode ser entendido como a probabilidade estacionária de o sistema deixar de funcionar nas próximas dt unidades de tempo devido a falha da componente i sabendo que o sistema está de momento em funcionamento, e, por seu lado, $D_{i,av} (1/\nu_i) dt$ como a probabilidade estacionária de se terminar a substituição da componente i nas próximas dt unidades de tempo sabendo que o sistema está de momento inoperacional.

De seguida apresentam-se resultados assintóticos para o número de falhas da componente i no intervalo $[0, t]$, $N_i(t)$.

Corolário 6.42 — Resultados assintóticos para o número de falhas da componente i

Tem-se, para $i = 1, \dots, n$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_i(t)}{t} = A_{av} \times \frac{\nu_i}{\mu_i} \text{ com probabilidade 1;} \quad (6.65)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E[N_i(t)]}{t} = A_{av} \times \frac{\nu_i}{\mu_i}. \quad (6.66)$$

•

É interessante notar que, após qualquer reparação, a distribuição do tempo até à próxima falha depende da história do sistema até àquele instante mas que, no entanto, a duração média dos períodos em que o sistema em série está a funcionar no intervalo $[0, t]$ converge para uma constante μ que se identifica no teorema seguinte. De modo análogo a duração média dos períodos em que o sistema em série não está operacional converge para uma outra constante ν .

Teorema 6.43 — Resultados assintóticos para a duração média dos períodos em que o sistema em série está a funcionar ou inoperacional

As durações médias dos períodos em que o sistema em série está a funcionar e está inoperacional, no intervalo $[0, t]$, convergem quase certamente para

$$\mu = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \right)^{-1} \quad (6.67)$$

$$\nu = \mu \times \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\mu_i}, \quad (6.68)$$

respectivamente.

•

Exercício 6.44 — Um sistema é constituído por quatro componentes: um gerador, um equipamento analógico, um equipamento digital e uma peça mecânica, colocados em série. Assuma que as durações das componentes e os períodos de reparação possuem os valores esperados (em horas) condensados na tabela seguinte (Barlow e Proschan, 1975, pp. 200–1).

Componente i	Tipo	$\mu_i = E(T_i)$	$\nu_i = E(D_i)$
1	Gerador	50	.1
2	Equipamento analógico	100	.2
3	Equipamento digital	1000	1.0
4	Peça mecânica	10000	20.0

- (a) Determine a percentagem de tempo em que a componente i está inoperacional a longo prazo.
- (b) Obtenha o número médio de falhas por unidade de tempo a longo prazo para cada uma das componentes.
- (c) Calcule os valores a longo prazo das durações médias dos períodos em que este sistema em série está a funcionar e em que está inoperacional.

•

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 194–201).

6.7.3 Disponibilidade de sistema com uma unidade de operação, uma sobressalente e uma de reparação

Na secção anterior assumiu-se que dispunhamos sempre de peças sobressalentes para substituir qualquer peça que falhasse. Desta feita assume-se que se dispõe de um número limitado de peças

sobressalentes, que o sistema falha caso deixe de haver peças sobressalentes para substituir as peças que tenham falhado e que existe uma unidade de reparação para onde se envia estas últimas peças.

Comece-se por considerar um sistema com uma unidade de operação com uma componente, uma componente sobressalente e uma unidade de reparação. Refira-se também que:

- quando a componente da unidade de operação falha, ela é substituída pela peça sobressalente, substituição esta com duração negligenciável;
- a componente que acaba de falhar é enviada para a unidade de reparação e este instante constitui um instante de regeneração;
- o sistema falha quando a unidade de operação falha e a componente sobressalente não está disponível por ainda não ter sido completada a sua reparação.

Assuma-se que as componentes (resp. reparações) possuem duração X (resp. Y), com distribuição F (resp. G) e valor esperado μ (resp. ν). E, por fim, assumamos que, no instante $t = 0$, a componente da unidade de operação e a peça sobressalente nunca foram utilizadas previamente (completamente novas).

O tempo que decorre até à ocorrência da primeira falha do sistema, tempo este contabilizado a partir do instante 0, pode ser representado por

$$T_1 = X'_1 + X_2 + \dots + X_N, \quad (6.69)$$

onde: X'_1, X_2, X_3, \dots são v.a. i.i.d. a X ; N denota o número (aleatório) de falhas da unidade de operação até à ocorrência da falha do sistema.

Ora, a v.a. N possui função de probabilidade

$$P(N = k + 1) = \alpha^{k-1}(1 - \alpha), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.70)$$

onde $1 - \alpha$ representa a probabilidade de o tempo de reparação da peça na unidade de reparação exceder o de operação da componente, i.e.,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(Y \leq X) \\ &= \int_0^{+\infty} G(t) dF(t). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Assim sendo e tirando partido da equação de Wald, pode adiantar-se que o tempo esperado até à primeira falha do sistema:

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \mu E(N) \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{1 - \alpha} \right). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Do mesmo modo pode calcular-se o valor esperado do tempo até à primeira falha do sistema, medindo o tempo a partir de um instante de regeneração,¹⁴ tempo este representado pela v.a. T :

$$\begin{aligned} E(T) &= E(T_1 - X'_1) \\ &= \frac{\mu}{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

É necessário ainda calcular o valor esperado dos períodos em que o sistema está inoperacional. Este valor esperado é dado por

$$\begin{aligned} E(D) &= \int_0^{+\infty} P(D > t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} P(Y > t + X | Y > X) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - G(t + x)}{1 - G(x)} dF(x) dt. \end{aligned} \quad (6.74)$$

¹⁴Recorde que o instante de substituição da componente da unidade de operação e consequente envio da componente (que acabou de falhar) para a unidade de reparação é um instante de regeneração.

Por último, a disponibilidade a longo prazo do sistema com uma unidade de operação, uma peça sobressalente e uma unidade de reparação é igual a

$$\begin{aligned} A &= \frac{E(T)}{E(T) + E(D)} \\ &= \frac{\mu(1 - \alpha)^{-1}}{\mu(1 - \alpha)^{-1} + E(D)} \end{aligned} \quad (6.75)$$

e depende não só dos valores esperados do tempo de operação contínua das componentes e da duração das reparações, mas também das distribuições propriamente ditas destas v.a.

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 201–204).

6.7.4 Disponibilidade de sistema com m unidades de operação, n sobressalentes e s de reparação

O sistema com que se lida nesta sub-secção possui m unidades de operação e respectivas componentes, n peças sobressalentes e s unidades de reparação. Mais, os períodos de operação contínua (resp. reparação) das componentes são independentes e têm distribuição exponencial de parâmetro λ (resp. γ).

Tal como na secção anterior, uma componente que falhe é imediatamente substituída por uma peça sobressalente caso existam peças sobressalentes disponíveis; a par disso, uma componente segue para as unidades de reparação assim que falha. Escusado será dizer que a reparação é iniciada imediatamente a menos que as s unidades de reparação estejam todas ocupadas.

Um processo de particular interesse diz respeito ao número de componentes inoperacionais no instante t , $X(t)$, ou porque estão a ser reparadas, ou porque aguardam o início da respectiva reparação.

Ora, $\{X(t), t \geq 0\}$ é, naturalmente, um processo de nascimento e morte¹⁵ cujas probabilidades de estado estacionárias $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ são de cálculo trivial e funções das taxas de nascimento $\lambda_i = f(\lambda, \gamma)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, e de morte $\mu_i = g(\lambda, \gamma)$, $i = 1, 2, \dots$:

$$\pi_i = \pi_0 \times \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}, \quad (6.76)$$

onde

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}. \quad (6.77)$$

Por seu lado a disponibilidade do sistema a longo prazo é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \rightarrow +\infty} P[X(t) \leq m] \\ &= \sum_{i=0}^m \pi_i. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Exercício 6.45 — Considere um sistema constituído por uma unidade de operação e respectiva componente, uma peça sobressalente e uma unidade de reparação. Assuma que as durações das componentes (resp. os períodos de reparação) são independentes e possuem distribuição exponencial de parâmetro λ (resp. γ) (Barlow e Proschan, 1975, pp. 205–6).

- (a) Obtenha uma expressão para a disponibilidade a longo prazo deste sistema.

¹⁵Ou por outra, trata-se de uma cadeia de Markov em tempo contínuo, com espaço de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$, matriz de probabilidades de transição homogênea e transições de um estado i para os dois estados vizinhos $i - 1$ e $i + 1$.

(b) Considere agora que o sistema é constituído por n unidades de operação e respectivas componentes, m peças sobressalentes e s unidades de reparação.

Identifique as expressões para as taxas do processo de nascimento e de morte associado ao número de componentes inoperacionais no instante t neste sistema. •

Texto de apoio: Barlow e Proschan (1975, pp. 204–206).

Referências

Referências relevantes — Fiabilidade

- Bagdonavicius, V. e Nikulin, M. (2002). *Accelerated Life Models: Modeling and Statistical Analysis*. Chapman & HALL/CRC, Boca Raton, Florida.
(TA169.3.BAG.62110)
- Bain, L.J. (1991). *Statistical Analysis of Reliability and Life-testing Models* (2nd. edition). Marcel-Dekker, Inc.
(QA276.7-.8.BAI.38659)
- Barlow, R.E. (1998). *Engineering Reliability*. ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability.
(TA169.BAR.50064)
- Barlow, R.E. e Campo, R.A. (1977). Total Time on Test processes and applications to failure data analysis. Em Barlow, Fussel e Singpurwalla (eds.), *Reliability and Fault Tree Analysis*. SIAM, Pennsylvania.
- Barlow, R.E. e Proschan, F. (1965/1996). *Mathematical Theory of Reliability*. SIAM (Classics in Applied Mathematics).
(TA169.BAR.64915)

- Barlow, R.E. e Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
(DEIO-FCUL)
- Barlow, R.E. e Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models* (2nd. printing). Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Birolini, A. (1999). *Reliability Engineering: Theory and Practice*. Springer-Verlag.
(TA169.BIR.77922)
- Dhillon, B.S. (1984). *Quality Control, Reliability, and Engineering Design*. Marcel Dekker, Inc.
(QA274.12-.76.DHI.35860)
- Gertsbakh, I.B. (1989). *Statistical Reliability Theory*. Marcel Dekker, Inc.
(TA169.GER.77955)
- Gomes, M.I. e Barão, M.I. (1999). *Controlo Estatístico de Qualidade*. Notas de mini-curso do VII Congresso Anual da SPE.
(DEIO-FCUL)
- Leitch, R.D. (1995). *Reliability Analysis for Engineers. An Introduction*. Oxford University Press Inc.
(TA169.LEI.77978)
- Martz, H. e Waller, R. (1982). *Bayesian Reliability Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
(QA279.4-.7.MAR.30391)

- Ross, S.M. (1989). *Introduction to Probability Models* (3rd. edition). Academic Press, Inc.
- Ross, S.M. (1993). *Introduction to Probability Models* (5th. revised edition). Academic Press, Inc.
(QA274.12-.76.ROS.43540)
- Ross, S.M. (2003). *Introduction to Probability Models* (8th. edition). Academic Press, San Diego.
(QA273.ROS.62694)
- Shaked, M. e Shanthikumar, J.G. (1994). *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press, Inc.
(QA273.4-.67.SHA.48227)

Referências adicionais — Fiabilidade

- Bartholomew, D.J. (1957). A problem in life testing. *Journal of the American Statistical Association* **52**, 350–355.
- Berrettoni, J. (1964). Practical applications of the Weibull distribution. *Industrial Quality Control* **21**, 71–79.
- Birnbaum, Z.W., Esary, J.D. e Saunders, S.C. (1961). Multi-component systems and structures and their reliability. *Technometrics* **3**, 55–77.
- Birnbaum, Z.W. e Saunders, S.C. (1958). A statistical model for life-length of materials. *Journal of the American Statistical Society* **53**, 151–160.

- Campbell, N.R. (1941). The replacement of perishable members of a continually operating system. *Journal of the Royal Statistical Society* **7**, 110–103.
- Cerdeira, J. (1986). Determinação Estatística de Minorantes para o Problema de Steiner. Nota No. 8/86. Departamento de Estatística e Investigação Operacional – Faculdade de Ciências de Lisboa.
- Davis, D.J. (1952). An analysis of some failure data. *Journal of the American Statistical Society* **47**, 113–150.
- Epstein, B. (1948). Application of the theory of extreme values in fracture problems. *Journal of the American Statistical Society* **43**, 403–412.
- Epstein, B. (1958). The exponential distribution and its role in life-testing. *Industrial Quality Control* **15**, 2–7.
- Epstein, B. e Sobel, M. (1953). Life-testing. *Journal of the American Statistical Society* **48**, 486–502.
- Golden, B. (1977). A Statistical approach to the TSP. *Networks* **7**, 209–225.
- Golden, B. e Alt, F. (1979). Interval estimation of a global optimum for large combinatorial problems. *Naval Research Logistics Quarterly* **26**, 69–77.
- Gumbel, E.J. (1935). Les valeurs extremes des distributions statistiques. *Annales de l'Institute Henri Poincaré* **4**(2), 115.
- Gumbel, E.J. (1958). *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York

- Johnson, N. e Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions – 1*. John Wiley & Sons, New York.
- Kao, J. (1956). A new life-quality measure for electron tubes. *IRE Transactions on Reliability and Quality Control*, PGRQC-7.
- Kao, J. (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies. *IRE Transactions on Reliability and Quality Control*, PGRQC-13, 15–22.
- Kao, J. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing electron tubes. *Technometrics* **1**, 389–407.
- Khintchine, A.Ya. (1932). Mathematisches über die Erwartung von einen öffentlicher Schalter. (Mathematical theory of a stationary queue). *Matematicheskii Sbornik* **39**, 73–84.
- Lotka, A.J. (1939). A contribution to the theory of self-renewing aggregates with special reference to industrial replacement. *Annals of Mathematical Statistics* **10**, 1–25.
- McRoberts, K. (1966). *Optimization of Facility Layout*. Ph.D. Thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa.
- Moore, E.F. e Shannon, C.E. (1956). Reliable circuits using less reliable relays. *Journal of the Franklin Institute* **262** Pt. I, 191–208, and Pt. II, 281–297.
- Morais, M.J.C. (1995). *Cartas de controlo FSI e VSI para o parâmetro de escala da população Weibull tri-paramétrica*.

Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, IST, UTL.
Orientadora: Profa. Dra. M.F. Ramalhoto.

- Morais, M.J.C. (1998). PCV: Um velho problema revisitado estatisticamente. Em *Actas da V Conferência do CEMAPRE*, 439–458. Proença, I. e Mendes, Z. (eds.).
- Palm, C. (1947). Arbetskraftens Fordelning vid betjaning av automatskiner. *Industridningen Norden* **75**.
- Seshadri, V. (1999). *The Inverse Gaussian Distribution*. Springer-Verlag, New York.
- Weibull, W. (1939a). *A Statistical Theory of the Strength of Materials*. Ingeniors Vetenskaps Akademien Handlingar 151. Generalstaben Litografiska Anstalts Forlag, Stockholm.
- Weibull, W. (1939b). *The Phenomenon of Rupture in Solids*. Ingeniors Vetenskaps Akademien Handlingar 153. Generalstaben Litografiska Anstalts Forlag, Stockholm.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics* **18**, 293–297.
- Weiss, G. (1956a). On the theory of replacement of machinery with a random failure time. *Naval Research Logistics Quarterly* **3**, 279–293.
- Weiss, G. (1956b). On some economic factors influencing a reliability program. NAVORD 4256, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland.

- Weiss, G. (1956c). The reliability of a redundant system which operates repetitively. NAVORD 4348, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland.
- Zelen, M. e Dannenmiller, M.C. (1961). The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. *Technometrics* **3**, 29–49.