TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

EXAME/ TESTES DE RECUPERAÇÃO - VERSÃO B
30 DE JANEIRO DE 2017 - 8H
INSTRUÇÕES
MEMEC, LEAN, MEC, LEGM

- As cotações das alíneas estão indicadas na margem esquerda da folha do enunciado.
- **Desligue o telemóvel!**
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- Justifique as respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões são resolvidas.
- Boa sorte!

pergunta	página(s)	classificação
1 (a)		
1 (b)		
1 (c)		
2		
3 (a)		
3 (b)		
4		
5		
6		
7 (a)		
7 (b)		
8		
9		
10 (a)		
10 (b)		
11 (a)		
11 (b)		
12		
total		

Nome: ____

Nº: ____________________ **Curso:** ____________________

Sala: ____________________ **Rubrica docente:** ____________

Primeiro Teste

(1) Seja $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$u(x, y) = (\alpha^2 - \beta^2)\,\text{sen}(x + y) + \alpha x^2 - \beta y^2$$

onde α e β são constantes reais.

(1 val.) (a) Determine os valores de α e β para os quais u é a parte real de uma função holomorfa.

(1,5 val.) (b) Para $\alpha = 1, \beta = 1$, determine a função inteira tal que $\operatorname{Re} f = u$ e $f(1) = 1 + i$.

(1 val.) (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2017} f(z) \left(\cos z + \frac{1}{(z-2)^3}\right) dz$$

em que a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

(1 val.) (2) Calcule

$$\int_\gamma \frac{2}{z-1} \log(z-1)\, dz$$

onde γ é o segmento de reta com início em $z = 3$ e fim em $z = 1 - 2i$, e log designa o valor principal do logaritmo.

(3) Considere a função definida pela expressão

$$f(z) = (z-1)^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{2z}{(z^2-1)^2} + \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

(1,5 val.) (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

(1 val.) (b) Calcule

$$\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

(1 val.) (4) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de

$$g(z) = z \cos \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z + 3i}$$

válido para $0 < |z| < 3$.

(1 val.) (5) Usando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 - 3\cos\theta}\, d\theta.$$

(1 val.) (6) Seja f uma função inteira. Determine condições sobre f que sejam necessárias e suficientes para a existência de um aberto U contendo 0 e uma função holomorfa $g\colon U \to \mathbb{C}$ tais que $g^2 = f$ em U.

Segundo Teste

(7) Considere a equação

$$ye^t + (3y + 2e^t)\frac{dy}{dt} = 0,$$

(1 val.) (a) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(y)$.

(1,5 val.) (b) Determine explicitamente a solução da equação que satisfaz $y(0) = -1$, indicando o intervalo máximo de definição.

(1 val.) (8) Justifique que a função $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y(t) = 1$ é a única solução do problema de valor inicial

$$y' = t^2(1 - y), \quad y(0) = 1$$

(1,5 val.) (9) Determine a solução geral do sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(1 val.) (10) (a) Determine a solução geral da equação $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

(1 val.) (b) Determine a solução da equação

$$y''' - 3y'' + 2y' = 3(1 + e^t)$$

que satisfaz $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

(11) Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 3\pi & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = 5x & \text{para } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(0,5 val.) (a) Determine uma solução estacionária (isto é, independente da variável t) da equação e condições na fronteira $u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 3\pi$.

(1,5 val.) (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para obter a solução formal do problema indicado.

(1 val.) (12) Determine uma solução não identicamente nula $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ do sistema de equações às derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xu - 2yv \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2yu + 2xv \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$