TÉCNICO LISBOA

Departamento de Matemática

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

EXAME/ TESTES DE RECUPERAÇÃO - VERSÃO A
30 DE JANEIRO DE 2017 - 8H
INSTRUÇÕES
MEMEC, LEAN, MEC, LEGM

- As cotações das alíneas estão indicadas na margem esquerda da folha do enunciado.
- **Desligue o telemóvel!**
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- Justifique as respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões são resolvidas.
- Boa sorte!

pergunta	página(s)	classificação
1 (a)		
1 (b)		
1 (c)		
2		
3 (a)		
3 (b)		
4		
5		
6		
7 (a)		
7 (b)		
8		
9		
10 (a)		
10 (b)		
11 (a)		
11 (b)		
12		
total		

Nome: ____

Nº: ____________________ **Curso:** ____________________

Sala: ____________________ **Rubrica docente:** ____________

Primeiro Teste

(1) Seja $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$v(x,y) = (\alpha^2 - \beta^2)e^{x+y} + \alpha x^2 + \beta y^2$$

onde α e β são constantes reais.

(1 val.) (a) Determine os valores de α e β para os quais v é a parte imaginária de uma função holomorfa.

(1,5 val.) (b) Para $\alpha = 1, \beta = -1$, determine a função inteira tal que $\operatorname{Im} f = v$ e $f(i) = 1 - i$.

(1 val.) (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=2017} f(z)\left(z + \frac{1}{(z-i)^3}\right)\, dz$$

em que a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

(1 val.) (2) Calcule

$$\int_\gamma \frac{1}{z+1} \log(z+1)\, dz$$

onde γ é o segmento de reta com início em $z = 1$ e fim em $z = -1 + 2i$, e log designa o valor principal do logaritmo.

(3) Considere a função definida pela expressão

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z-i}\right) + \frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$$

(1,5 val.) (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

(1 val.) (b) Calcule

$$\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido horário.

(1 val.) (4) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de

$$g(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + \frac{2}{z+2i}$$

válido para $|z| > 2$.

(1 val.) (5) Usando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

(1 val.) (6) Seja f uma função inteira. Determine condições sobre f que sejam necessárias e suficientes para a existência de um aberto U contendo 0 e uma função holomorfa $g\colon U \to \mathbb{C}$ tais que $g^2 = f$ em U.

Segundo Teste

(7) Considere a equação

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t)\frac{dy}{dt} = 0,$$

(1 val.) (a) Determine um fator integrante da forma $\mu = \mu(t)$.

(1,5 val.) (b) Determine explicitamente a solução da equação que satisfaz $y(0) = 1$, indicando o intervalo máximo de definição.

(1 val.) (8) Justifique que a função $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y(t) = -1$ é a única solução do problema de valor inicial

$$y' = t(1 + y), \quad y(0) = -1$$

(1,5 val.) (9) Determine a solução geral do sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1 val.) (10) (a) Determine a solução geral da equação $y''' + y'' - 2y' = 0$.

(1 val.) (b) Determine a solução da equação

$$y''' + y'' - 2y' = 2(1 + e^{-2t})$$

que satisfaz $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

(11) Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para } 0 < x < 2\pi, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(2\pi,t) = 4\pi & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = 3x & \text{para } 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

(0,5 val.) (a) Determine uma solução estacionária (isto é, independente da variável t) da equação e condições na fronteira $u(0,t) = 0,\ u(2\pi,t) = 4\pi$.

(1,5 val.) (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para obter a solução formal do problema indicado.

(1 val.) (12) Determine uma solução não identicamente nula $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ do sistema de equações às derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xu - 2yv \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2yu + 2xv \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$