

Probabilidades e Estatística

**LEAN, LEGM, LEIC-A, LEMat, LMAC, MEAer, MEAmbe,
MEBiol, MEBiom, MEC, MEEC, MEFT, MEMec MEQ**

1º semestre – 2011/2012

2/02/2012 – **9:00**

1º TESTE (Época Recurso)

Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I

2.5 + 2.0 + 2.5 + 3.0 = 10.0 valores

Exercício 1

(a) • Quadro de eventos e probabilidades

Evento	Probabilidade
L = chamada longa	$P(L) = 0.4$
C = chamada curta	$P(C) = 0.6$
H_0 = zero handoffs durante a chamada	$P(H_0) = ?$
H_1 = um handoff durante a chamada	$P(H_1) = ?$
H_2 = pelo menos dois handoffs durante a chamada	$P(H_2) = ?$
$H_0 L$ = zero handoffs dado que a chamada é longa	$P(H_0 L) = 0.25$
$H_1 L$ = um handoff dado que a chamada é longa	$P(H_1 L) = 0.25$
$H_2 L$ = pelo menos dois handoffs dado que a chamada é longa	$P(H_2 L) = 0.5$
$H_0 C$ = zero handoffs dado que a chamada é curta	$P(H_0 C) = \frac{2}{3}$
$H_1 C$ = um handoff dado que a chamada é curta	$P(H_1 C) = \frac{1}{6}$
$H_2 C$ = pelo menos dois handoffs dado que a chamada é curta	$P(H_2 C) = \frac{1}{6}$

• Prob. pedida

Recorrendo ao teorema da probabilidade total (fazendo uso da partição $\{L, C\}$), tem-se

$$\begin{aligned} P(H_0) &= P(H_0|L)P(L) + P(H_0|C)P(C) \\ &= 0.25 \times 0.4 + \frac{2}{3} \times 0.6 \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

(b) • Prob. pedida

Fazendo uso do teorema de Bayes, tem-se

$$\begin{aligned} P(L|H_2) &= \frac{P(H_2|L) \times P(L)}{P(H_2)} \\ &= \frac{P(H_2|L) \times P(L)}{P(H_2|L)P(L) + P(H_2|C)P(C)} \\ &= \frac{0.5 \times 0.4}{0.5 \times 0.4 + \frac{1}{6} \times 0.6} \\ &= \frac{0.2}{0.2 + 0.1} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exercício 2

(a)

- **V.a.**

X_{50} = parte inteira do logaritmo do número de bactérias de certo tipo, numa amostra de 50ml de água de um reservatório

- **Distribuição de X_1**

$$X_{50} \sim \text{Poisson}(\lambda_{50})$$

- **Parâmetro**

$$\lambda : E(X_{50}) = 3.5$$

$$\lambda_{50} = 3.5$$

- **Outra v.a.**

X_{100} = parte inteira do logaritmo do número de bactérias de certo tipo, numa amostra de 100ml de água de um reservatório

- **Distribuição de X_{100}**

Invocando a propriedade reprodutiva da distribuição de Poisson, conclui-se que:

$$X_{100} \sim \text{Poisson}(\lambda_{100} = 2 \times \lambda_{50} = 7)$$

- **F.p. de X_{100}**

$$P(X_{100} = x) = \frac{e^{-7} \times 7^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X_{100} > 8) &= 1 - P(X_{100} \leq 8) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{8} P(X_{100} = x) \\ &= 1 - F_{\text{Poisson}(7)}(8) \\ &\stackrel{\text{tabela}}{=} 1 - 0.7291 \\ &= 0.2709. \end{aligned}$$

(b)

- **Nova v.a.**

Y = número de amostras de 100ml que são recolhidas até ser detectada a primeira amostra nas referidas condições

- **Distribuição de Y**

A v.a. Y corresponde ao número total de provas de Bernoulli i.i.d. realizadas até à ocorrência do primeiro sucesso. Assim,

$$Y \sim \text{Geométrica}(p)$$

- **Parâmetro**

$$p = P(X_{100} > 8) \stackrel{(a)}{=} 0.2709$$

- **Valor esperado de Y**

$$E(Y) \stackrel{\text{form}}{=} \frac{1}{p} \simeq 3.691399$$

- **Variância de Y**

$$V(Y) \stackrel{\text{form}}{=} \frac{1-p}{p^2} \simeq 9.935028$$

- **Desvio-padrão de Y**

$$DP(Y) = +\sqrt{V(Y)} \simeq 3.151988$$

Exercício 1(a) • **V.a.** X = diâmetro do tronco de cerejeira (em cm)• **Distribuição de X** $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ • **Parâmetros**

$$\mu = E(X) = 25\text{cm}$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 10\text{cm}$$

• **Outra v.a.** Y = número de troncos de qualidade inferior, em lote de 1000 troncos• **Distribuição de Y** $Y \sim \text{Binomial}(n, p)$ pois Y representa o número de “sucessos” em 1000 provas de Bernoulli i.i.d.• **Parâmetros**

$$\begin{aligned}
 n &= 1000 \\
 p &= P(\text{tronco de qualidade inferior}) \\
 &= P(X < 15) \\
 &= P\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \leq \frac{15 - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{15 - 25}{\sqrt{10^2}}\right) \\
 &= \Phi(-1) \\
 &= 1 - \Phi(1) \\
 \underline{\text{tabela}} &= 1 - 0.8413 \\
 &= 0.1587.
 \end{aligned}$$

• **F.p. de Y**

$$P(Y = y) = \binom{1000}{y} 0.1587^y (1 - 0.1587)^{1000-y}, y = 1, 1, \dots, 1000$$

• **Probabilidade pedida — expressão exacta da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
 P(Y > 500) &= 1 - P(Y \leq 500) \\
 &= 1 - \sum_{y=0}^{500} \binom{1000}{y} 0.1587^y (1 - 0.1587)^{1000-y}
 \end{aligned}$$

ou

$$P(Y > 500) = \sum_{y=501}^{1000} \binom{1000}{y} 0.1587^y (1 - 0.1587)^{1000-y}$$

• **Probabilidade pedida — valor aproximado** (aproximação da binomial à Normal)

Dado que

$$\circ np = 1000 \times 0.1587 = 158.7 > 5$$

$$\circ n(1-p) = 1000 \times (1 - 0.1587) = 841.3 > 5$$

pode aproximar-se a f.d. da v.a. $Y \sim \text{Binomial}(n = 1000, p = 0.1587)$ pela f.d. da v.a.

$$Y^* \sim \text{Normal}(E(Y) = np = 158.7, V(Y) = np(1-p) = 133.514310).$$

[Importa notar que esta aproximação (derivada originalmente do teorema de De Moivre-Laplace) coincide com aquela que decorre do Teorema do Limite Central (TLC).]

– SEM correcção de continuidade

$$\begin{aligned}
 P(Y > 500) &= 1 - P(Y \leq 500) \\
 &\simeq 1 - P(Y^* \leq 500) \\
 &= 1 - P\left[\frac{Y^* - E(Y^*)}{\sqrt{V(Y^*)}} \leq \frac{500 - E(Y^*)}{\sqrt{V(Y^*)}}\right] \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{500 - 158.7}{\sqrt{133.514310}}\right) \\
 &\simeq 1 - \Phi(29.54) \\
 &\simeq 1 - 1.000000 \\
 &= 0.000000.
 \end{aligned}$$

– Usando máquina de calcular

Quem usa máquina não precisa de padronizar e poderá responder

$$\begin{aligned}
 P(Y > 500) &= 1 - P(Y \leq 500) \\
 &\simeq 1 - P(Y^* \leq 500) \\
 &= 1 - F_{normal(158.7, 133.514310)}(500) \\
 &\stackrel{mag.}{=} 1 - 1.000000 \\
 &= 0.000000
 \end{aligned}$$

– COM correcção de continuidade

$$\begin{aligned}
 P(Y > 500) &= 1 - P(Y \leq 500) \\
 &\simeq 1 - P\left(Y^* \leq 500 + \frac{1}{2}\right) \\
 &= 1 - P\left[\frac{Y^* - E(Y^*)}{\sqrt{V(Y^*)}} \leq \frac{500 + \frac{1}{2} - E(Y^*)}{\sqrt{V(Y^*)}}\right] \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{500 + \frac{1}{2} - 158.7}{\sqrt{133.514310}}\right) \\
 &\simeq 1 - \Phi(29.58) \\
 &\simeq 1 - 1.000000 \\
 &= 0.000000.
 \end{aligned}$$

• Probabilidade pedida — valor aproximado (recurso ao TLC)

– V.a.

$$T_i = \begin{cases} 1, & \text{se o tronco } i \text{ é de qualidade inferior} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 1000$$

– Distribuição de T_i

$$T_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Bernoulli}(p = 0.1587), \quad i = 1, \dots, 1000$$

– Valor esperado e de variância T_i

$$E(T_i) = p = 0.1587, \quad V(T_i) = p(1-p) = 0.133514$$

– Nova v.a.

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} T_i = \text{número de troncos de qualidade inferior, em lote de 1000 troncos}$$

– Valor esperado e variância de Y

$$E(Y) = 1000 \times 0.1587 = 158.7$$

$$V(Y) = 1000 \times 0.133514 = 133.514$$

– Distribuição aproximada de Y

Pelo Teorema do Limite Central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \xrightarrow{a} \text{Normal}(0, 1).$$

– **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
 P(Y > 500) &= 1 - P(Y \leq 500) \\
 &\simeq 1 - P(Y^* \leq 500) \\
 &\stackrel{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{500 - 158.7}{\sqrt{133.514}}\right) \\
 &\simeq 1 - \Phi(29.54) \\
 &=_{tabela} 1 - 1.000000 \\
 &= 0.000000
 \end{aligned}$$

(b) • **Outra v.a.**

L = lucro por tronco (em euros)

• **Contradomínio de L**

$$\mathbb{R}_L = \{50, 150, 250\}$$

• **F.p. de L**

$$\begin{aligned}
 P(L = 50) &= P(X < 15) \\
 &\stackrel{(a)}{=} 0.1587 \\
 P(L = 150) &= P(15 \leq X \leq 25) \\
 &= \Phi\left(\frac{25 - 25}{10}\right) - \Phi\left(\frac{15 - 25}{10}\right) \\
 &= \Phi(0) - \Phi(-1) \\
 &= \Phi(0) - [1 - \Phi(1)] \\
 &=_{tabela} 0.5 - 0.1587 \\
 &= 0.3413 \\
 P(L = 250) &= 1 - P(L = 50) - P(L = 150) \\
 &= 1 - 0.1587 - 0.3413 \\
 &= 0.5 \\
 P(L = l) &= 0, l \neq 50, 150, 250
 \end{aligned}$$

• **Valor esperado de L**

$$\begin{aligned}
 E(L) &= \sum_{l \in \mathbb{R}_L} l \times P(L = l) \\
 &= 50 \times 0.1587 + 150 \times 0.3413 + 250 \times 0.5 \\
 &= 184.13.
 \end{aligned}$$

Exercício 2

(a) • **Par aleatório**

$$(X, Y)$$

• **Distribuições marginais**

$$X \sim \text{Binomial}(n = 1, p = 0.1) \sim \text{Bernoulli}(0.1)$$

$$Y \sim \text{Hipergeométrica}(N = 5, M = 2, n = 2)$$

- F.p. marginais

$$\begin{aligned}
 P(X = x) &= 0.1^x (1 - 0.1)^{1-x} \\
 &= \begin{cases} 0.9, & x = 0 \\ 0.1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 0, 1 \end{cases} \\
 P(Y = y) &= \frac{\binom{2}{y} \binom{5-2}{2-y}}{\binom{5}{2}} \\
 &= \frac{y! (2-y)!}{2! (5-2)!} \frac{3!}{(2-y)! (1+y)!} \\
 &= \begin{cases} \frac{1 \times 3}{10} = 0.3, & y = 0 \\ \frac{2 \times 3}{10} = 0.6, & y = 1 \\ \frac{1 \times 1}{10} = 0.1, & y = 2 \\ 0, & y \neq 0, 1, 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- F.p. conjunta de (X, Y)

Para obtê-la teremos em conta as f.p. marginais de X e de Y , que estas f.p. se obtêm à custa da f.p. conjunta de (X, Y) e ainda o facto de $P(X = 1|Y = 2) = 1$. Ora,

$$\begin{aligned}
 P(X = 1|Y = 2) &= 1 \\
 \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} &= 1 \\
 P(X = 1, Y = 2) &= P(Y = 2) \\
 &= 0.1.
 \end{aligned}$$

Consequentemente

X	Y			$P(X = x)$
	0	1	2	
0	a	b	c	0.9
1	d	e	0.1	0.1
$P(Y = y)$	0.3	0.6	0.1	1

onde

$$a, b, c, d \in [0, 1] \quad : \quad \begin{cases} c + 0.1 = 0.1 \Leftrightarrow c = 0 \\ d + e + 0.1 = 0.1 \Leftrightarrow d = e = 0 \\ a + d = 0.3 \Leftrightarrow a = 0.3 - d \Leftrightarrow a = 0.3 \\ b + e = 0.6 \Leftrightarrow b = 0.6 - e \Leftrightarrow b = 0.6. \end{cases}$$

- Conclusão

A f.p. conjunta de (X, Y) é dada por

X	Y			$P(X = x)$
	0	1	2	
0	0.3	0.6	0	0.9
1	0	0	0.1	0.1
$P(Y = y)$	0.3	0.6	0.1	1

(b) • Correlação entre X e Y

Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned}
 corr(X, Y) &= \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
 &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}},
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^2 xy \times P(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{y=0}^2 y \times P(X = 1, Y = y) \\
&= 1 \times 0 + 2 \times 0.1 \\
&= 0.2 \\
E(X) &= E[\text{Bernoulli}(p = 0.1)] \\
&= p \\
&= 0.1 \\
E(Y) &= E[\text{Hipergeométrica}(N = 5, M = 2, n = 2)] \\
&= n \frac{M}{N} \\
&= 2 \times \frac{2}{5} \\
&= 0.8 \\
V(X) &= V[\text{Bernoulli}(p = 0.1)] \\
&= 0.1 \times (1 - 0.1) \\
&= 0.09 \\
V(Y) &= E[\text{Hipergeométrica}(N = 5, M = 2, n = 2)] \\
&= n \times \frac{M}{N} \times \frac{N-M}{N} \times \frac{N-n}{N-1} \\
&= 2 \times \frac{2}{5} \times \frac{5-2}{5} \times \frac{5-2}{5-1} \\
&= 0.36
\end{aligned}$$

• Conclusão

$$\begin{aligned}
\text{corr}(X, Y) &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
&= \frac{0.2 - 0.1 \times 0.8}{\sqrt{0.09 \times 0.36}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

• Comentários

Visto que $\text{corr}(X, Y) = \frac{2}{3} \neq 0$ pode concluir-se que X e Y estão correlacionadas, logo v.a. DEPENDENTES.

Para além disso, importa notar que $\text{corr}(X, Y) > 0$, pelo que as v.a. estão positivamente correlacionadas, pelo que apresentam tendência para variarem no mesmo sentido.

Estando o valor de $|\text{corr}(X, Y)|$ não muito próximo de 1, pode adiantar-se que as v.a. estão moderada e linearmente correlacionadas.