

Probabilidades e Estatística

LEGM, LEIC-A, MEC

1º semestre – 2011/2012

1º Teste

12/11/2011 – 10:30

Duração: 1 hora e 30 minutos

Grupo I

2.5 + 2.0 + 3.0 + 2.5 = 10.0 valores

Exercício 1

- (a) • Quadro de eventos e probabilidades

Evento	Probabilidade
G_1 = habit. pertence grupo assoc. a risco de assalto elevado	$P(G_1) = 0.2$
G_2 = habit. pertence grupo assoc. a risco de assalto médio	$P(G_2) = 0.4$
G_3 = habit. pertence grupo assoc. a risco de assalto baixo	$P(G_3) = 1 - P(G_1) - P(G_2) = 0.4$
A = habit. assaltada	$P(A) = ?$
$A G_1$ = habit. assaltada dado que pertence grupo assoc. a risco assalto elevado	$P(A G_1) = 0.3$
$A G_2$ = habit. assaltada dado que pertence grupo assoc. a risco assalto médio	$P(A G_2) = 1 - P(\bar{A} G_2) = 1 - 0.9 = 0.1$
$A G_3$ = habit. assaltada dado que pertence grupo assoc. a risco assalto baixo	$P(A G_3) = 0.01$

- Prob. pedida

Aplicando o teorema da probabilidade total (fazendo uso da partição $\{G_1, G_2, G_3\}$), tem-se

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|G_1)P(G_1) + P(A|G_2)P(G_2) + P(A|G_3)P(G_3) \\ &= 0.2 \times 0.3 + 0.4 \times 0.1 + 0.4 \times 0.01 \\ &= 0.104. \end{aligned}$$

- (b) • Prob. pedida

Tirando partido do facto de G_2 e G_3 serem eventos mutuamente exclusivos e aplicando o teorema de Bayes, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} P[(G_2 \cup G_3)|\bar{A}] &\stackrel{G_2 \cap G_3 = \emptyset}{=} P(G_2|\bar{A}) + P(G_3|\bar{A}) \\ &\stackrel{T.Bayes}{=} \frac{P(\bar{A}|G_2) \times P(G_2)}{P(\bar{A})} + \frac{P(\bar{A}|G_3) \times P(G_3)}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{[1 - P(A|G_2)] \times P(G_2)}{1 - P(A)} + \frac{[1 - P(A|G_3)] \times P(G_3)}{1 - P(A)} \\ &\stackrel{a)}{=} \frac{(1 - 0.1) \times 0.4 + (1 - 0.01) \times 0.4}{1 - 0.104} \\ &\approx 0.84875. \end{aligned}$$

- Resolução alternativa

Tirando partido do facto de $\{G_1, G_2, G_3\}$ constituir uma partição do espaço de resultado e aplicando

o teorema de Bayes, tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
 P[(G_2 \cup G_3) | \bar{A}] &\stackrel{G_1 \cup G_2 \cup G_3 = \Omega}{=} 1 - P(G_1 | \bar{A}) \\
 &\stackrel{T.Bayes}{=} 1 - \frac{P(\bar{A} | G_1) \times P(G_1)}{P(\bar{A})} \\
 &= 1 - \frac{[1 - P(A | G_1)] \times P(G_1)}{1 - P(A)} \\
 &\stackrel{a)}{=} 1 - \frac{(1 - 0.3) \times 0.2}{1 - 0.104} \\
 &\simeq 0.84875.
 \end{aligned}$$

Exercício 2

(a) • V.a.

X = número de contas de diamante numa amostra de 100 contas seleccionadas ao acaso e SEM reposição de uma população com 100000 contas das quais $100000 \times \frac{1}{1000} = 100$ contas de diamante

• Distribuição de X

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$$

• Parâmetros

$$N = 100000 \text{ contas}$$

$$M = 100000 \times \frac{1}{1000} = 100 \text{ contas de diamante}$$

$$n = 100 \text{ contas seleccionadas ao acaso e SEM reposição}$$

• Valor esperado de X

$$E(X) \stackrel{\text{form.}}{=} n \times \frac{M}{N} = 100 \times \frac{100}{100000} = 0.1$$

• Variância de X

$$V(X) \stackrel{\text{form.}}{=} n \times \frac{M}{N} \times \left(\frac{N-M}{N} \right) \times \frac{N-n}{N-1} = 100 \times \frac{100}{100000} \times \left(\frac{100000-100}{100000} \right) \times \frac{100000-100}{100000-1} \simeq 0.099801.$$

(b) • Prob. pedida — expressão

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &\stackrel{\text{form.}}{=} \frac{\binom{M}{0} \binom{N-M}{M-0}}{\binom{N}{n}} \\
 &= \frac{\binom{100}{0} \binom{100000-100}{100-0}}{\binom{100000}{100}}
 \end{aligned}$$

• V.a. approximativa

Dado que $n = 100 < 0.1 \times N = 0.1 \times 100000 = 10000$, pode aproximar-se a f.p. da v.a.

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, M, n)$$

pela f.p. da v.a. approximativa

$$\tilde{X} \sim \text{Binomial} \left(n = 100, p = \frac{M}{N} = 0.001 \right)$$

• F.p. de \tilde{X}

$$P(\tilde{X} = x) = \binom{100}{x} \times 0.001^x \times (1 - 0.001)^{100-x}, x = 0, 1, \dots, 100$$

• Prob. pedida — valor approximado

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &\simeq P(\tilde{X} = 0) \\
 &= \binom{100}{0} \times 0.001^0 \times (1 - 0.001)^{100-0} \\
 &= 0.999^{100} \\
 &\simeq 0.904792.
 \end{aligned}$$

- **Obs.**

Pelo facto de $n = 100 > 20$ e $p = 0.001 < 0.1$, seria razoável aproximar a f.p. da v.a. approximativa $\tilde{X} \sim \text{Binomial}(n, p)$ pela f.p. de outra v.a. approximativa $\tilde{\tilde{X}} \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$. A título de exemplo: $P(X = 0) \simeq P(\tilde{\tilde{X}} = 0) = e^{-100 \times 0.001} \simeq 0.904837$.

A aproximação de Poisson seria de longe mais útil caso se pretendesse adiantar um valor aproximado de, por exemplo, $P(X \leq 30)$, recorrendo-se para tal a $P(\tilde{\tilde{X}} \leq 30)$.

Grupo II	2.0 + 3.0 + 2.0 + 3.0 = 10.0 valores
-----------------	---

Exercício 1

- (a) • **V.a.**

X = voltagem de saída

- **Distribuição de X**

$$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$$

- **Parâmetros**

$$\mu = 10^{-2} \times v$$

$$\sigma^2 = 4$$

- **Obtenção de v**

$$\begin{aligned} v &: P(X < 0) = 10^{-3} \\ &P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{0 - \mu}{\sigma}\right) = 10^{-3} \\ &\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 10^{-3} \\ &\frac{\mu}{\sigma} = -\Phi^{-1}(10^{-3}) \\ &\frac{\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(1 - 10^{-3}) \\ &\frac{10^{-2} \times v}{2} = \Phi^{-1}(0.999) \\ &v \stackrel{\text{tabela}}{=} 3.0902 \times \frac{2}{10^{-2}} \\ &v = 618.04. \end{aligned}$$

- (b) • **V.a.**

X_i = voltagem de saída do sistema i , $i = 1, \dots, n$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**

$$X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, i = 1, \dots, 50$$

$$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$$

$$E(X_i) = E(X) = \mu = 10^{-2} \times v \stackrel{a)}{=} 10^{-2} \times 618.04 = 6.1804$$

$$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 \stackrel{a)}{=} 4$$

- **Nova v.a.**

$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ = soma das voltagens de saída de 50 sistemas similares ao anterior e que operam de modo independente

- **Distribuição de Y**

Como Y é uma soma de v.a. normais independentes segue-se que $Y \sim \text{Normal}(E(Y), V(Y))$.

- **Parâmetros**

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} 50 \times E(X) = 50 \times 6.1804 = 309.02$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) \stackrel{X_i \text{ indep.}}{=} \sum_{i=1}^{50} V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} 50 \times V(X) = 50 \times 4 = 200$$

• Prob. pedida

$$\begin{aligned}
 P(Y < 0) &= P\left[\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} < \frac{0 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{0 - 309.02}{\sqrt{200}}\right) \\
 &\simeq \Phi(-21.85) \\
 &\simeq 0.
 \end{aligned}$$

Alternativamente, usando a máquina de calcular:

$$\begin{aligned}
 P(Y < 0) &= F_{N(309.02, 200)}(0) \\
 &\simeq 0.
 \end{aligned}$$

Exercício 2

(a) • Par aleatório

(X, Y)

• F.p. conjunta e f.p. marginais

$P(X = x, Y = y)$, $P(X = x)$ e $P(Y = y)$ encontram-se na tabela seguinte:

X	Y			$P(X = x)$
	-1	0	1	
-1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

• Prob. pedida

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 0 | Y = 1) &= P(X = -1 | Y = 1) + P(X = 0 | Y = 1) \\
 &= \frac{P(X = -1, Y = 1)}{P(Y = 1)} + \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} + \frac{0}{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 0 | Y = 1) &= \frac{P(X \leq 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
 &= \frac{P(X = -1, Y = 1)}{P(Y = 1)} + \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} + \frac{0}{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(b) • Covariância entre X e Y

Uma vez que pretende calcular

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X, Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea anterior.

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=-1}^1 x \times P(X = x) \\
 &= (-1) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de Y**

Tendo em conta que $Y \sim X$,

$$E(Y) = E(X)$$

- **Momento cruzado de X e Y de ordem $(1, 1)$**

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{x=-1}^1 \sum_{y=-1}^1 xy \times P(X = x, Y = y) \\
 &= (-1) \times (-1) \times \frac{1}{6} + (-1) \times 0 \times 0 + (-1) \times 1 \times \frac{1}{6} \\
 &\quad + 0 \times (-1) \times 0 + 0 \times 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times 1 \times 0 \\
 &\quad + 1 \times (-1) \times \frac{1}{6} + 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times \frac{1}{6} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- **Covariância entre X e Y (cont.)**

$$\begin{aligned}
 cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
 &= 0 - 0 \times 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

[logo X e Y são v.a. não linearmente associadas.]

- **Averiguação da independência entre X e Y**

Para já, recorde-se que

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
 P(X = -1, Y = -1) &= \frac{1}{6} \\
 &\neq P(X = -1) \times P(Y = -1) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{9}.
 \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que as v.a. X e Y são DEPENDENTES ($X \not\perp\!\!\!\perp Y$) [, embora não estejam linearmente associadas ($cov(X, Y) = 0$)].