Departamento de Matemática

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

RESOLUÇÃO DO SEGUNDO TESTE - VERSÃO A
17 DE DEZEMBRO DE 2016 - 8H

MEMEC, LEAN, MEC, LEGM

(1) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y' = \text{sen}(t)y^2; \quad y(0) = 2$$

indicando o intervalo máximo de definição da solução.
Resolução: Podemos escrever a equação como

$$\frac{y'}{y^2} = \text{sen}\, t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{y}\right) = \text{sen}\, t$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = 1 - \cos t \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\cos t - \frac{1}{2}}$$

Uma vez que $\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, o intervalo máximo de definição é $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$ (uma vez que é este o maior intervalo contido no domínio de diferenciabilidade da solução que contém o instante inicial).

(2) Determine explicitamente a expressão da solução geral da equação

$$y\left(y + \frac{1}{t}\right) + (2ty + \log t)\frac{dy}{dt} = 0$$

Resolução: Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + \frac{y}{t}\right) = 2y + t = \frac{\partial}{\partial t}(2ty + \log t)$$

a equação é exata. Um potencial ϕ é uma solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = y^2 + \frac{y}{t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2ty + \log t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi(t,y) = y^2 t + y\log(t) + A(y) \\ A'(y) = 0 \end{cases}$$

e portanto $\phi(t,y) = y^2 t + y\log(t)$ é um potencial para o campo vetorial que determina a equação. A solução geral da equação fica definida implicitamente pela equação

$$y^2 t + y\log t = K \quad \text{com } K \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$y(t) = \frac{-\log t \pm \sqrt{\log^2 t + 4Kt}}{2t}, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}$$

(3) Determine uma matriz A tal que $x(t) = e^{2t}(1,1)$ seja uma solução de $x' = Ax$.
Resolução: Uma vez que $x'(t) = 2e^{2t}(1,1)$, temos $x'(t) = Ax$ sse

$$2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Ae^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Podemos tomar por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Ache uma solução particular do sistema

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

Resolução: Uma vez que

$$e^{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a fórmula de variação das constantes garante que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{2(t-s)} \begin{bmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s}\cos s \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(s) + t - s \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(t) + \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é uma solução particular do sistema.

(5) (a) Determine a solução geral da equação

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

(b) Determine a solução geral da equação

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2t}$$

Resolução:

(a) Uma vez que

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

conclui-se que a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t} \operatorname{sen} t$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Temos

$$(D-(2+i))(D-(2-i))y = 2e^{2t} \Rightarrow (D-2)(D-(2+i))(D-(2-i))y = 0$$

logo uma solução da equação é da forma

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}\cos t + c_3 e^{2t} \operatorname{sen} t$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Basta substituir o primeiro termo na equação diferencial inicial uma vez que os restantes termos são soluções da equação homogénea. Obtemos

$$4c_1 e^{2t} - 8c_1 e^{2t} + 5c_1 e^{2t} = 2e^{2t} \Leftrightarrow c_1 = 2$$

e conclui-se então que $y(t) = 2e^{2t}$ é uma solução particular da equação, sendo a solução geral

$$y(t) = 2e^{2t} + c_2 e^{2t}\cos t + c_3 e^{2t}\operatorname{sen} t \qquad \text{com } c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

(6) Determine o desenvolvimento em série de Fourier da função $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 0 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

indicando o valor para o qual a série converge para cada $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Uma vez que a função é ímpar, a série de Fourier é uma série de senos, ou seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

com

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi + \frac{\pi}{2}\cos(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1} + \cos(\frac{n\pi}{2})}{n} - \frac{2\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Uma vez que a função f é seccionalmente C^1, a média dos limites laterais em $x = \pm\frac{\pi}{2}$ é $\pm\frac{\pi}{4}$, a média dos limites nas extremidades é 0, e a soma da série é periódica com período 2π, conclui-se que a série converge para todo o $x \in \mathbb{R}$ para a função

$$s(x) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{se } (2k-1)\pi < x < 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{\pi}{4} & \text{se } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(7) Determine a solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen}(t)u & \text{para } 0 \le x \le \pi, t \ge 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \ge 0 \\ u(x,0) = 2\operatorname{sen}(3x) + 5\operatorname{sen}(7x) & \text{para } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Resolução: Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + \operatorname{sen}(t)X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - \operatorname{sen} t = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} - \operatorname{sen} t = \lambda \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(t) = c_1 e^{\lambda t - \cos t} \\ (D^2 - \lambda)X = 0 \end{cases} \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}$$

As condições de fronteira $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ dizem que

$$X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$$

para soluções não nulas da forma $X(x)T(t)$. Para que uma solução $X(x)$ da equação $(D^2 - \lambda)X = 0$ se possa anular em dois pontos sem ser nula, as raízes do polinómio que determina a equação têm de ser imaginárias e portanto λ tem de ser negativo. Para $\lambda < 0$ obtemos

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$$

e

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \end{cases}$$

Conclui-se que para que haja soluções não nulas da equação e das condições fronteiras da forma $X(x)T(t)$ a constante λ tem de ser igual a $-n^2$ para algum $n = 1, 2, \ldots$ e nesse caso $u(x,t)$ é um múltiplo constante de

$$\operatorname{sen}(nx)e^{-n^2 t - \cos t}$$

Uma combinação linear das funções anteriores será ainda uma solução da equação do calor que satisfaz as condições fronteira e claramente

$$u(x,t) = 2e \operatorname{sen}(3x)e^{-9t - \cos t} + 5e \operatorname{sen}(7x)e^{-49t - \cos t}$$

é uma tal combinação linear que satisfaz a condição inicial. Conclui-se que é esta a solução pretendida.

(8) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = -y(x^2 + y^2) \\ y' = x(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Sugestão: Use coordenadas polares.

Resolução: Uma vez que $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$ temos $x' = -r^3 \operatorname{sen}\theta$ e $y' = r^3\cos\theta$. Derivando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos

$$r' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}x' + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}y' = \frac{r\cos\theta}{r}(-r^3\operatorname{sen}\theta) + \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r}r^3\cos\theta = 0$$

Logo $r(t)$ é constante, ou seja, as soluções do sistema estão contidas em circunferências centradas na origem. A primeira equação do sistema fica

$$(r\cos\theta)' = -r^3\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow -r\operatorname{sen}(\theta)\theta' = -r^3\operatorname{sen}(\theta) \Leftrightarrow \theta' = r^2$$

Logo

$$\theta(t) = r^2 t + \theta_0$$

Uma vez que $x(0) = 3$ e $y(0) = 4$ temos $r(0) = 5$ e $\theta(0) = \arctan\frac{4}{3}$ logo a solução do sistema (que é única pelo Teorema de Picard) é

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos(25t + \arctan\frac{4}{3}) \\ y(t) = 5\operatorname{sen}(25t + \arctan\frac{4}{3}) \end{cases}$$