

## Avaliação de majorantes do erro de soluções obtidas a partir de Métodos de Ordem Reduzida

**Vikesh Navinchandre**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Cívil**

Orientador: Prof. José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

**Júri**

Presidente: Prof. Orlando José Barreiros D' Almeida Pereira

Orientador: Prof. José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

Vogal: Prof. Pedro Díez Mejía

**Setembro 2021**



Aos meus pais e à minha irmã.



Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.



## **Agradecimentos**

Começo por agradecer ao meu orientador, Prof. J.P. Moitinho de Almeida, por me ter proposto este tema e pelas críticas construtivas, preciosas discussões e ajuda fornecida durante a realização deste trabalho, e ainda agradecer pelo tempo despendido na revisão da tese.

Agradeço também ao Dr. Jonatha Reis pela explicação e pela ajuda fornecida relativamente à utilização do programa em *Matlab*.

Ao Instituto Camões pela bolsa de estudo atribuída, porque sem esta ajuda não seria possível cá estar. Gostaria de agradecer à minha família, especialmente aos meus pais, por sempre acreditarem em mim, e por fim agradecer aos meus colegas do curso pela ajuda durante os estudos e pelos momentos compartilhados nestes últimos anos.





## Resumo

Associadas aos avanços contínuos em modelação e computação, as simulações numéricas tornaram-se numa ferramenta essencial nas atividades diárias dos campos das ciências e engenharias [1]. Contudo, para modelos multi-dimensionais, ao utilizar métodos numéricos clássicos, em que a solução é calculada para cada conjunto de valores dos parâmetros, estas abordagens sofrem a chamada *maldição da dimensionalidade*, por envolver um número exponencial de soluções a determinar. Abordagens alternativas, como os métodos de ordem reduzida, foram desenvolvidos para evitar este problema. Este trabalho foca-se na aplicação de uma dessas técnicas, a Proper Generalized Decomposition (PGD) para a obtenção de soluções complementares aproximadas, uma compatível e outra equilibrada, para as variáveis essenciais de dois problemas simples de elasticidade plana. Estas soluções são usadas para determinar os majorantes do erro global e local e com base nesta informação é possível conduzir o processo de refinamento adaptativo, que tem em conta o efeito da variação dos parâmetros.

Para os problemas analisados, nomeadamente uma placa quadrada sujeita a tração e uma placa encastrada em ambas as extremidades sujeita a uma pressão no topo, mesmo usando malhas refinadas, verifica-se que o número de modos necessários para obter uma solução com uma precisão adequada acaba por ser menor que umas dúzias. No entanto, para uma dada precisão, usar malhas refinadas implica geralmente um maior número de modos, uma vez que mais detalhes do modelo estão a ser capturados. Observa-se ainda que os maiores valores dos majorantes do erro ocorrem em geral quando os materiais apresentam valores extremos opostos do módulo de elasticidade e esses majorantes são menores quando as propriedades são iguais. Finalmente, usando o processo de refinamento adaptativo orientado para uma dada quantidade de interesse, resulta geralmente em valores menores para o erro da referida quantidade de interesse do que um refinamento uniforme ou do refinamento baseado no indicador do erro global ou local para outra quantidade. Usando o indicador do erro global para conduzir o processo de refinamento adaptativo resulta em valores menores para os erros globais das soluções e a um balanço entre os diferentes majorantes do erro local.

**Palavras-chave:** Elasticidade 2D, Modelos de Ordem Reduzida, Proper Generalized Decomposition, Quantidades de Interesse, Estimativas do erro, Processo Adaptativo



## Abstract

Associated with the continuous advances in both modeling and computing resources, numerical simulations became an everyday tool in science and engineering activities [1]. Yet, for multi-parameter models, using classical numerical techniques, where one solution is computed for each set of parameters, those approaches suffer from the so called *curse of dimensionality*, due to the exponentially large number of solutions involved. Alternative approaches, such as reduced order methods, have been developed to avoid this problem. This work is focused on the application of one of these techniques, the Proper Generalized Decomposition (PGD) for obtaining approximated complementary solutions, one compatible and other equilibrated, for the essential unknowns of two simple problems of plane elasticity. These solutions are used to compute global and local bounds of their errors and based on this information it is possible to drive a mesh adaptivity process, which accounts for the effect of varying the parameters.

For the problems analysed, namely a square plate subjected to a traction and a plate fixed at both ends subjected to a pressure on top, even using finer meshes, it is observed that the number of modes required to obtain an accurate solution turns out to be smaller than a few dozens. However, for a given level of accuracy, using finer meshes generally implies a large number of modes, since more details of the model are being captured. It is also observed that higher values for the bounds of the error of local outputs occur in general when the materials have extreme opposite values of the Young's modulus and these bounds are smaller when the properties are equal. Finally, using a mesh adaptivity process oriented for a given quantity of interest, led in general to smaller values for the error on that local output than an uniform refinement or the refinement based on either the global error indicator or the local error indicator for another quantity. Using the global error indicator to drive the adaptivity process led to smaller global errors for the solutions and to a balance between the different local error bounds.

**Keywords:** 2D Elasticity, Model Order Reduction, Proper Generalized Decomposition, Quantities of Interest, Errors Estimation, Adaptivity Process



# Índice

Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
Lista de Tabelas . . . . .	viii
Lista de Figuras . . . . .	x
Lista de Símbolos . . . . .	xv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Enquadramento do Tema . . . . .	2
1.3 Objectivos . . . . .	3
1.4 Organização do Trabalho . . . . .	4
<b>2 Bases Teóricas</b>	<b>5</b>
2.1 Equações Governativas da Elasticidade Plana . . . . .	5
2.2 Formulação de Elementos Finitos Compatível . . . . .	7
2.3 Formulação de Elementos Finitos Híbrida Equilibrada . . . . .	8
2.4 Representação Separada do PGD . . . . .	10
2.5 Integração da Representação Separada . . . . .	11
2.6 Majorantes do Erro . . . . .	11
2.6.1 Majorante do Erro Global . . . . .	11
2.6.2 Quantidade de Interesse e Majorantes do erro . . . . .	12
2.7 Processo Adaptativo . . . . .	13
<b>3 Programa em <i>Matlab</i></b>	<b>15</b>
3.1 Estrutura do Programa . . . . .	15
3.2 Modelo Estrutural e Pós-Processamento dos Resultados . . . . .	15
3.3 Algoritmo do PGD . . . . .	17
<b>4 Exemplos de aplicação</b>	<b>22</b>
4.1 Critérios de Paragem do PGD e do Processo Adaptativo . . . . .	22
4.2 Placa quadrada composta por dois materiais . . . . .	23

4.2.1	Convergência Global: Deslocamentos ( $u$ ) e Tensões ( $\sigma$ ) . . . . .	24
4.2.2	Convergência das Quantidades de Interesse ( $QdI$ ) . . . . .	37
4.3	Placa bi-encastada composta por dois materiais . . . . .	54
4.3.1	Geometria da placa: $a=b=1$ . . . . .	55
4.3.2	Geometria da placa: $a = 1, b = 2$ . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>78</b>
5.1	Desenvolvimentos Futuros . . . . .	80
	<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Construção da solução pelo PGD</b>	<b>A.1</b>

# Lista de Tabelas

4.1	Domínio dos parâmetros ( $E, \nu$ ) para cada secção . . . . .	24
4.2	Valor da Reação Horizontal, $\mathcal{R}_h$ , e majorantes do erro em função do número de modos para diferentes combinações dos módulos de elasticidade dos materiais (refinamento uniforme: $n_e = 16$ ). . . . .	38
4.3	Valor médio dos Momentos, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ , e respetivos majorantes do erro, em função do número de modos, para as situações com os módulos de elasticidade dos materiais iguais (refinamento uniforme: $n_e = 16$ ). . . . .	39
4.4	Valor médio dos Momentos, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ , e respetivos majorantes do erro, em função do número de modos, para as situações com os módulos de elasticidade dos materiais iguais (refinamento uniforme: $n_e = 1024$ ). . . . .	39
4.5	Valor médio do Momento, $\mathcal{M}_1$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais extremos opostos (refinamento uniforme: $n_e = 16$ e $n_e = 1024$ ) . . . . .	40
4.6	Valor médio do Momento, $\mathcal{M}_1$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais de valores extremos opostos (local: $n_e = 1070$ e global: $n_e = 1379$ ) . . . . .	43
4.7	Solução exata do problema homogéneo para as quantidades de interesse $\delta_h$ e $\delta_v$ , para diferentes combinações de parâmetros $E$ e $\nu$ . . . . .	44
4.8	Valor do deslocamento médio, $\delta_h$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para diferentes combinações do coeficiente de <i>Poisson</i> $\nu$ , fixando $\Omega_E$ (refinamento uniforme: $n_e = 16$ ) . . . . .	45
4.9	Valor do deslocamento médio, $\delta_v$ , e majorantes do erro em função do número de modos, para diferentes combinações do coeficiente de <i>Poisson</i> $\nu$ , fixando $\Omega_E$ (refinamento uniforme: $n_e = 16$ ). . . . .	45
4.10	Valores dos deslocamentos médios, $\delta_h$ , e majorantes do erro em função do número de modos para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico, fixando $\Omega_\nu$ (refinamento uniforme: $n_e = 16$ ) . . . . .	45
4.11	Valor dos deslocamentos médios, $\delta_v$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico, fixando $\Omega_\nu$ (refinamento uniforme: $n_e = 16$ ) . . . . .	46

4.12	Valores médios do deslocamento, $\delta_h$ , e majorantes do erro, em função ao número de modos, variando $\Omega_E$ e $\Omega_\nu$ . . . . .	49
4.13	Valores médios do deslocamento, $\delta_v$ , e majorantes do erro, em função ao número de modos, variando $\Omega_E$ e $\Omega_\nu$ . . . . .	50
4.14	Valor médio do deslocamento, $\delta_v$ , e majorante do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais de valores iguais e usando três diferentes tipos de malhas . . . . .	51
4.15	Valor médio do deslocamento, $\delta_v$ , e majorante do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais de valores extremos opostos e usando três diferentes tipos de malhas . . . . .	52
4.16	Integral dos majorantes do erro para $\mathcal{M}_1$ , $\delta_h$ e $\delta_v$ usando uma malha obtida de um refinamento uniforme e as malhas obtidas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando como $Qdl$ $\mathcal{M}_1$ . . . . .	53
4.17	Domínio dos parâmetros ( $E, \nu$ ) de cada secção. Geometria da placa: $a = b = 1$ . . . . .	55
4.18	Valor da $Qdl$ , $M_1$ , e majorantes do erro, para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico. . . . .	65
4.19	Domínio dos parâmetros ( $E$ e $\nu$ ) de cada secção. Geometria da placa: $a = 1$ ; $b = 2$ . . . . .	68
4.20	Valor médio da $Qdl$ , $M_2$ , e majorantes do erro, para as combinações correspondente aos 4 cantos do domínio paramétrico. . . . .	73



# Lista de Figuras

2.1	Problema de referência . . . . .	5
2.2	Coordenadas cartesianas positivas para as componentes de tensão em 2D . . . . .	6
2.3	Modelo de elementos finitos para uma região irregular . . . . .	8
3.1	Esquema representativo da estrutura do programa que aplica o PGD e o processo de refinamento adaptativo em ambiente <i>Matlab</i> . . . . .	16
3.2	Esquema detalhado do Processo de Refinamento Adaptativo. . . . .	16
3.3	Algoritmo do PGD na determinação dos termos da expansão numa determinada etapa de enriquecimento $n$ . . . . .	20
4.1	Simplificação de simetria da placa quadrada . . . . .	23
4.2	Malhas de elementos finitos usadas para o estudo da convergência das soluções pelo PGD de $u$ e $\sigma$ . . . . .	24
4.3	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme: $n_e = 256$ ). . . . .	26
4.4	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 3-6 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme: $n_e = 256$ ). . . . .	27
4.5	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondente às combinações com a parte superior flexível. 1ª linha - uniforme: $n_e = 1024$ ; 2ª linha - global: $n_e = 1589$ . . . . .	29
4.6	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 3-6 modos e correspondente às combinações com a parte superior flexível. 1ª linha - uniforme: $n_e = 1024$ ; 2ª linha - global: $n_e = 1589$ . . . . .	30
4.7	Distribuição de tensões $\sigma_{yy}$ no encastramento deslizante inferior da placa (malha uniforme: $n_e = 1024$ ). . . . .	31
4.8	Distribuição de tensões $\sigma_{xx}$ no encastramento deslizante esquerdo da placa (malha uniforme: $n_e = 1024$ ). . . . .	32

4.9	Trajectória das Tensões Principais para os casos em que as secções apresentam módulos de elasticidade extremos opostos . . . . .	32
4.10	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme: $n_e = 256$ ) . . . . .	34
4.11	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 3-6 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme: $n_e = 256$ ). . . . .	35
4.12	Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ) e correspondente às combinações com a parte superior flexível (global: $n_e = 1589$ ). 1ª linha - Solução com 1-3 modos ; 2ª linha - Solução com 3-6 modos . . . . .	36
4.13	Quantidades de Interesse e Problemas Virtuais . . . . .	37
4.14	Esquema representativo das Quantidades de Interesse consideradas e correspondentes Problemas Virtuais. . . . .	37
4.15	Valor médio do Momento, $\mathcal{M}_1$ , e os seus limites, em função do número de modos, para as combinações dos módulos de elasticidade das secções correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico e para diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme. . . . .	40
4.16	Valor médio, $\mathcal{M}_1$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais. . . . .	41
4.17	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.16(a) para: $E_2 = 0.1$ , $E_1 = 2.1$ , $E_2 = 2.1$ e $E_1 = 0.1$ . . . . .	41
4.18	Majorantes do erro associados aos valores de $\mathcal{M}_1$ , para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade e para diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme. . . . .	41
4.19	Malhas de elementos finitos geradas a partir refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando o momento, $\mathcal{M}_1$ , como a $Qdl$ . . . . .	42
4.20	Integral no espaço paramétrico do majorante do erro em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando o momento, $\mathcal{M}_1$ , como a $Qdl$ . . . . .	43
4.21	Majorantes do erro associados aos valores de $\mathcal{M}_1$ , para várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais e para três diferentes tipos de malhas. . . . .	44
4.22	Valores dos deslocamentos médios, $\delta_h$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais. . . . .	46
4.23	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.22(a) para: $E_2 = 0.1$ e $E_1 = 2.1$ . . . . .	46
4.24	Valores dos deslocamentos médios, $\delta_v$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais. . . . .	47
4.25	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.24(a) para: $E_2 = 0.1$ e $E_1 = 2.1$ . . . . .	47

4.26 Majorantes do erro para os deslocamentos médios, $\delta_h$ e $\delta_v$ , para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais e usando diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme. . . . .	48
4.27 Malhas de elementos finitos geradas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando o deslocamento vertical, $\delta_v$ , como a $Qdl$ . . . . .	50
4.28 Integral dos majorantes do erro em função do número de elementos das malhas geradas a partir do refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseado no indicador do erro global e local, usando o deslocamento vertical, $\delta_v$ , como a $Qdl$ . . . . .	51
4.29 Majorantes do erro para o valor do deslocamento médio, $\delta_v$ , para as várias combinações de valores no espaço dos parâmetros e usando três diferentes tipos de malhas. . . . .	52
4.30 Geometria do problema, simplificação de simetria, problema real e virtual. . . . .	54
4.31 Esquema representativo das Quantidades de Interesse e os correspondentes Problemas Virtuais. . . . .	54
4.32 Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando como $Qdl$ $\delta_{v_1}$ . . . . .	55
4.33 Esquema das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando como $Qdl$ $\delta_{v_1}$ . . . . .	56
4.34 Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global. Tolerâncias $\tau$ do PGD entre $\tau = 10^{-1}$ e $\tau = 10^{-4}$ . . . . .	57
4.35 Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local. Tolerâncias $\tau$ do PGD entre $\tau = 10^{-1}$ e $\tau = 10^{-4}$ . . . . .	57
4.36 Malhas de elementos finitos geradas a partir de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, para as tolerâncias $\tau = 10^{-1}$ e $\tau = 10^{-4}$ . . . . .	58
4.37 Valores dos deslocamentos médios, $\delta_{v_1}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais. . . . .	58
4.38 Secções específicas do gráfico da Fig. 4.37 para: $E_2 = 2.1$ e $E_1 = 2.1$ . . . . .	59
4.39 Secções específicas do gráfico da Fig. 4.37 para: $E_2 = 1.0$ e $E_2 = 0.1$ . . . . .	59
4.40 Valores dos deslocamentos médios, $\delta_{v_1}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais. . . . .	60
4.41 Secção específica dos gráficos da Fig. 4.40 para $E_2 = 2.1$ . . . . .	60
4.42 Secção específica dos gráficos da Fig. 4.40 para $E_1 = 2.1$ . . . . .	60
4.43 Majorantes do erro associados ao valor médio, $\delta_{v_1}$ , para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais e para diferentes tipos de malhas. . . . .	62
4.44 Secções específicas dos gráficos da Fig. 4.43 para: $E_2 = 2,1$ e $E_1 = 2,1$ . . . . .	62
4.45 Secções específicas dos gráficos da Fig. 4.43 para: $E_2 = 1,0$ e $E_2 = 0,1$ . . . . .	62

4.46	Majorantes do erro associados ao valor médio, $\delta_{V_1}$ , em função do número de elementos das malhas e para combinações específicas dos módulos de elasticidade dos materiais.	63
4.47	Diferença do valor médio da $Qdl$ , $\delta_{V_1}$ , correspondente a diferentes malhas com $\delta_{V_1}^{2084}$ relativa a uma malha de referência (local: $n_e = 2084$ ) para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais.	64
4.48	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.47 para: $E_2 = 2.1$ e $E_1 = 2.1$ .	64
4.49	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.47 para: $E_2 = 1.0$ e $E_2 = 0.1$ .	64
4.50	Campo de deslocamentos ( $u$ ), e componente de tensão $\sigma_{xx}$ , referentes aos casos em que os módulos de elasticidades dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme: $n_e = 768$ ).	67
4.51	Diagrama de deslocamentos $u_y$ à meia largura da placa para valores extremos opostos dos módulos de elasticidade dos materiais (malha uniforme: $n_e = 768$ ).	67
4.52	Diagrama de tensões $\sigma_{xx}$ à meia largura da placa quando os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme: $n_e = 768$ ).	67
4.53	Diagrama de tensões $\sigma_{xx}$ no apoio quando os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme: $n_e = 768$ ).	68
4.54	Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando como $Qdl$ $\delta_{V_2}$ .	69
4.55	Esquema das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando como $Qdl$ $\delta_{V_2}$ .	70
4.56	Valores dos deslocamentos médios, $\delta_{V_2}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais.	71
4.57	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.56 para: $E_2 = 2.1$ e $E_1 = 2.1$ .	71
4.58	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.56 para: $E_2 = 1.0$ e $E_2 = 0.1$ .	71
4.59	Valores do deslocamento médio, $\delta_{V_2}$ , correspondente à solução de referência (local: $n_e = 852$ ) e os limites para as soluções com 1 e 10 modos do PGD da malha grosseira (uniforme: $n_e = 8$ ).	72
4.60	Secções específicas do gráfico da Fig. 4.59 para os casos: $E_2 = 2.1$ , $E_1 = 2.1$ , $E_1 = 0.1$ e $E_2 = 0.1$ .	73
4.61	Diagrama de deslocamentos $u_y$ à meia largura da placa para os casos em que os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme: $n_e = 512$ ).	74
4.62	Representação do modelo de viga, e respetiva simplificação de simetria, com a secção transversal da placa	74
4.63	Diagrama de tensões $\sigma_{xx}$ a meio vão do modelo de viga à luz da Teoria de Bernoulli.	75
4.64	Diagrama de tensões $\sigma_{xx}$ na secção à meia largura do modelo de placa, calculada através do PGD (malha uniforme: $n_e = 512$ ).	76

4.65 Trajetória das Tensões Principais para as situações em que os materiais apresentam valores de módulos de elasticidade extremos opostos e para a situação em que os módulos de elasticidade são iguais. . . . .	76
A.1 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{yy}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global: $n_e = 1589$ ). . . . .	A.2
A.2 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xy}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global: $n_e = 1589$ ). . . . .	A.3
A.3 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondente às combinações com a parte superior rígida. 1ª linha - uniforme: $n_e = 1024$ ; 2ª linha - global: $n_e = 1589$ . . . . .	A.4
A.4 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme: $n_e = 512$ ). . . . .	A.5
A.5 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global: $n_e = 686$ ). . . . .	A.6
A.6 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme: $n_e = 512$ ). . . . .	A.7
A.7 Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global: $n_e = 686$ ). . . . .	A.8



# Lista de Símbolos

## Simbolos gregos

$\delta$	Deslocamento
$\epsilon^2$	Energia da diferença entre as soluções complementares
$\epsilon_{\text{a}_{\text{local}}}$	Majorante do erro local
$\Gamma_D$	Fronteira de Dirichlet
$\Gamma_N$	Fronteira de Neumann
$\lambda$	Parâmetro referente ao módulo de elasticidade do material
$\mu$	Vetor dos parâmetros referente às propriedades dos materiais
$\nu$	Coefficiente de <i>Poisson</i>
$\Omega$	Domínio
$\Omega^e$	Domínio elementar
$\bar{\sigma}$	Campo de tensões virtual
$\bar{\epsilon}$	Campo de deformações virtual
$\Phi^*$	Função de Peso do resíduo
$\Pi$	Energia Potencial do sistema
$\Pi_c$	Energia Potencial complementar do sistema
$\Psi$	Integral do majorante do erro
$\sigma$	Campo de tensões
$\tau$	Tolerância do PGD
$\epsilon$	Campo de deformações

## Simbolos romanos

b	Forças de massa
---	-----------------

$\mathcal{C}$	Operador de elasticidade
$D$	Operador diferencial em relação às coordenadas espaciais
$\hat{e}$	Trabalho dos deslocamentos e deformações impostas nas bases das tensões auto-equilibradas
$E$	Módulo de Elasticidade
$\mathcal{F}$	Matriz de flexibilidade global
$\hat{f}$	Forças nodais equivalentes
$\mathcal{K}$	Matriz de rigidez global
$\mathcal{K}_{[e]}$	Matriz de rigidez elementar
$K$	Rigidez
$\mathcal{L}_k$	Quantidade de interesse correspondente a um deslocamento
$\mathcal{L}_s$	Quantidade de interesse correspondente a uma reação
$\mathcal{M}, M$	Momento
$\mathcal{N}$	Modos do PGD
$N, \bar{n}$	Operador de fronteira
$\hat{s}(\mu)$	Aproximação para o campo de tensões em função das propriedades dos materiais
$\hat{u}(\mu)$	Aproximação para o campo de deslocamentos em função das propriedades dos materiais
$\hat{s}$	Pesos das funções de distribuição de tensões
$S$	Funções de distribuição de tensões
$s_h$	Aproximação equilibrada para o campo de tensões
$\bar{t}$	Tração aplicada na fronteira $\Gamma_N$
$\hat{t}$	Trabalho das trações impostas nas bases dos deslocamentos da fronteira
$\mathcal{U}$	Energia de deformação
$\bar{u}$	Deslocamentos impostos na fronteira $\Gamma_D$
$\hat{u}$	Deslocamentos nodais
$U$	Funções de aproximação dos deslocamentos
$u$	Campo de deslocamentos
$\mathcal{U}_c$	Energia complementar de deformação
$u_h$	Aproximação compatível para o campo de deslocamentos



$\hat{V}$	Pesos das funções de aproximação dos deslocamentos dos lados
$V$	Funções de aproximação dos deslocamentos dos lados
$\mathcal{V}_h^i$	Energia associada às condições híbridas
$v_h$	Aproximação para os deslocamentos dos lados dos elementos
$\mathcal{W}$	Trabalho das forças exteriores
$\mathcal{W}_c$	Trabalho dos deslocamentos impostos na fronteira
$\mathbf{x}$	Parâmetro referente às coordenadas espaciais

### **Subscritos**

$h$	Horizontal
$k$	Compatível
$s$	Equilibrado
$V, v$	Vertical

### **Sobrescritos**

$T$	Transposto
-----	------------



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Associadas aos avanços contínuos em modelação e computação, as simulações numéricas tornaram-se numa ferramenta essencial nas atividades diárias dos campos das ciências e engenharias [1]. Realmente, esta prática está cada vez mais disseminada no dia-a-dia, nomeadamente o seu uso em grandes projetos de engenharia, pelo facto de simplificarem a análise e desenvolvimento de sistemas complexos. O avanço das tecnologias nas últimas décadas é claramente o principal impulsionador desta forma de abordagem aos problemas, uma vez que a disponibilidade de recursos computacionais é cada vez mais vasta, tornando assim esta tarefa cada vez mais facilitada, à distância de um clique e com a obtenção da solução em tempo útil. Neste sentido, é possível resolver numericamente até uma certa precisão e sem grande esforço computacional, modelos complexos que visam a representação do sistema real.

Contudo, esta prática torna-se pouco eficiente e quase impossível, devido ao elevado esforço do ponto de vista computacional, quando se abordam modelos definidos num espaço com um grande número de parâmetros envolvidos [1]. Este não é o cenário ideal para modelos que surgem, por exemplo, nas áreas de química quântica para descrever a estrutura interna e comportamento dos materiais, dinâmica de fluidos complexos, sistemas biológicos complexos, etc. [2], em que a abordagem destes por meio da formulação clássica de elementos finitos não é a mais apropriada, uma vez que o número de soluções a determinar cresce exponencialmente com o número de parâmetros adicionados ao modelo, sofrendo a chamada *maldição da dimensionalidade*. Consequentemente, abordagens alternativas e inovadoras foram desenvolvidas para evitar este problema.

Neste contexto, introduzem-se os métodos de ordem reduzida que tornam possível a resolução eficiente de modelos multi-dimensionais com um número elevado de parâmetros, reduzindo assim o tempo e esforço computacional. Entre os diversos métodos de ordem reduzida, aplica-se neste trabalho o PGD (*Proper generalized decomposition*). A ideia básica do PGD, consiste em aproximar a resposta do sistema físico até uma dada precisão como uma soma finita de termos, cada um deles consistindo no produto de funções separáveis. Considerando  $u$  como sendo a resposta do sistema físico dependente

de  $n$  parâmetros, a aproximação pelo PGD resulta em:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i^1(x_1) \times \dots \times F_i^n(x_n)$$

onde o número de termos  $\mathcal{N}$  e as funções  $F_i^j(x_j)$  são desconhecidas *a priori*.

Embora a utilização desta técnica se justifique mais no contexto de modelos com um número elevadíssimo de parâmetros, estes estão noutra patamar face a alguns problemas encontrados nas atividades correntes. Neste sentido, o PGD também permite uma abordagem completamente diferente a problemas mais *standard* das ciências e engenharias [2], abrindo novas portas, como por exemplo a possibilidade de otimização dos modelos. De facto, tome-se como exemplo os modelos matemáticos para problemas de elasticidade ou difusão de calor em que as propriedades dos materiais costumam ser, respetivamente, os valores fixos ou, se se preferir, os dados do problema. Com esta técnica pode-se procurar resolver um problema mais geral para os valores daquelas propriedades definidas num dado domínio, passando assim a desempenhar o papel de parâmetros do problema, para além dos parâmetros convencionais de espaço ou tempo. Deste modo, em vez de resolver o mesmo problema diversas vezes para cada conjunto de valores daqueles parâmetros, resolve-se de uma única vez um problema mais geral, estando logo os resultados disponíveis para consulta, pelo que resta apenas ao usuário especificar os valores dos parâmetros para o qual deseja a solução.

A difusão crescente do PGD, nos últimos anos, tem originado inúmeros trabalhos de investigação, relativos aos fundamentos do método e a sua aplicação em problemas correntes nas áreas de engenharias.

## 1.2 Enquadramento do Tema

Foca-se nesta dissertação na aplicação do PGD na análise elástica linear de problemas de mecânica estrutural. Estes problemas são geralmente definidos especificando a geometria, as condições de apoio, propriedades mecânicas dos materiais e o carregamento. E a resposta física do sistema a determinar, em termos de tensões,  $\sigma$ , e deslocamentos,  $u$ , está intrinsecamente dependente daqueles detalhes. Neste contexto, a aplicação do PGD pode revelar-se útil para lidar com determinados problemas, nomeadamente:

- Em estruturas compósitas, no qual se pretende obter melhor entendimento da resposta física do sistema, em termos de deslocamentos e tensões, para diferentes combinações de valores das propriedades mecânicas dos materiais;
- Em estruturas assentes sobre apoios discretos, para ajudar a perceber o comportamento da estrutura aquando da variação relativa das propriedades mecânicas (rigidez) dos apoios e o seu impacto no funcionamento da mesma.

Comparativamente a uma análise clássica por elementos finitos, que constitui o método mais utilizado nesta área, a aplicação do PGD simplifica em grande parte a análise dos problemas uma vez

que não requer a modificação dos detalhes do modelo e a sua consequente reanálise, permitindo assim a obtenção de múltiplas respostas e a tomada de decisão, em contexto de projeto, em tempo útil. Por exemplo, imaginando-se que pretende obter a resposta física da estrutura,  $u$  ou  $\sigma$ , dependente de  $D = 3$  parâmetros referentes as propriedades mecânicas dos 3 materiais que constituem o modelo, utilizar  $M = 10$  valores para a discretização dos valores no domínio dos parâmetros, resulta em  $M^D = 10^3$  combinações a calcular, o que levaria uma eternidade, caso se utilizasse a abordagem clássica de elementos finitos para calcular cada combinação, enquanto que, usando o PGD, o número de soluções a calcular corresponde a  $\mathcal{N} \times M \times D = \mathcal{N} \times 30$ , i.e, a complexidade cresce linearmente com o número de parâmetros adicionados ao modelo e não exponencialmente. Seria também ideal obter soluções que dependessem da geometria do problema, porém, pelo facto de a inversa da matriz jacobiana de transformação de coordenadas não ser de fácil manipulação, surgem dificuldades na construção de uma representação separada da solução do problema em função dos parâmetros da geometria, que não se considerou neste trabalho.

Uma vez que o PGD, assim como a maior parte das técnicas numéricas, calcula uma aproximação da solução, é crucial controlar os seus erros. Neste sentido, explora-se o conceito da análise dual do erro, que consiste em calcular os majorantes do erro a partir de um par de soluções complementares aproximadas, uma equilibrada e outra compatível. Com base nesta informação dos erros, conduz-se um processo de refinamento adaptativo das malhas.

### 1.3 Objectivos

Esta dissertação é desenvolvida com base no trabalho desenvolvido na Tese de Doutoramento do Dr. Jonatha Reis, recentemente concluída [3], procurando identificar através da sua aplicação a dois problemas simples de elasticidade plana, vantagens e desvantagens da abordagem. São traçados os seguintes objetivos:

- Formular o problema a analisar e os meios disponíveis para calcular uma aproximação da solução;
- Formular a representação separada da PGD da solução em função das propriedades dos materiais;
- Formular a técnica da análise dual do erro e a sua aplicação no processo de refinamento adaptativo das malhas;
- Analisar os resultados da PGD e do processo de refinamento adaptativo em cada problema, com vista a identificar as vantagens e desvantagens.

## 1.4 Organização do Trabalho

Com vista a cumprir os objetivos especificados, o trabalho encontra-se subdividido nos seguintes capítulos:

- Bases Teóricas
- Programa em *Matlab*
- Exemplos de aplicação
- Conclusões

No Capítulo 2, apresentam-se as bases teóricas relevantes ao tema em análise. No capítulo 3, faz-se uma breve descrição do funcionamento do programa em ambiente *Matlab*, desenvolvido pelo Dr. Jonatha Reis, que aplica o PGD e as outras funcionalidade inerentes, nomeadamente o refinamento adaptativo das malhas. No capítulo 4, apresentam-se exemplos de aplicação do método a problemas simples e práticos, com vista a verificar os resultados e as vantagens e desvantagens da sua aplicação. Por fim, o último capítulo dedica-se a apresentação das conclusões e algumas linhas orientadoras para futuros trabalhos no tema.

## Capítulo 2

# Bases Teóricas

Neste capítulo apresentam-se as bases teóricas relevantes ao tema, nomeadamente as equações governativas do problema, formulações de elementos finitos compatível e híbrida equilibrada, formulação do PGD na obtenção de soluções aproximadas em função das propriedades dos materiais, a integração de funções na sua forma separada, a formulação da análise dual do erro, e por fim, a definição de indicadores do erro que permitem conduzir o processo de refinamento adaptativo das malhas.

### 2.1 Equações Governativas da Elasticidade Plana

Considere-se o corpo elástico linear ocupando o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  cuja fronteira é  $\Gamma$ , sujeito à ação de forças de massa  $b$ , tração  $\bar{t}$  e deslocamentos  $\bar{u}$  impostos na fronteira, correspondente às condições de Neumann, em  $\Gamma_N$ , e Dirichlet, em  $\Gamma_D$ , tal que  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ .

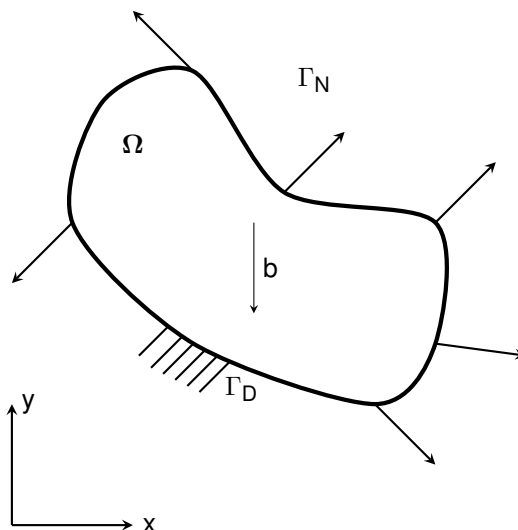


Figura 2.1. Problema de referência

No referencial cartesiano  $(x,y)$  a equação de compatibilidade é definida por:

$$\varepsilon = Du \tag{2.1}$$

onde as deformações  $\varepsilon$  e os deslocamentos  $u$  são representados, em termos das suas componentes, pelos vetores:

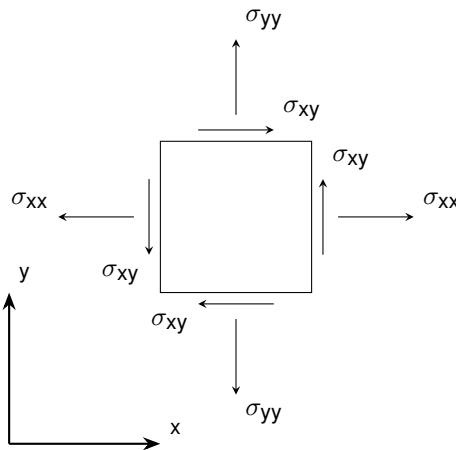
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

e com o operador diferencial  $D$  a ser dado por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Sendo  $\sigma$  o campo de tensões de Cauchy, a equação de equilíbrio é dada pela expressão:

$$D^T \sigma + b = 0 \quad (2.4)$$



**Figura 2.2.** Coordenadas cartesianas positivas para as componentes de tensão em 2D

onde as tensões  $\sigma$  e as forças de massa  $b$  são representados, em termos das suas componentes, pelos vetores:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sendo  $\mathcal{C}$  o operador de elasticidade, a relação constitutiva é expressa por:

$$\varepsilon = \mathcal{C} \sigma \quad (2.6)$$

e para um material isotrópico com módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ , o operador de



elasticidade  $\mathcal{C}$ , em estados planos de tensão, é dado por:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

A condição de fronteira de Dirichlet é definida como:

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_D \quad (2.8)$$

A condição de fronteira de Neumann é expressa por:

$$\mathbf{N}\sigma - \bar{\mathbf{t}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_N \quad (2.9)$$

sendo  $\mathbf{N}$  o operador de fronteira, que reúne as componentes do versor da normal exterior à fronteira,  $\Gamma_N$ , expresso como:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

## 2.2 Formulação de Elementos Finitos Compatível

Para qualquer campo de deslocamentos compatível  $\mathbf{u}$ , define-se a energia potencial do sistema  $\Pi$  como:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \mathcal{U}(\varepsilon(\mathbf{u})) - \mathcal{W}(\mathbf{u}) \quad (2.11)$$

onde  $\mathcal{U}$  corresponde a energia de deformação, expressa por:

$$\mathcal{U}(\varepsilon(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon(\mathbf{u}))^T \mathcal{C}^{-1} \varepsilon(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (2.12)$$

e o trabalho das forças exteriores  $\mathcal{W}$  por:

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (2.13)$$

A solução para o problema definido em 2.1, pode ser obtido minimizando a equação (2.11):

$$\min(\Pi(\mathbf{u})) = \min(\mathcal{U}(\varepsilon(\mathbf{u})) - \mathcal{W}(\mathbf{u})) \quad (2.14)$$

Usando uma abordagem clássica de elementos finitos, um campo aproximado de deslocamentos  $\mathbf{u}_h$ , pode ser expresso por:

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{U} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

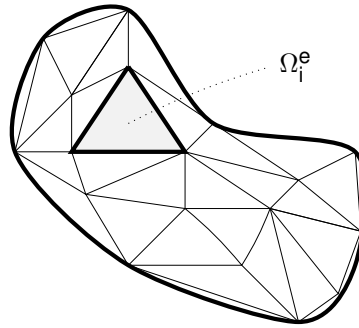
em que  $U$  corresponde às funções de aproximação dos deslocamentos e  $\hat{u}$  aos deslocamentos nodais. A relação entre as deformações e os deslocamentos nodais é expressa por:

$$\varepsilon = (DU) \hat{u} = B \hat{u} \quad (2.16)$$

Substituindo as expressões (2.15) e (2.16) em (2.14), resulta na equação fundamental:

$$\mathcal{K} \hat{u} = \hat{f} \quad (2.17)$$

onde  $\mathcal{K}$  representa a matriz de rigidez global e  $\hat{f}$  o vetor das forças nodais equivalentes, associadas ao trabalho das forças exteriores nas bases dos deslocamentos. Esta formulação usual de elementos finitos impõe fortemente a compatibilidade, enquanto que o equilíbrio é imposto na sua forma fraca.



**Figura 2.3.** Modelo de elementos finitos para uma região irregular

A contribuição de cada partição,  $\Omega_i^e$ , para a matriz de rigidez global,  $\mathcal{K}$ , é expressa por:

$$\mathcal{K}_{[e]} = \int_{\Omega_i^e} B^T C^{-1} B d\Omega_i^e \quad (2.18)$$

Refira-se que, na aplicação do PGD aos problemas de elasticidade plana utilizam-se elementos finitos triangulares para a partição do domínio, adotando funções de aproximação dos deslocamentos  $U$ , do 2º grau, que implicam tensões  $\sigma$  do 1º grau.

## 2.3 Formulação de Elementos Finitos Híbrida Equilibrada

Para qualquer campo de tensões de Cauchy equilibrado  $\sigma$ , define-se a energia potencial complementar do sistema  $\Pi_c$  como:

$$\Pi_c(\sigma) = \mathcal{U}_c(\sigma) - \mathcal{W}_c(\sigma) \quad (2.19)$$

onde  $\mathcal{U}_c$  representa a energia complementar de deformação, expressa por:

$$\mathcal{U}_c(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma^T C \sigma) d\Omega \quad (2.20)$$

e o trabalho dos deslocamentos impostos na fronteira  $\mathcal{W}_c$  como:

$$\mathcal{W}_c(\sigma) = \int_{\Gamma_D} (\mathbf{N}\sigma)^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (2.21)$$

A solução para o problema definido em 2.1, pode ser obtido minimizando a equação (2.19):

$$\min(\Pi_c(\sigma)) = \min(\mathcal{U}_c(\sigma) - \mathcal{W}_c(\sigma)) \quad (2.22)$$

Devido à natureza tensorial do campo de tensões, a determinação de uma aproximação para este não é tão direta e simples como acontece para o campo de deslocamentos, isto porque o equilíbrio entre elementos é realizado através das projeção das componentes de tensão nas interfaces, sem requerer que haja continuidade das componentes do tensor das tensões [4]. Neste sentido, a abordagem híbrida procura satisfazer a equação de equilíbrio (2.4) *a priori*, em cada elemento, a condição de fronteira (2.9) e sua generalização *a posteriori*, numa forma fraca [4].

Sem considerar o que acontece na fronteira, define-se para cada elemento uma aproximação auto-equilibrada,  $s_h$ , para o campo de tensões de Cauchy:

$$s_h = S \hat{S} \quad (2.23)$$

onde S representa as funções que representam a distribuição de tensões e  $\hat{S}$  os respectivos pesos.

De seguida, define-se a energia associada às condições híbridas  $\mathcal{V}_h^i$  que projeta as trações dos elementos nos deslocamentos na fronteira i de um dado elemento, tal que:

$$\mathcal{V}_h^i(\sigma, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}^T (\mathbf{N}\sigma) d\Gamma \quad (2.24)$$

Considerando dois elementos genéricos A e B adjacentes à fronteira i, o equilíbrio fraco é imposto através da expressão:

$$\mathcal{V}_h^i(\sigma_A, \mathbf{v}) + \mathcal{V}_h^i(\sigma_B, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \quad (2.25)$$

O equilíbrio fraco no lado i de um elemento que pertence à fronteira,  $\Gamma_N$ , é dado por:

$$\mathcal{V}_h^i(\sigma, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_i} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \quad (2.26)$$

Os deslocamentos  $\mathbf{v}$  dos lados são aproximados por:

$$\mathbf{v}_h = V \hat{V} \quad (2.27)$$

onde V representa as funções que caracterizam os deslocamentos nos lados e  $\hat{V}$  os respectivos pesos da combinação.

Quando as funções são polinomiais e o grau de  $\mathcal{V}_h$  não é inferior ao grau das trações, o que se considera sempre, a forma fraca de equilíbrio é equivalente à forma forte.

Combinando as equações (2.26) e (2.22), e substituindo as aproximações (2.23) e (2.27) em (2.22)

e (2.27) em (2.26), obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{F} & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \\ \hat{\mathbf{t}} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

onde  $\mathcal{F}$  representa a matriz de flexibilidade,  $\hat{\mathbf{e}}$  o trabalho dos deslocamentos e deformações impostas nas bases das tensões auto-equilibradas e  $\hat{\mathbf{t}}$  o trabalho das trações impostas na base dos deslocamentos da fronteira. Utilizando esta abordagem, obtém-se uma aproximação para o campo de tensões generalizado (2.23), que satisfaz fortemente o equilíbrio, e uma aproximação dos deslocamentos generalizados nas fronteiras (2.27), que satisfaz fracamente a compatibilidade [4].

## 2.4 Representação Separada do PGD

Tem-se por objetivo determinar uma solução para o problema em função das propriedades mecânicas dos materiais.

Neste sentido, define-se o vetor  $\mu$  com  $n_p$  parâmetros  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_p}$  correspondentes às propriedades dos materiais, em que cada uma se encontra definida em  $\Omega_i \subset \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n_p$ . O vetor dos parâmetros  $\mu$  é  $\mu \in \Omega_\mu = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_{n_p} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ .

As formulações de elementos finitos apresentadas anteriormente na Sec. 2.2 e Sec. 2.3, são utilizadas para transformar o problema contínuo num problema discreto, permitindo, desta forma, a resolução das equações algébricas do PGD. Neste sentido, as equações fundamentais das formulações de elementos finitos tomam a seguinte forma:

$$\mathcal{K}(\mu) \hat{\mathbf{u}}(\mu) = \hat{\mathbf{f}} \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{F}(\mu) & \mathcal{D}^T \\ \mathcal{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{s}}(\mu) \\ \hat{\mathbf{v}}(\mu) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{t}} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

A solução aproximada do PGD para as incógnitas do problema é:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mu) \approx \hat{\mathbf{u}}_{\text{PGD}}^{n_k}(\mu) = \sum_{m=1}^{n_k} \bar{\mathbf{u}}^m \prod_{i=1}^{n_p} \mathbf{U}_i^m(\mu_i) \quad (2.31)$$

$$\hat{\mathbf{s}}(\mu) \approx \hat{\mathbf{s}}_{\text{PGD}}^{n_s}(\mu) = \sum_{m=1}^{n_s} \bar{\mathbf{s}}^m \prod_{i=1}^{n_p} \mathbf{S}_i^m(\mu_i) \quad (2.32)$$

onde  $n_k$  e  $n_s$  correspondem ao número de modos usados em cada aproximação,  $\bar{\mathbf{u}}^m$  e  $\bar{\mathbf{s}}^m$  às funções do espaço que caracterizam para cada modo os deslocamentos e tensões, e  $\mathbf{U}_i^m(\mu_i)$  ou  $\mathbf{S}_i^m(\mu_i)$  aos coeficientes que definem o peso correspondente a cada parâmetro  $\mu_i$ .

A aproximação pelo PGD permite obter para o problema em análise dois pares de soluções aproximadas, uma compatível,  $\mathbf{u}_k$  e  $\sigma_k$ , e a outra equilibrada,  $\varepsilon_s$  e  $\sigma_s$ . Obtém-se assim, um par de soluções complementares.

## 2.5 Integração da Representação Separada

Para a solução do problema representada na sua forma separada, o cálculo de integrais definidos num dado espaço torna-se numa tarefa facilitada do ponto de vista computacional. Ilustre-se esta vantagem com um exemplo:

Considere-se a integração em  $\Omega_\mu = \Omega_{\mu_1} \times \Omega_{\mu_2}$  de uma função genérica  $F(\mathbf{x}, \mu_1, \mu_2)$ :

$$\int_{\Omega_{\mu_1} \times \Omega_{\mu_2}} F(\mathbf{x}, \mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2 \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{x}$  denota o parâmetro das coordenadas espaciais e  $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$  os parâmetros correspondentes às propriedades dos materiais. Num caso geral, o integral é calculado em  $\Omega_\mu = \Omega_{\mu_1} \times \Omega_{\mu_2}$  para cada valor da coordenada  $\mathbf{x}$ . No entanto, tendo a representação separada para a função  $F(\mathbf{x}, \mu_1, \mu_2)$  na forma:

$$F(\mathbf{x}, \mu_1, \mu_2) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i^{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \times F_i^{\mu_1}(\mu_1) \times F_i^{\mu_2}(\mu_2) \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.33), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mu_1} \times \Omega_{\mu_2}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i^{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \times F_i^{\mu_1}(\mu_1) \times F_i^{\mu_2}(\mu_2) d\mu_1 d\mu_2 &= \\ &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i^{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \left( \int_{\Omega_{\mu_1}} F_i^{\mu_1}(\mu_1) d\mu_1 \right) \left( \int_{\Omega_{\mu_2}} F_i^{\mu_2}(\mu_2) d\mu_2 \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

A partir da equação (2.35) é possível verificar que o problema definido em  $\Omega_\mu = \Omega_{\mu_1} \times \Omega_{\mu_2}$  é decomposto em problemas uni-dimensionais formulados em  $\Omega_{\mu_1}$  e  $\Omega_{\mu_2}$ . A mesma ideia pode ser estendida para um problema com  $n_p$  parâmetros, isto é,  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_p}\} \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_{n_p}$ , e para este caso, a solução pelo PGD consiste numa série de problemas formulados em cada  $\Omega_i$ , que ilustra a capacidade desta técnica para lidar com modelos multi-dimensionais sem grandes dificuldades.

## 2.6 Majorantes do Erro

### 2.6.1 Majorante do Erro Global

Dado um par de soluções complementares, uma compatível e a outra equilibrada, é possível relacionar a energia da diferença entre as duas soluções,  $\epsilon^2$ , e a energia dos seus erros:

$$\epsilon^2 = \int_{\Omega} (\sigma_k - \sigma_s)(\epsilon_k - \epsilon_s) d\Omega \geq \begin{cases} \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_s)(\epsilon - \epsilon_s) d\Omega \\ \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_k)(\epsilon - \epsilon_k) d\Omega \end{cases} \quad (2.36)$$

Utilizando as relações de elasticidade obtém-se:

$$\epsilon^2 = \int_{\Omega} (\epsilon_k^T \mathcal{C} \epsilon_k + \sigma_s^T \mathcal{C}^{-1} \sigma_s - 2\sigma_s^T \epsilon_k) d\Omega = \sum_{e=1}^{n_e} \epsilon_{[e]}^2 \quad (2.37)$$

Deste modo, constata-se que este majorante do erro global é obtido como a soma da energia da diferença das aproximações em cada elemento.

## 2.6.2 Quantidade de Interesse e Majorantes do erro

A determinação dos valores de deslocamentos ou reações em regiões específicas de um determinado problema é de extrema importância, em contexto de projeto, para o dimensionamento e verificação de segurança de uma dada estrutura. Para o efeito, para além do problema real, é necessário que se defina um problema virtual, dependendo da quantidade de interesse em causa. Neste sentido, para a obtenção de um deslocamento ( $\mathcal{L}_k$ ) o problema virtual corresponde a aplicar como ação uma distribuição de tensões na zona pretendida, e para a obtenção de reações ( $\mathcal{L}_s$ ) corresponde a impor um deslocamento.

Usando qualquer tensão equilibrada  $\bar{\sigma}_s$  correspondente à solução virtual, é possível calcular o valor exato da quantidade de interesse  $\mathcal{L}_k(u)$  a partir da solução exata para o campo de deslocamentos  $u$ , pela expressão [4]:

$$\mathcal{L}_k(u) = \int_{\Omega} \bar{\sigma}_s^T \epsilon d\Omega - \int_{\Gamma} (N\bar{\sigma}_s) \bar{u} d\Gamma \quad (2.38)$$

Saliente-se que, uma expressão semelhante pode ser usada para obtenção da quantidade de interesse associada a uma reação  $\mathcal{L}_s(\sigma)$ .

Uma vez que não se conhece a solução exata para a maior parte dos problemas práticos, a equação (2.38) pode ser usada para obter uma estimativa da quantidade de interesse e respetivo majorante do erro [4]. Deste modo, utilizam-se o par de soluções disponível, equilibrado e compatível, para obter aquela estimativa. Manipulando a equação (2.38), força-se o aparecimento da quantidade de interesse usando uma solução compatível,  $\tilde{\mathcal{L}}_k(u_k)$ , apresentada na equação (2.39), e outra usando uma solução equilibrada,  $\mathcal{L}_k(\sigma_s)$ , apresentada na equação (2.40).

$$\text{Solução compatível: } \mathcal{L}_k(u) - \tilde{\mathcal{L}}_k(u_k) = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_s^T - \bar{\sigma}_k^T)(\epsilon - \epsilon_k) d\Omega \quad (2.39)$$

$$\text{Solução equilibrada: } \mathcal{L}_k(u) - \mathcal{L}_k(\sigma_s) = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_s^T - \bar{\sigma}_k^T)(\epsilon - \epsilon_s) d\Omega \quad (2.40)$$

Pretendo-se obter o erro da quantidade de interesse associada à uma solução média,  $\sigma_a = \frac{\sigma_s + \sigma_k}{2}$ , obtém-se:

$$\mathcal{L}_k(u) - \tilde{\mathcal{L}}_k(\sigma_a) = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_s^T - \bar{\sigma}_k^T)(\epsilon - \epsilon_a) d\Omega \quad (2.41)$$

Uma vez que a equação (2.41) depende do valor exato das deformações,  $\varepsilon$ , este erro não pode, em geral, ser determinado. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtém-se um majorante para a equação (2.41), tal que:

$$|\mathcal{L}_k(u) - \tilde{\mathcal{L}}_k(\sigma_a)| \leq \underbrace{\sqrt{\int_{\Omega} (\bar{\sigma}_s^T - \bar{\sigma}_k^T)(\bar{\varepsilon}_s - \bar{\varepsilon}_k) d\Omega}}_{\leq \bar{\varepsilon}} \underbrace{\sqrt{\int_{\Omega} (\sigma^T - \sigma_a^T)(\varepsilon - \varepsilon_a) d\Omega}}_{=\frac{1}{2}\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\varepsilon = \epsilon_{a_{\text{local}}} \quad (2.42)$$

Reordenando os termos da desigualdade (2.42), obtém-se os limites, inferior e superior, para o valor exato da quantidade de interesse:

$$\tilde{\mathcal{L}}_k(\sigma_a) - \epsilon_{a_{\text{local}}} \leq \mathcal{L}_k(u) \leq \tilde{\mathcal{L}}_k(\sigma_a) + \epsilon_{a_{\text{local}}} \quad (2.43)$$

Usando as equações de elasticidade, a quantidade de interesse corrigida associada à solução média,  $\tilde{\mathcal{L}}_k(\sigma_a)$ , e o majorante do erro,  $\epsilon_{a_{\text{local}}}$ , são apresentados nas expressões (2.44) e (2.45), respectivamente.

$$\tilde{\mathcal{L}}_k(\sigma_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_s^T \mathcal{C} \sigma_s + \bar{\sigma}_s^T \varepsilon_k + \bar{\varepsilon}_k^T \mathcal{C}^{-1} \varepsilon_k + \bar{\varepsilon}_k^T \sigma_s) d\Omega \quad (2.44)$$

$$\epsilon_{a_{\text{local}}} = \frac{1}{4} \sum_e^{n_e} \left( \frac{\epsilon}{\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}_{[e]}^2 + \epsilon_{[e]}^2 \frac{\bar{\varepsilon}}{\epsilon} \right) \quad (2.45)$$

Para o processo de refinamento adaptativo das malhas, a expressão envolvendo o quadrado da equação (2.45) é mais útil, obtendo-se:

$$\left( \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \epsilon \right)^2 = \epsilon_{a_{\text{local}}}^2 = \frac{1}{8} \sum_e^{n_e} (\epsilon^2 \bar{\varepsilon}_{[e]}^2 + \epsilon_{[e]}^2 \bar{\varepsilon}^2) \quad (2.46)$$

## 2.7 Processo Adaptativo

As equações apresentadas anteriormente para valores específicos dos parâmetros, são agora estendidas a todo o domínio paramétrico. Neste sentido, obtém-se o integral do majorante do erro, que permite conduzir o processo de refinamento adaptativo das malhas, orientado pelo erro global ou local.

O erro global das soluções dado pela equação (2.37) escrito em função dos parâmetros do problema, é integrado no espaço dos parâmetros, resultando em:

$$\Psi_{\text{global}} = \int_{\Omega_{\mu}} \epsilon^2(\mu) d\Omega_{\mu} \quad (2.47)$$

Da mesma forma, usando a equação (2.46) escrita em função dos parâmetros do problema e integrando no espaço dos parâmetros, obtém-se:

$$\Psi_{\text{local}} = \int_{\Omega_{\mu}} \epsilon_{a_{\text{local}}}^2(\mu) d\Omega_{\mu} \quad (2.48)$$

Tendo a representação das funções a integrar na sua forma separada em função dos parâmetros, a sua integração é facilitada como apresentado na Sec. 2.5. Desta forma o integral no espaço dos parâmetros  $\Omega_\mu$  é transformado numa série de integrais em 1D para cada um dos parâmetros.



## Capítulo 3

# Programa em *Matlab*

Neste capítulo faz-se uma breve descrição do funcionamento do programa em ambiente *Matlab*, desenvolvido pelo Dr. Jonatha Reis, que aplica o PGD e as outras funcionalidade inerentes, nomeadamente o refinamento adaptativo das malhas. Descreve-se ainda, o procedimento para a definição do modelo estrutural da placa e os *scripts* desenvolvidos e usados para o pós-processamento dos resultados. Por fim, a partir de um exemplo simples ilustra-se o algoritmo usado pelo PGD na construção da representação separada para as soluções.

### 3.1 Estrutura do Programa

Ilustra-se na Fig. 3.1, de forma resumida, a estrutura de funcionamento do programa que aplica o PGD, e as outras funcionalidades associadas, nomeadamente o refinamento adaptativo das malhas através do cálculo de indicadores do erro  $\Psi_{\text{global}}$  e  $\Psi_{\text{local}}$ , com base num par de soluções complementares. Na Fig. 3.2 ilustra-se mais detalhadamente o processo de refinamento adaptativo das malhas.

### 3.2 Modelo Estrutural e Pós-Processamento dos Resultados

O modelo para os problemas foi definido utilizando o programa *Gmsh*, uma ferramenta de geração de malhas de elementos finitos 3D, com ferramentas integradas de assistência à definição dos modelos e pós-processamento [5]. Deste modo, a definição da geometria e do carregamento correspondentes aos modelos foram realizados em modo não interativo, através de ficheiros de texto usando uma linguagem apropriada do *Gmsh*. Relativamente à recolha de informação, para além das rotinas existentes, foram desenvolvidas rotinas adicionais em ambiente *Python* para o pós-processamento dos resultados obtidos pelo programa, nomeadamente:

- Obtenção dos modos utilizados pelo PGD no processo de construção das soluções ;
- Representação gráfica dos diagramas de tensões ou deslocamentos numa dada secção ;
- Determinação das trajetórias das tensões principais [6].

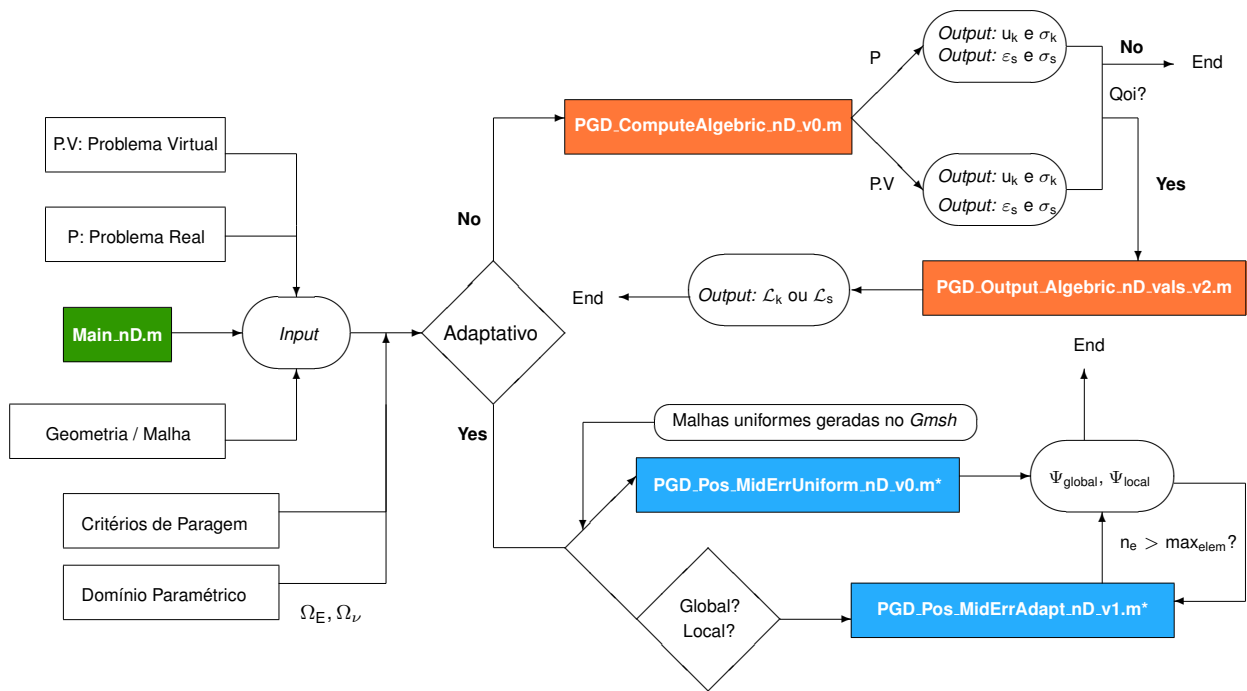


Figura 3.1. Esquema representativo da estrutura do programa que aplica o PGD e o processo de refinamento adaptativo em ambiente *Matlab*.

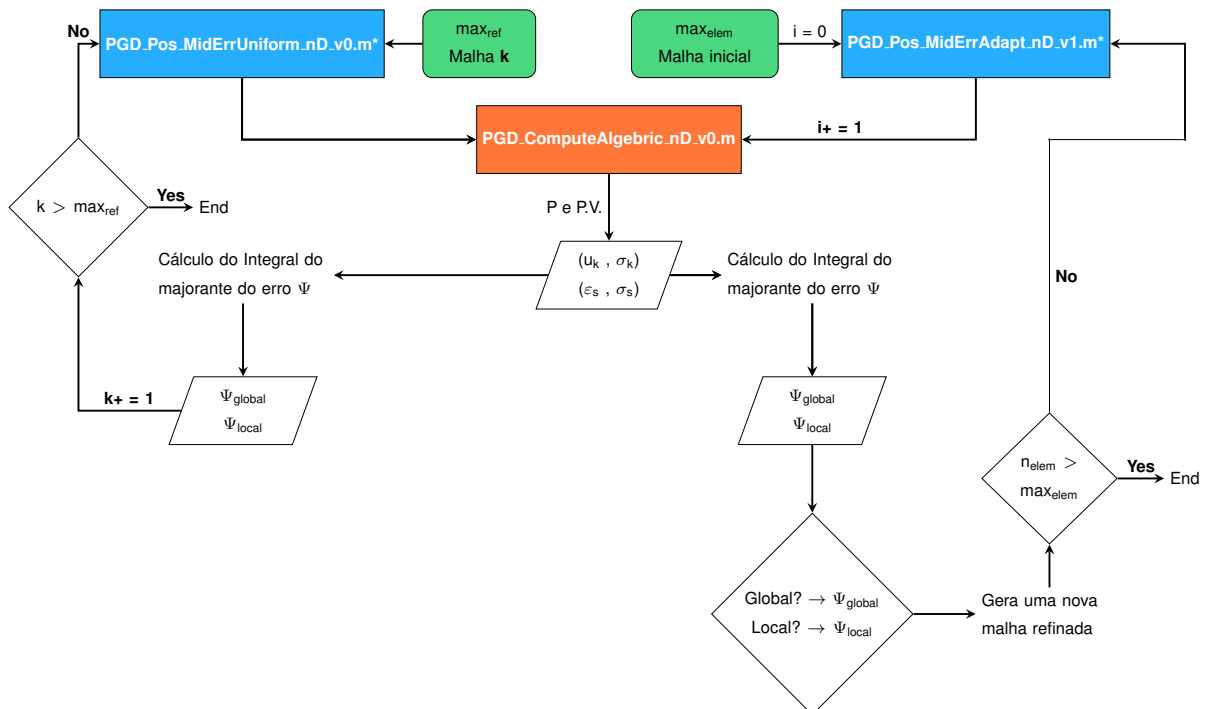


Figura 3.2. Esquema detalhado do Processo de Refinamento Adaptativo.

### 3.3 Algoritmo do PGD

Considere-se o problema de elasticidade plana definido para  $(\mathbf{x}, \lambda) \in \Omega \times \Omega_\lambda$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $\Omega_\lambda \subset \mathbb{R}$ , onde  $\mathbf{x}$  se refere às coordenadas espaciais e  $\lambda$  ao módulo de elasticidade do material. Pretende-se obter a solução pelo PGD para o campo de deslocamentos ( $u$ ) na forma separada:

$$u(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) \quad (3.1)$$

Refira-se que este problema simples apresenta solução exata, uma vez que para um material homogéneo  $u \sim \frac{1}{\lambda}$ . Apesar disso, este problema permite ilustrar de forma simplificada o algoritmo aplicado pelo PGD na construção da representação separada para as soluções.

A solução é construída por enriquecimento sucessivo, onde cada termo da expansão é determinado de forma sequencial. Portanto, numa dada etapa  $n$  do processo de enriquecimento a solução já é conhecida para as  $n-1$  etapas anteriores, sendo dada por:

$$u^{n-1}(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) \quad (3.2)$$

Pretende-se na presente etapa  $n$  determinar o novo produto  $F_n^x(\mathbf{x}) \cdot F_n^\lambda(\lambda)$ . Considere-se por simplicidade de notação que essas funções são representadas por  $A(\mathbf{x})$  e  $B(\lambda)$ . Deste modo, a aproximação na etapa corrente  $n$  é dada por:

$$u^n(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) + A(\mathbf{x}) \cdot B(\lambda) \quad (3.3)$$

onde todas as funções são conhecidas, exceto  $A(\mathbf{x})$  e  $B(\lambda)$ . Estas funções aparecem na forma de produto, pelo que resulta num sistema não linear por resolver. Por esta razão, a determinação destas funções é realizada de forma iterativa, em que cada iteração  $p$  consiste em duas etapas que são repetidas até que a convergência seja atingida, i.e, na primeira etapa fixa-se  $B(\lambda)$  e determina-se  $A(\mathbf{x})$ , e na segunda etapa fixa-se  $A(\mathbf{x})$  e determina-se  $B(\lambda)$  até atingir um ponto fixo.

**$B^{p-1}(\lambda)$  conhecido —  $A^p(\mathbf{x})$  desconhecido**

O primeiro passo consiste em considerar que na iteração  $p$  a função  $B(\lambda)$  é conhecida da iteração anterior  $p-1$ , obtendo-se a aproximação seguinte:

$$u^n(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) + A^p(\mathbf{x}) \cdot B^{p-1}(\lambda) \quad (3.4)$$

onde todas as funções são conhecidas, exceto  $A^p(\mathbf{x})$ . Para a sua determinação, recorre-se à forma fraca do problema de elasticidade linear dada por:

$$\int_{\Omega \times \Omega_\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} d\lambda = \int_{\Gamma_N \times \Omega_\lambda} \Phi^* \cdot f d\mathbf{x} d\lambda \quad (3.5)$$

onde  $\Phi^*$  é o peso do resíduo,  $K$  a rigidez e  $f$  a força de superfície na fronteira  $\Gamma_N$ . Para a função de aproximação de  $u$  e a função de peso do resíduo  $\Phi^*$  assume-se:

$$\text{Aproximação : } u^n(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) + A^P(\mathbf{x}) \cdot B^{P-1}(\lambda) \quad (3.6a)$$

$$\text{Função de Peso : } \Phi^*(\mathbf{x}, \lambda) = A^*(\mathbf{x}) \cdot B^{P-1}(\lambda) \quad (3.6b)$$

Substituindo as expressões (3.6) em (3.5), obtém-se:

$$\int_{\Omega \times \Omega_\lambda} \frac{\partial A^*}{\partial \mathbf{x}} \cdot B^{P-1} \cdot K \cdot \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}} \cdot F_i^\lambda + \frac{\partial A^P}{\partial \mathbf{x}} \cdot B^{P-1} \right) d\mathbf{x} d\lambda = \int_{\Omega \times \Omega_\lambda} A^* \cdot B^{P-1} \cdot f d\mathbf{x} d\lambda \quad (3.7)$$

com o operador de diferencial a ser dado por:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A rigidez  $K$  pode ser escrita na sua forma separada, obtendo-se:

$$K = \frac{\lambda}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \rightarrow K = \lambda \cdot \kappa \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.7) e reordenando os termos da equação, resulta em:

$$\int_{\Omega \times \Omega_\lambda} \frac{\partial A^*}{\partial \mathbf{x}} \cdot B^{P-1} \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{\partial A^P}{\partial \mathbf{x}} \cdot B^{P-1} d\mathbf{x} d\lambda = \int_{\Omega \times \Omega_\lambda} \left( A^* \cdot B^{P-1} \cdot f - \lambda \cdot \frac{\partial A^*}{\partial \mathbf{x}} \cdot B^{P-1} \cdot \kappa \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}} \cdot F_i^\lambda \right) d\mathbf{x} d\lambda \quad (3.10)$$

Uma vez que as funções que dependem de  $\lambda$  são conhecidas na equação (3.10), estas podem então ser integradas em  $\Omega_\lambda$ , obtendo-se:

$$\int_{\Omega} \underbrace{\alpha^\lambda \cdot \frac{\partial A^*}{\partial \mathbf{x}} \cdot \kappa \cdot \frac{\partial A^P}{\partial \mathbf{x}}}_{\sim B^T D B \delta u, (A^* = A^P)} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left( A^* \cdot f \cdot \beta^\lambda - \frac{\partial A^*}{\partial \mathbf{x}} \cdot \kappa \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}} \cdot \gamma^\lambda \right) d\mathbf{x} \quad (3.11)$$

onde  $\alpha^\lambda, \beta^\lambda$  e  $\gamma^\lambda$  são constantes dadas por:

$$\begin{cases} \alpha^\lambda = \int_{\Omega_\lambda} \lambda \cdot (B^{P-1}(\lambda))^2 d\lambda \\ \beta^\lambda = \int_{\Omega_\lambda} B^{P-1}(\lambda) d\lambda \\ \gamma^\lambda = \int_{\Omega_\lambda} \lambda \cdot B^{P-1}(\lambda) \cdot F_i^\lambda(\lambda) d\lambda \end{cases} \quad (3.12)$$

Obtém-se assim a forma fraca do problema uni-dimensional definida em  $\Omega$ . Aplicando o Método de Galerkin, considera-se a mesma base para a função de peso  $A^*$  e a função a determinar  $A^p$ , i.e,  $A^* = A^p$ , que resulta na formulação clássica de elementos finitos, usado para a obtenção da função  $A^p(\mathbf{x})$ , que corresponde ao modo na iteração  $p$ .

A correspondente forma forte da equação (3.11) no domínio  $\Omega$  e na fronteira  $\Gamma$  é dada por:

$$\alpha^\lambda \cdot \left( \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \cdot \kappa \cdot \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \cdot \kappa \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}} \cdot \gamma^\lambda = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (3.13a)$$

$$\alpha^\lambda \cdot \bar{\mathbf{n}} \cdot \kappa \cdot \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}} = \left( \mathbf{f} \cdot \beta^\lambda - \bar{\mathbf{n}} \cdot \kappa \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}} \cdot \gamma^\lambda \right) \quad , \text{ em } \Gamma_N \quad (3.13b)$$

com  $\bar{\mathbf{n}}$  sendo as componentes do vetor da normal exterior à fronteira  $\Gamma_N$ , dado por:

$$\bar{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A forma forte resulta numa equação diferencial parcial de 2ª ordem em  $\Omega$  e de 1ª ordem em  $\Gamma_N$ , uma vez que as expressões originais de equilíbrio envolvem segundas e primeiras derivadas de  $u$  em relação às coordenadas espaciais.

#### **$A^p(\mathbf{x})$ conhecido — $B^p(\lambda)$ desconhecido**

O processo que se segue é semelhante ao apresentado anteriormente, porém com o papel desempenhado pelas funções invertido. Neste sentido, já se conhecendo a função  $A^p(\mathbf{x})$  da iteração corrente  $p$ , pretende-se determinar  $B^p(\lambda)$ , resultando a aproximação pelo PGD em:

$$u^n(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) + A^p(\mathbf{x}) \cdot B^p(\lambda) \quad (3.15)$$

onde todas as funções são conhecidas, exceto  $B^p(\lambda)$ . Recorrendo novamente à forma fraca do problema apresentada na equação (3.5), consideram-se as funções de aproximação para  $u$  e função de peso do resíduo  $\Phi^*$ :

$$\text{Aproximação :} \quad u^n(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^x(\mathbf{x}) \cdot F_i^\lambda(\lambda) + A^p(\mathbf{x}) \cdot B^p(\lambda) \quad (3.16a)$$

$$\text{Função de Peso :} \quad \Phi^*(\mathbf{x}, \lambda) = A^p(\mathbf{x}) \cdot B^*(\lambda) \quad (3.16b)$$

Substituindo as expressões (3.16) e (3.9) em (3.5), e reordenando os seus termos, obtém-se:

$$\int_{\Omega \times \Omega_\lambda} \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}^* \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}^p \, d\mathbf{x} \, d\lambda = \int_{\Omega \times \Omega_\lambda} \left( A^p \cdot \mathbf{B}^* \cdot f - \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}^* \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}} \cdot F_i^\lambda \right) \, d\mathbf{x} \, d\lambda \quad (3.17)$$

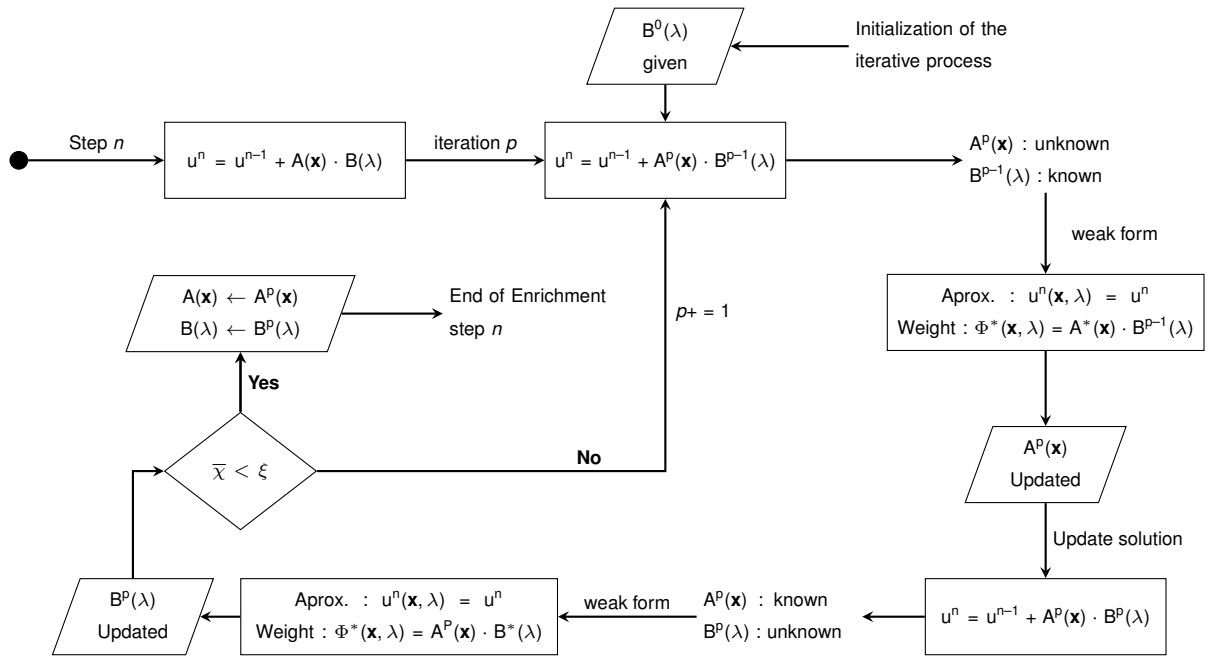
Sendo conhecidas as funções que dependem de  $\mathbf{x}$  na equação (3.17), estas podem ser integradas em  $\Omega$  e  $\Gamma_N$ , obtendo-se:

$$\int_{\Omega_\lambda} \alpha^x \cdot \mathbf{B}^* \cdot \lambda \cdot \mathbf{B}^p \, d\lambda = \int_{\Omega_\lambda} \mathbf{B}^* \cdot \left( f \cdot \beta^x - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n-1} F_i^\lambda \cdot \gamma^x \right) \, d\lambda \quad (3.18)$$

onde  $\alpha^x, \beta^x$  e  $\gamma^x$  são constantes dadas por:

$$\begin{cases} \alpha^x = \int_{\Omega} \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \beta^x = \int_{\Gamma} \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \gamma^x = \int_{\Omega} \frac{\partial A^p}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial F_i^x}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.19)$$

Obtém-se assim a forma fraca do problema uni-dimensional definido em  $\Omega_\lambda$  que permite a determinação de  $B(\lambda)$ . Esta expressão não possui derivadas uma vez que a equação de equilíbrio não possui derivadas em relação ao módulo de elasticidade  $\lambda$ .



**Figura 3.3.** Algoritmo do PGD na determinação dos termos da expansão numa determinada etapa de enriquecimento  $n$ .

Com o critério de paragem  $\bar{x}$  a ser dado pela norma:

$$\bar{x} = \|A^p(\mathbf{x}) \cdot B^p(\lambda) - A^{p-1}(\mathbf{x}) \cdot B^{p-1}(\lambda)\| < \xi \quad (3.20)$$

O processo iterativo continua até convergir. Quando isto acontece, obtém-se assim para a etapa de enriquecimento  $n$  o novo produto  $F_n^x(\mathbf{x}) \cdot F_n^\lambda(\lambda)$ . Em forma de resumo, na Fig. 3.3 ilustra-se o processo iterativo do PGD na determinação dos termos da expansão numa dada etapa de enriquecimento  $n$ . O processo de enriquecimento da solução pelo PGD também continua até que se atinja uma determinada tolerância.

## Capítulo 4

# Exemplos de aplicação

Neste capítulo, analisam-se dois problemas de elasticidade plana aplicando o PGD. Para o efeito, usa-se o programa desenvolvido em ambiente *Matlab*, cuja estrutura está descrita no capítulo anterior. O primeiro problema a analisar consiste numa placa quadrada sujeita a uma tracção e o segundo numa placa encastrada em ambas extremidades e sujeita a uma pressão no topo. Ambas as geometrias são compostas por duas secções diferentes, em que cada uma delas apresenta como propriedades: o módulo de elasticidade,  $E$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ , sendo estes os parâmetros das soluções. Para estes dois problemas, obtêm-se os resultados para diferentes combinações daqueles parâmetros e explora-se, ainda, a influência de outros detalhes de implementação nos resultados obtidos, como por exemplo o tipo e o número de elementos das malhas, o número de modos presentes na aproximação e o intervalo do domínio paramétrico.

São utilizadas funções de aproximação quadráticas para as soluções compatíveis e funções lineares para as soluções equilibradas, de forma que as tensões e deformações sejam lineares.

Utilizam-se as rotinas referidas no capítulo anterior para a representação dos modos do PGD usados na construção das soluções, representação dos diagramas de tensões ou deslocamentos numa dada secção e a determinação das trajetórias das tensões principais.

Assume-se um sistema coerente de unidades para as grandezas:  $\ell$  [m] e  $F$  [kN]. Na ausência desta imposição, pode ser também considerado outro sistema equivalente.

### 4.1 Critérios de Paragem do PGD e do Processo Adaptativo

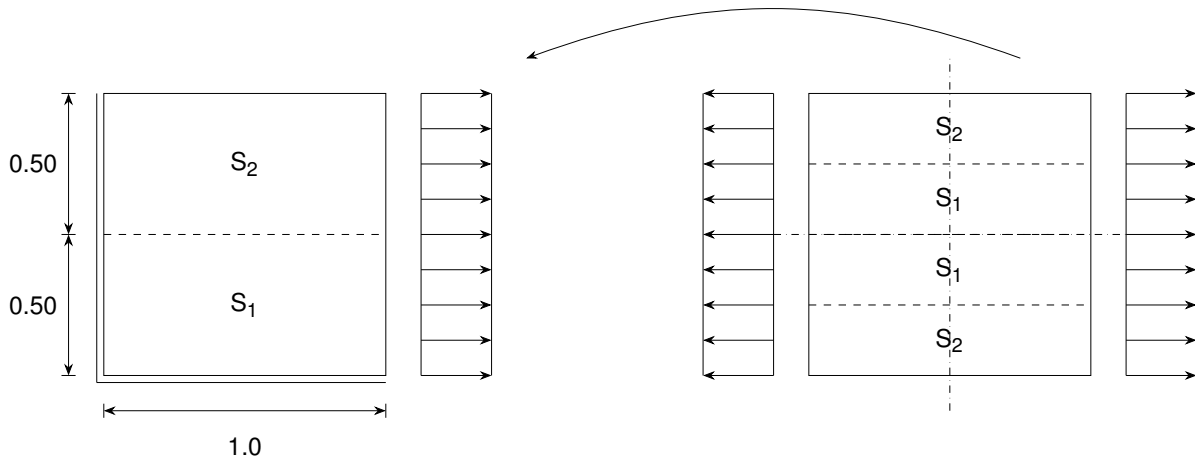
Para o controlo da precisão da aproximação das soluções pelo PGD, utiliza-se  $10^{-4}$  para a tolerância do PGD e das iterações do ponto fixo, ou caso sejam atingidos 100 modos e 15 iterações, respetivamente. E utilizam-se 10 valores para a discretização do domínio paramétrico, isto é, das propriedades mecânicas dos materiais,  $E$  e  $\nu$ . Para o processo de refinamento adaptativo, define-se como critérios de paragem: quando a malha refinada atinge os 6000 elementos, por razões de eficiência computacional, ou quando atinge o máximo de 15 refinamentos.



## 4.2 Placa quadrada composta por dois materiais

O quarto de placa, apresentado à esquerda na Fig. 4.1, resulta da dupla simplificação de simetria da placa quadrada à direita na mesma figura. Para a representação das outras partes, aplicam-se as condições de fronteira de simetria que impedem o deslocamento horizontal no lado esquerdo e deslocamento vertical no lado inferior no quarto de placa. É de referir que existe solução analítica para o problema homogêneo,  $E_1 = E_2 = E$ , e apresenta-se para este problema na equação (4.1), a solução para as componentes do tensor das tensões e das deformações, em função das propriedades  $E$  e  $\nu$ .

Em primeira análise, tendo como ação real a tração aplicada, estuda-se a convergência do método relativamente às variáveis essenciais do problema,  $u$  e  $\sigma$ , no domínio e na fronteira para diferentes combinações dos parâmetros da solução, diferentes malhas e número de modos utilizados na aproximação. De seguida, efetua-se o mesmo tipo de análise, porém, referente a convergência do método para as quantidades de interesse, que correspondem a deslocamentos ou reações em zonas específicas da placa.



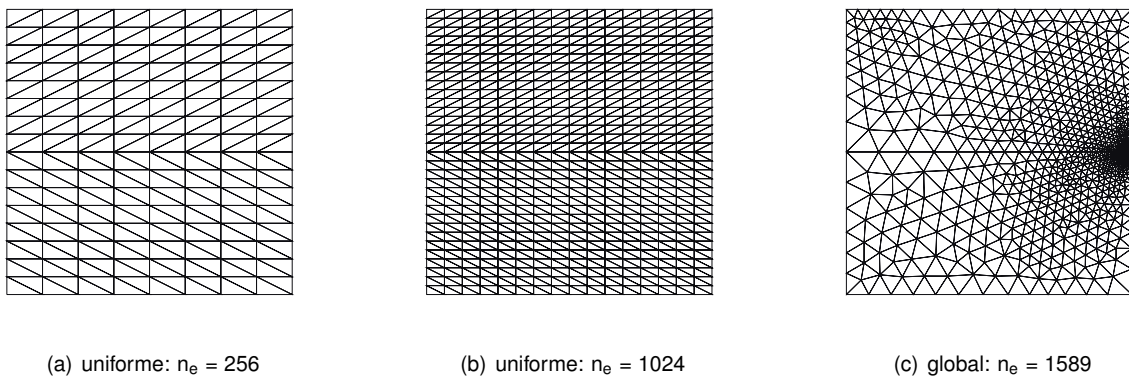
**Figura 4.1.** Simplificação de simetria da placa quadrada

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{E} \\ -\frac{\nu}{E} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

#### 4.2.1 Convergência Global: Deslocamentos ( $u$ ) e Tensões ( $\sigma$ )

Nesta parte, estuda-se a convergência do método para uma das componentes de tensão,  $\sigma_{xx}$ , e para o campo de deslocamentos,  $u$ , da placa. O processo de construção das soluções para as outras componentes de tensão,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ , é apresentado nas Fig. A.1 e Fig. A.2 para a malha da Fig. 4.2(c).

As malhas de elementos finitos geradas para a geometria do problema, desempenham um papel importante no processo de convergência das soluções, razão pelo qual se exploram diferentes tipos de malhas para as análises em questão, de forma a aferir a sua influência nas soluções. Deste modo, utilizam-se as malhas apresentadas na Fig. 4.2. A primeira e a segunda geradas por refinamento uniforme, ao passo que a terceira foi gerada a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global das soluções. Enquanto que, as duas primeiras malhas são geradas sem qualquer informação relativa aos erros das soluções, razão pelo qual não apresentam uma distribuição particular de elementos, já a terceira é gerada tendo em conta essa informação, onde é possível observar uma maior concentração de elementos na zona de transição das propriedades mecânicas, o que permite minimizar os erros das soluções.



**Figura 4.2.** Malhas de elementos finitos usadas para o estudo da convergência das soluções pelo PGD de  $u$  e  $\sigma$

$\mu$	$\Omega$
$E_1$	[0,1 ; 2,1]
$E_2$	[0,1 ; 2,1]
$\nu_1$	0,3
$\nu_2$	0,3

**Tabela 4.1.** Domínio dos parâmetros ( $E, \nu$ ) para cada secção

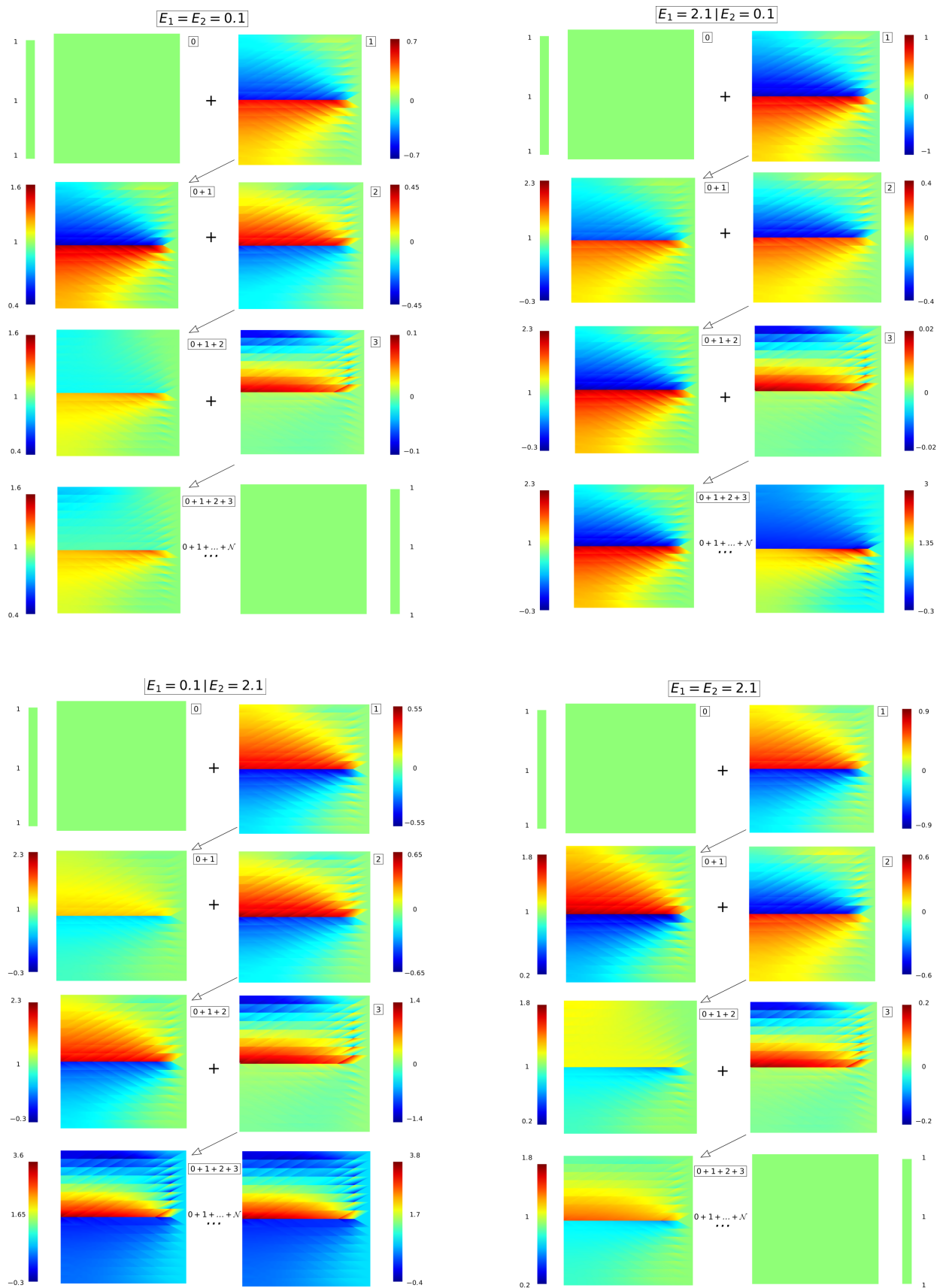
Na Fig. 4.3, apresenta-se para a malha uniforme, com  $n_e = 256$ , o processo de enriquecimento do PGD para a componente de tensão  $\sigma_{xx}$  do campo equilibrado de tensões, para 4 combinações de valores do módulo de elasticidade das secções que constituem a placa. Dois casos correspondem a situação em que a placa é homogénea, com os seguintes módulos de elasticidade:  $E_1 = E_2 = E = 0,1$  e  $E_1 = E_2 = E = 2,1$ , e os outros dois casos correspondem a situação de uma placa não homogénea, em que as secções tomam os módulos de elasticidade:  $E_1 = 2,1, E_2 = 0,1$  e  $E_1 = 0,1, E_2 = 2,1$ . A primeira

coluna de cada caso ilustra a solução para a componente de tensão  $\sigma_{xx}$  correspondente às 4 primeiras etapas do processo de enriquecimento pelo PGD, enquanto que, a segunda coluna corresponde aos modos que alteram a solução ao passar de uma dada etapa  $n$  para a etapa seguinte  $n + 1$ , com a exceção da última linha que ilustra a solução já convergida, após a soma de  $\mathcal{N}$  modos. Os valores do domínio paramétrico, usados no programa, para a obtenção dos resultados, estão apresentados na Tab. 4.1, em que se opta por fixar o valor do coeficiente de *Poisson*,  $\nu$ , em ambas as secções, com vista a simplificar a análise.

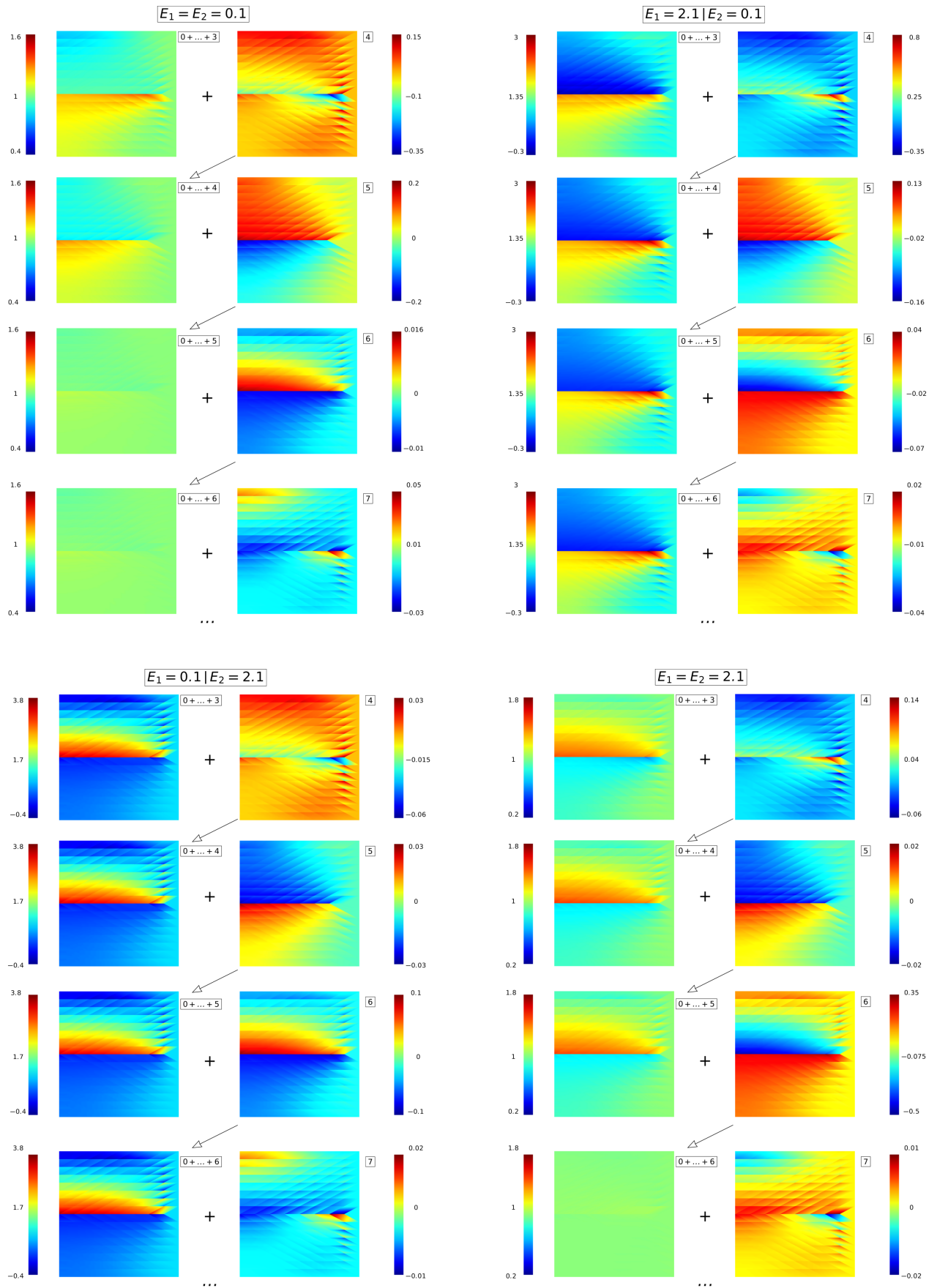
A partir do processo ilustrado na Fig. 4.3, é possível observar que a aproximação do método na etapa inicial para a componente de tensão  $\sigma_{xx}$ , independentemente da combinação dos parâmetros, corresponde à solução exata do problema homogéneo. Se o método fosse perfeito, seria de se esperar que para as situações em que a placa é homogénea, esta solução inicial se mantivesse ao longo das diferentes etapas, o que corresponderia a ter modos que fossem zero entre etapas, que seria benéfico neste caso, mas que, prejudicaria a construção das soluções para outras combinações de parâmetros que correspondem às situações não homogéneas. Neste sentido, de forma a também satisfazer as outras combinações dos parâmetros, o PGD modifica a solução do problema homogéneo, mas que é recuperada após alguns modos. É possível observar que não são precisos muitos modos para o efeito, já que com  $\mathcal{N} = 3$  modos, a solução se encontra próxima do valor exato,  $0,75 < \sigma_{xx} < 1,4$ , no entanto, só com  $\mathcal{N} = 20$  modos é que a solução converge completamente. Apesar disso, a partir da Fig. 4.4, que ilustra as soluções após 3-6 modos, verifica-se que com  $\mathcal{N} = 6$  modos a solução se encontra ainda mais próxima da solução exata,  $0,95 < \sigma_{xx} < 1,05$ , pelo que modos superiores a este são de menor importância na solução do PGD.

Para as situações não homogéneas, observa-se que com  $\mathcal{N} = 4$  modos, a solução praticamente já convergiu, pelo menos visualmente, no entanto a convergência completa para estes casos também só acontece com  $\mathcal{N} = 20$  modos. Verifica-se, ainda, que a utilização de modos superiores,  $\mathcal{N} > 4$ , apresenta menor importância na solução, e para o caso em que a secção inferior é mais rígida e a superior mais flexível, é possível observar alguma concentração de tensão na região da singularidade mecânica da placa.

Observando os modos de cada combinação, que ocupam a mesma posição no processo de enriquecimento, é possível constatar que são semelhantes entre si, uma vez que representam as mesmas funções de espaço, variando apenas o seu peso ou importância, dependendo da combinação em causa, e sendo mais importantes em determinadas combinações do que noutras. Por exemplo, o primeiro modo,  $\mathcal{N} = 1$ , tem um maior peso para as combinações que têm a secção inferior rígida, enquanto que, para a combinações que têm a secção inferior flexível apresenta um peso menor. Outro facto a realçar, é a mudança de sinal do modo, em que para as combinações onde a secção superior é flexível apresenta um dado sinal, e para o caso no qual a secção superior é rígida, apresenta o sinal contrário. Para o segundo modo,  $\mathcal{N} = 2$ , ocorre o oposto do modo anterior, no qual desta vez, o modo apresenta um maior peso para os casos em que a secção superior é rígida e peso menor para os casos com a parte superior flexível. O terceiro modo apresenta a maior importância somente para a combinação em que a parte superior rígida e a inferior flexível, e peso reduzido para os restantes casos.



**Figura 4.3.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme:  $n_e = 256$ ).

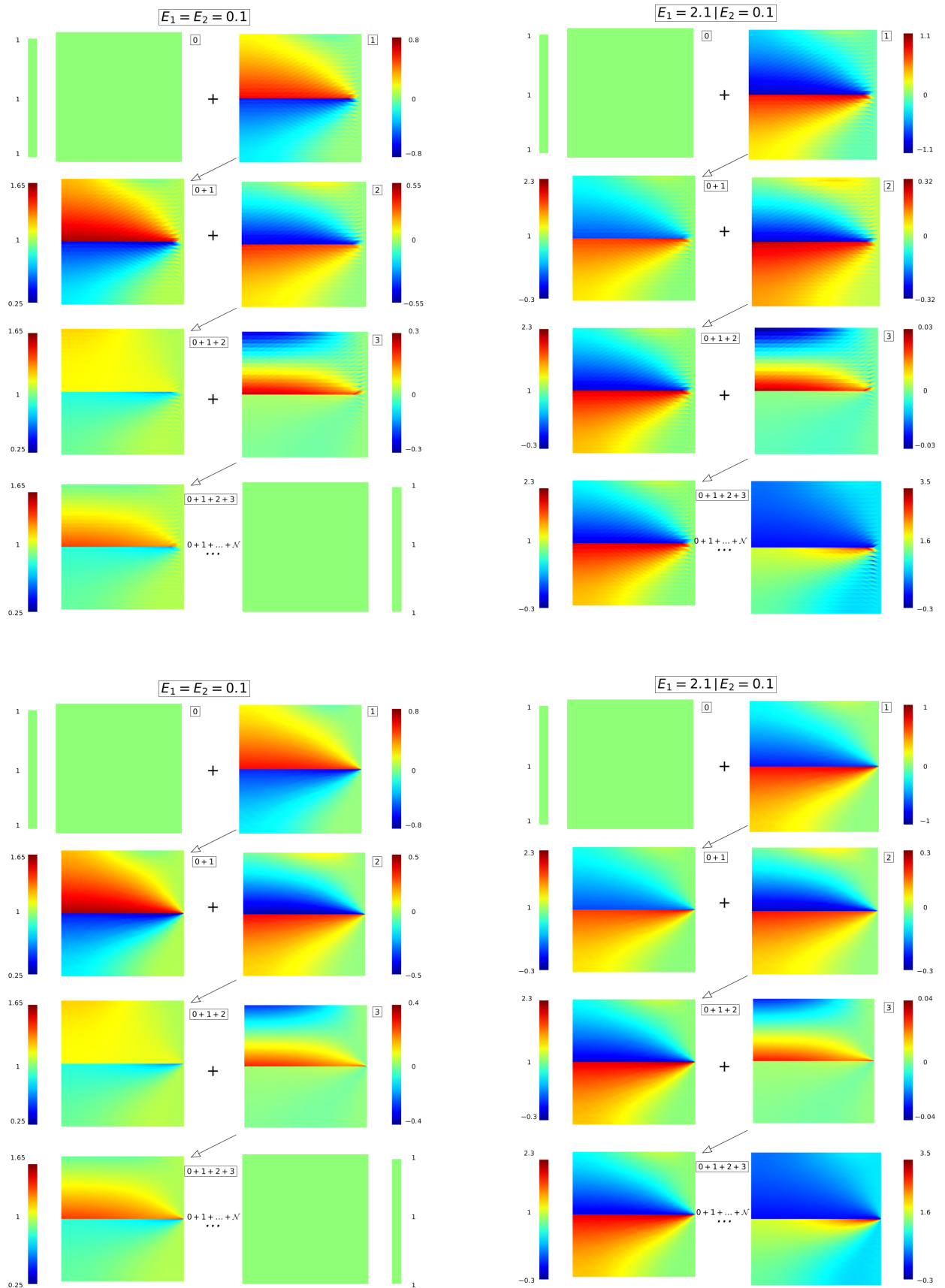


**Figura 4.4.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 3-6 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme:  $n_e = 256$ ).

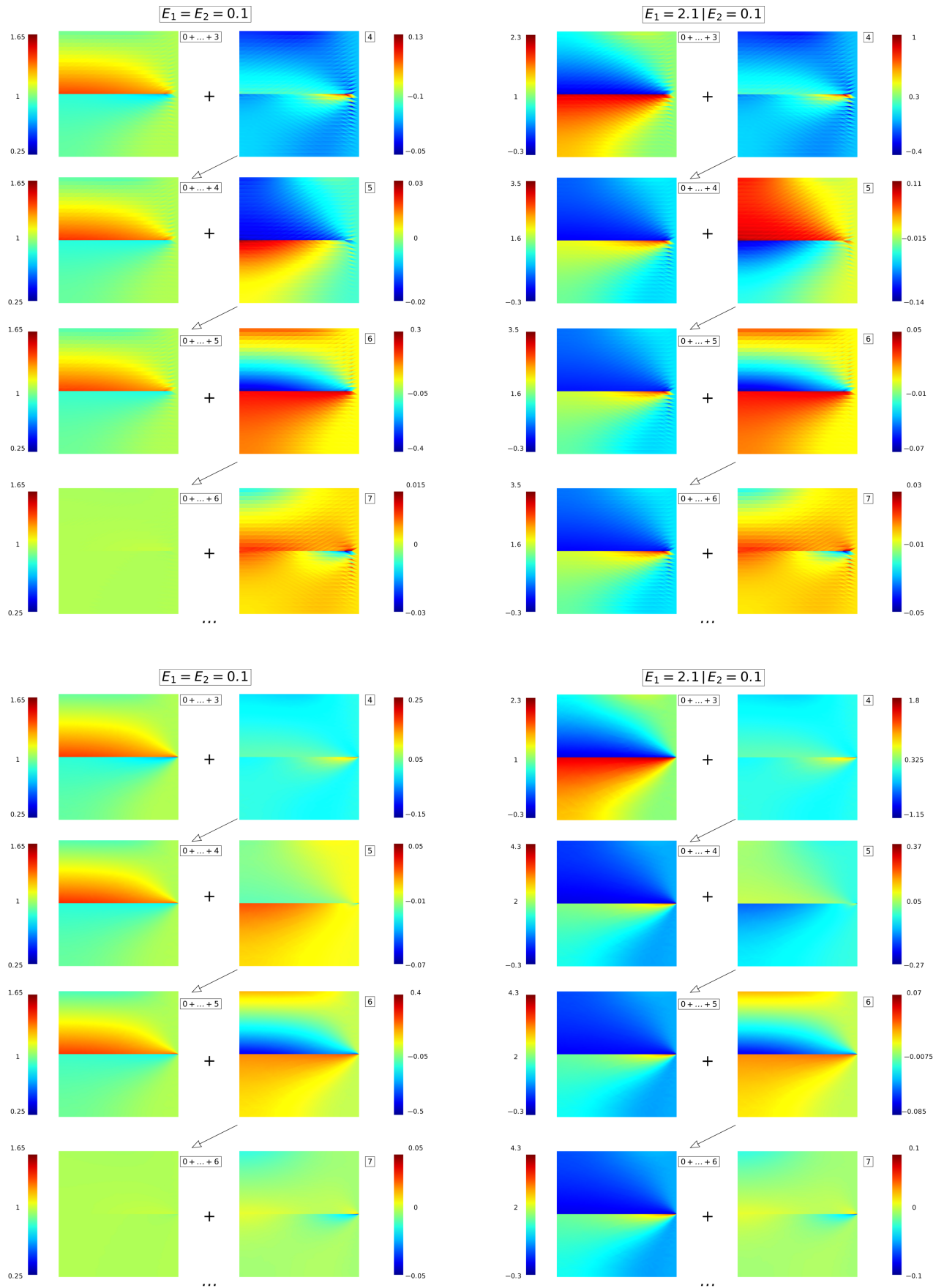
Nas Fig. 4.5 e Fig. 4.6, apresenta-se o processo de enriquecimento do PGD para a componente  $\sigma_{xx}$  do campo equilibrado de tensões, com 1-3 e 3-6 modos do PGD, respetivamente, para as malhas apresentadas na Fig. 4.2(b) e Fig. 4.2(c), limitando-se a análise apenas para 2 combinações do módulo de elasticidade das secções:  $E_1 = E_2 = E = 0,1$  e  $E_1 = 2,1, E_2 = 0,1$ . O processo para as outras duas combinações dos parâmetros,  $E_1 = E_2 = E = 2,1$  e  $E_1 = 0,1, E_2 = 2,1$ , está apresentado na Fig. A.3.

Tendo em conta os resultados obtidos para a malha da Fig. 4.2(a), é possível observar que com estas novas malhas de elementos finitos, as soluções melhoram ao nível da representação visual, com uma distribuição mais suave para a componente de tensão  $\sigma_{xx}$ , sobretudo para a malha obtida a partir do refinamento baseado no indicador do erro global  $e$ , desta vez, com a convergência completa das soluções a dar-se com  $\mathcal{N} = 30$  modos, para a malha da Fig. 4.2(b), e com  $\mathcal{N} = 50$  modos para a malha obtida por refinamento adaptativo baseado no erro global, uma vez que estas capturam mais detalhes do problema. Como acontecia para a malha uniforme, com  $n_e = 256$ , para a combinação que corresponde a situação homogénea, com  $\mathcal{N} = 6$  modos a solução já está visualmente muito próxima do valor exato, e para os casos não homogéneos, essa situação acontece para a solução com  $\mathcal{N} = 4$  modos. Verifica-se que modos superiores aos referidos apresentam um peso menor para as soluções, relativos a pequenos detalhes capturados pelas malhas e a sua inclusão nas soluções. Uma vez que estas malhas apresentam um maior grau de detalhe do modelo, a presença de um número maior de modos visa a inclusão destes novos detalhes nas soluções, que antes não se estava a ter em conta. Tome-se como exemplo, a combinação que corresponde ter a parte inferior rígida e a superior flexível, em que na zona da singularidade mecânica, verifica-se que o valor máximo da componente de tensão  $\sigma_{xx}$ , para a solução já convergida, atinge o valor de 3,0; 3,5 e 4,7, respetivamente, para as malhas da Fig. 4.2, na ordem em que são apresentadas.

Ainda, entre as diferentes malhas, notam-se diferenças substanciais no pesos dos modos, tendo em conta que o grau de detalhe de cada uma delas é diferente. Para a situação homogénea, com  $E_1 = E_2 = E = 0,1$ , observa-se uma mudança de sinal no primeiro e segundo modo comparativamente à solução obtida para a malha da Fig. 4.2(a), que não afeta de todo a solução, uma vez que para aquela combinação, os modos somados entre si voltam a reconstituir a solução inicial, e por isso, se cancelam uns com os outros. Ainda para a combinação homogénea, pode-se observar para a malha obtida pelo refinamento baseado no indicador do erro global, que a presença da singularidade mecânica tem um maior impacto nos pesos do 4º-6º modo, efeito este que não estava a ser capturado da melhor forma pelas outras duas malhas. No entanto, as tensões destes modos são bastante semelhantes às da malha da Fig. 4.2(b), exceto na zona da singularidade mecânica.



**Figura 4.5.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondente às combinações com a parte superior flexível. 1ª linha - uniforme:  $n_e = 1024$ ; 2ª linha - global:  $n_e = 1589$ .



**Figura 4.6.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 3-6 modos e correspondente às combinações com a parte superior flexível. 1ª linha - uniforme:  $n_e = 1024$ ; 2ª linha - global:  $n_e = 1589$ .

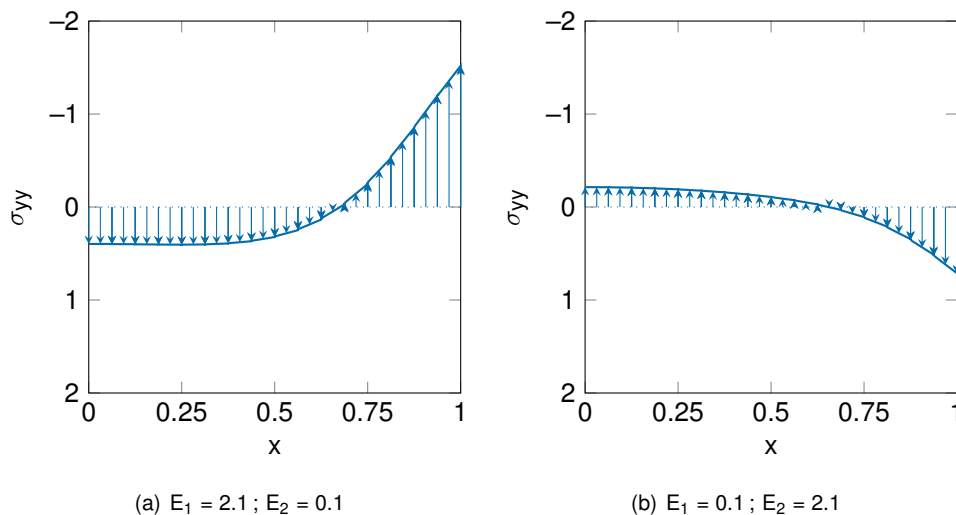


Nas Fig. 4.7 e Fig. 4.8, usando a malha uniforme com  $n_e = 1024$ , apresentam-se as tensões de tração ou de compressão que se geram na zona dos apoios, para as combinações de módulo de elasticidade das secções com os valores extremos opostos.

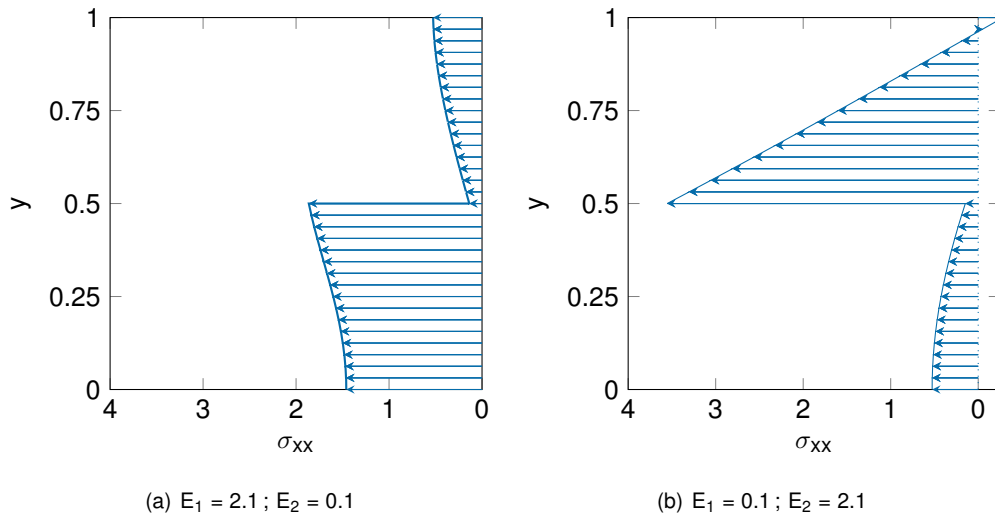
Na Fig. 4.7, é possível observar que se desenvolvem tensões verticais  $\sigma_{yy}$  no apoio inferior de resultante  $\int_0^1 \sigma_{yy} dx = 0$ , para as duas combinações, uma vez que não existe tensão vertical aplicada à placa. Para a situação em que a parte inferior é mais rígida ocorrem tensões de tração na parte inferior esquerda, uma vez que a placa tem a tendência de se levantar nesta zona e de comprimir na parte inferior direita. Para a combinação contrária, acontece o oposto.

A partir da Fig. 4.8, observa-se que para os casos em que a secção inferior é rígida e a superior flexível, uma maior percentagem da tensão horizontal aplicada, cerca de 80 %, é equilibrada pela secção inferior e, mesmo sendo flexível, 20 % pela secção superior. Para a combinação contrária, a secção superior é que absorve mais tensão, mantendo-se as percentagens de absorção da parte rígida e flexível. Para qualquer das combinações, a resultante das tensões,  $\int_0^1 \sigma_{xx} dy = 1$ , que corresponde à tensão aplicada. É possível ainda observar que para cada combinação, em cada apoio, esquerdo e inferior, geram-se momentos que se auto-equilibram globalmente.

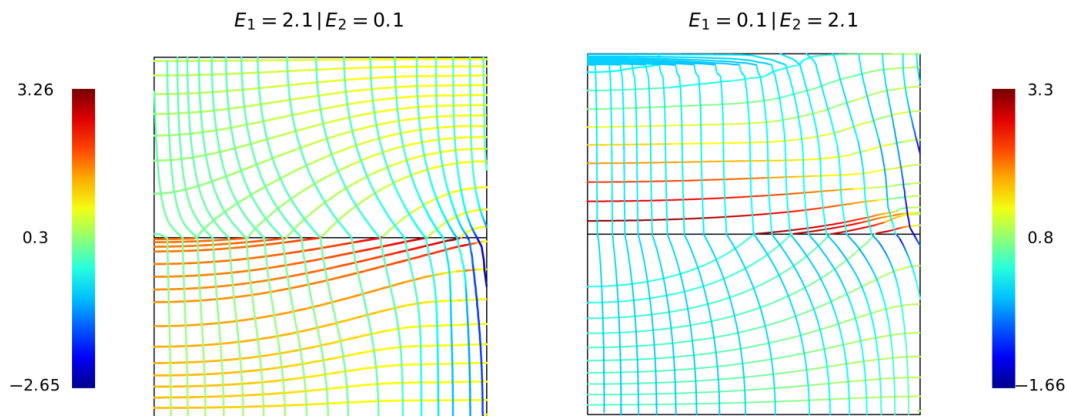
Na Fig. 4.9, apresentam-se as trajetórias das tensões principais, em que se ilustra o caminho que a tensão horizontal aplicada na extremidade livre direita perfaz até chegar à zona do apoio na extremidade esquerda. Ainda, é possível observar na fronteira do apoio inferior, que as tensões principais de tração de um lado e de compressão de outro, correspondem as tensões na fronteira apresentadas na Fig. 4.7. Da mesma forma, as tensões apresentadas na Fig. 4.8, correspondem às tensões principais na extremidade esquerda.



**Figura 4.7.** Distribuição de tensões  $\sigma_{yy}$  no encastramento deslizante inferior da placa (malha uniforme:  $n_e = 1024$ ).



**Figura 4.8.** Distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  no encastramento deslizante esquerdo da placa (malha uniforme:  $n_e = 1024$ ).



**Figura 4.9.** Trajectória das Tensões Principais para os casos em que as secções apresentam módulos de elasticidade extremos opostos

Na Fig. 4.10 e Fig. 4.11, apresenta-se o processo de enriquecimento da solução pelo PGD para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 e 3-6 modos do PGD, respetivamente, e relativo à malha da Fig. 4.2(a). Da mesma forma como foi ilustrado para a componente de tensão  $\sigma_{xx}$  anteriormente, apresenta-se este processo para 4 combinações de valores do módulo de elasticidade das secções que constituem a placa, em que dois casos correspondem a situação em que a placa é homogénea, com os seguintes módulos de elasticidade:  $E_1 = E_2 = E = 0,1$  e  $E_1 = E_2 = E = 2,1$ , e os outros dois casos correspondem a situação de uma placa não homogénea, em que as secções tomam os módulos de elasticidade:  $E_1 = 2,1, E_2 = 0,1$  e  $E_1 = 0,1, E_2 = 2,1$ . É de salientar que, a representação do campo de deslocamentos está sob a forma vetorial, pelo que a escala de cor engloba a informação da sua amplitude. A primeira coluna, de cada combinação de módulos de elasticidade, ilustra as soluções para o campo de deslocamentos referentes às 4 primeiras etapas, na Fig. 4.10, e às 4 etapas seguintes na Fig. 4.11. A segunda coluna, ilustra os modos usados para enriquecer as

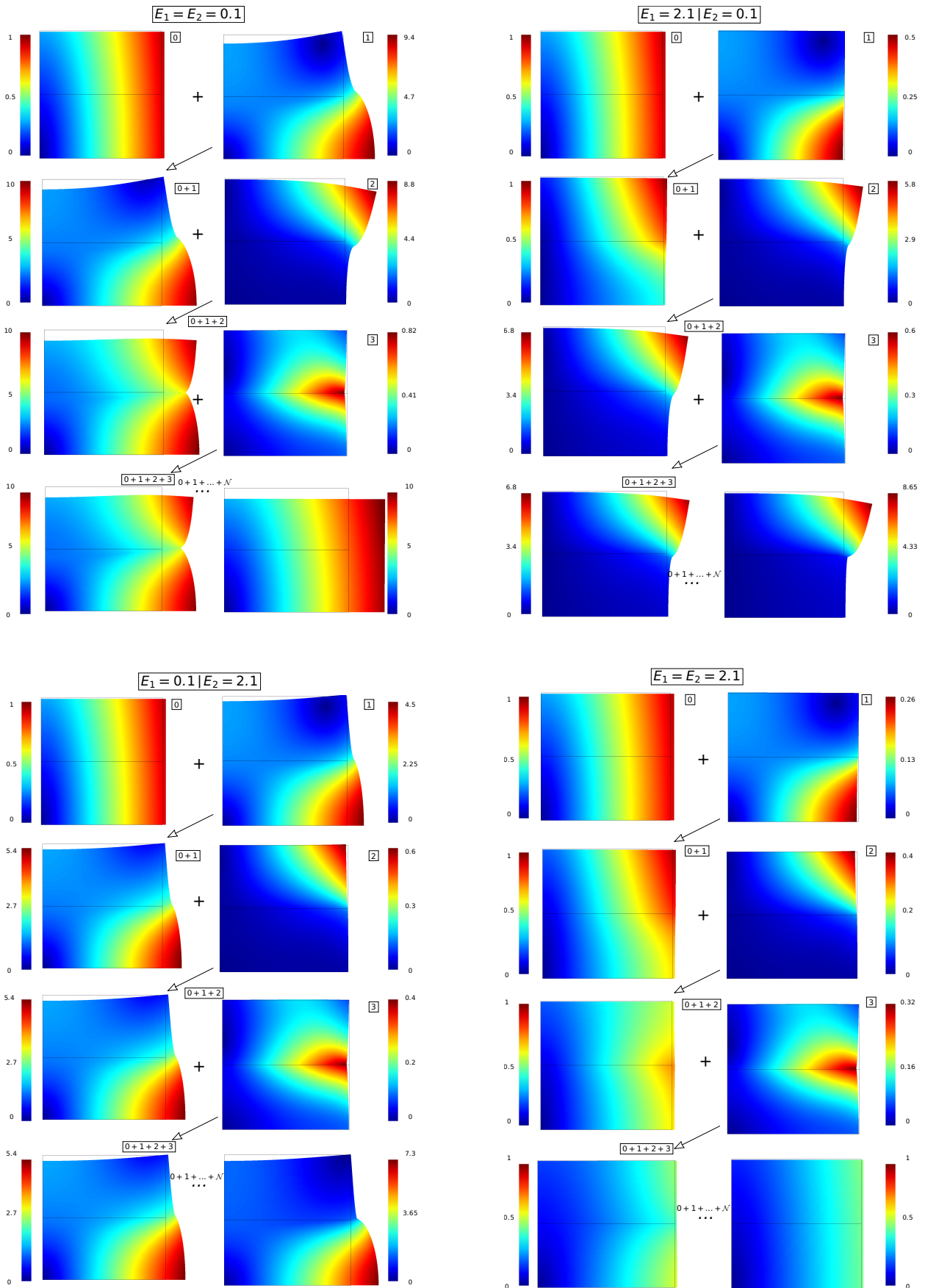
soluções, ao passar de uma etapa  $n$  para uma etapa  $n + 1$ .

É possível observar, para a etapa inicial e independentemente da combinação, que a aproximação corresponde à solução exata do problema homogêneo, com um valor do módulo de elasticidade a meio do domínio paramétrico  $[0,1;2,1]$ , i.e,  $E = 1,1$  e a função que representa esta solução inicial é dada por  $\delta_h(x) = \frac{x}{E}$ . Partindo desta solução inicial, para as combinações homogêneas, é possível observar que os deslocamentos são amplificados para o caso em que o módulo de elasticidade é menor, e reduzidos no caso em que o módulo de elasticidade é maior. Para o efeito, observa-se que o primeiro e o segundo modo desempenham um papel preponderante naquela ação, onde ambos apresentam um peso maior, no sentido de amplificar os deslocamentos, para o caso com o módulo de elasticidade,  $E$ , menor e, peso menor com sinal contrário, no sentido de reduzir os deslocamento, para o caso com o módulo de elasticidade,  $E$ , maior. Para as combinações não homogêneas, verifica-se que o primeiro modo é importante para o caso em que a secção inferior é flexível, enquanto que, o segundo modo é importante para o caso em que a secção superior é flexível. Assim, constata-se que os dois primeiros modos são os mais preponderantes, independentemente da combinação.

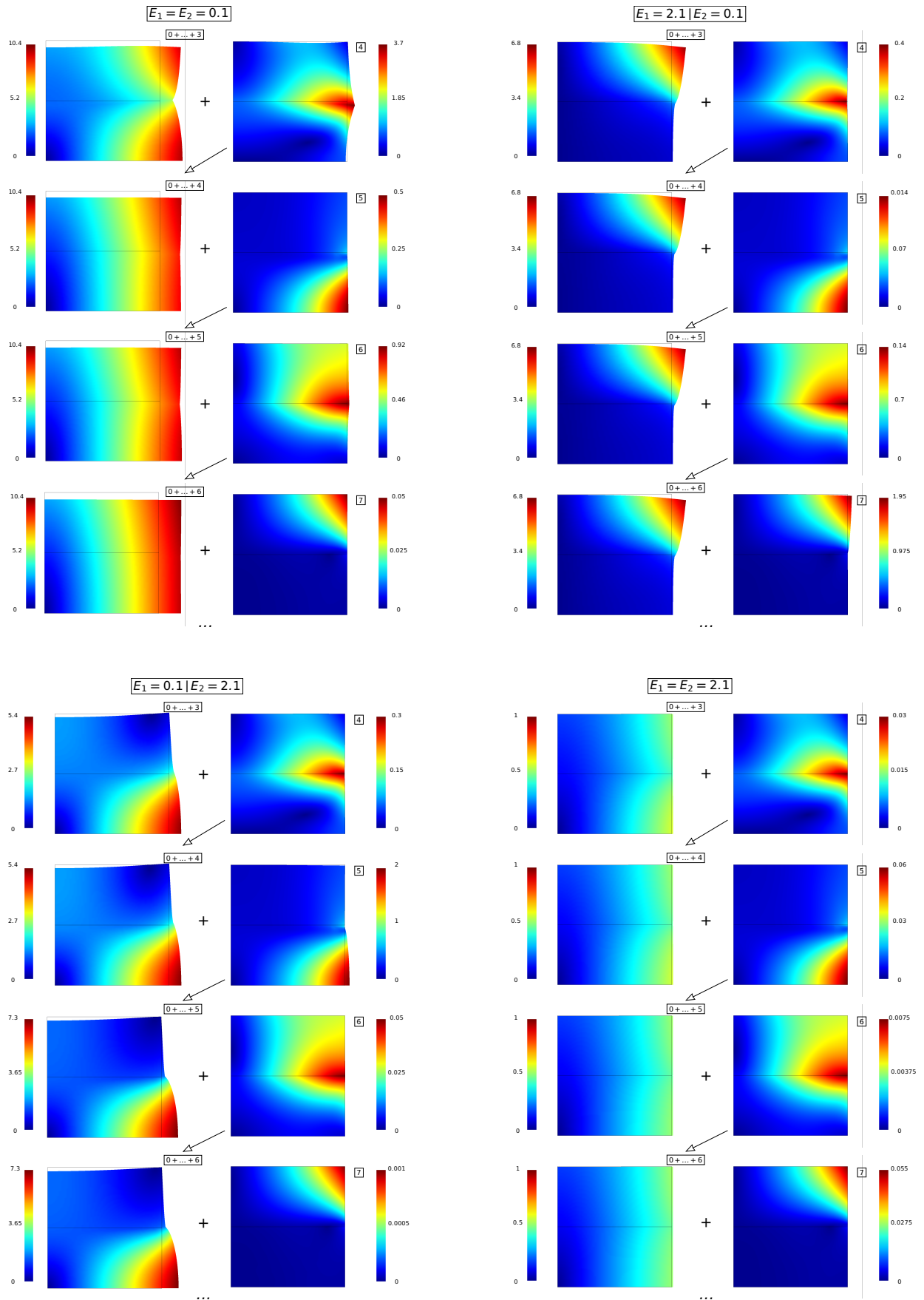
O terceiro modo, ao contrário dos dois primeiros, já apresenta um peso mais uniforme entre todas as combinações, porém, sendo mais visível a sua influência, para solução da combinação homogênea em que  $E_1 = E_2 = 2,1$ . É possível, ainda verificar que surgem outros modos, que são mais importantes numa dada combinação que noutra, como por exemplo, o 4º modo revela-se importante para a combinação homogênea com o módulo de elasticidade,  $E$ , menor, enquanto que o 5º modo revela-se importante para a combinação não homogênea que tem a parte inferior flexível, e, o 7º modo, para a combinação que tem a parte superior flexível.

Na Fig. 4.12, apresenta-se o processo de enriquecimento para a solução do campo de deslocamentos compatível ( $u$ ) da placa, usando a malha obtida por refinamento baseado no indicador do erro global das soluções. Limita-se a análise às combinações que apresentam a parte superior flexível, i.e,  $E_1 = E_2 = 0,1$  e  $E_1 = 2,1, E_2 = 0,1$ . Comparativamente ao processo apresentado para a malha uniforme, com  $n_e = 256$ , é possível notar, logo à primeira vista, a alteração do primeiro modo,  $\mathcal{N} = 1$ , sendo um modo que já não apresenta a parte superior completamente rígida, permitindo assim, que esta se deforme. O segundo modo,  $\mathcal{N} = 2$ , mantém a sua posição, verifica-se, porém, que existe uma redução do peso para a situação homogênea,  $E_1 = E_2 = 0,1$ , como consequência da deformação que se verifica na parte superior do primeiro modo. Para a combinação não homogênea,  $E_1 = 2,1, E_2 = 0,1$ , nota-se um aumento no peso do segundo modo. Verifica-se ainda, que o primeiro modo da malha uniforme, com  $n_e = 256$ , passa a ser o terceiro modo para esta nova malha, que tem maior impacto na combinação,  $E_1 = E_2 = 0,1$ , fazendo a correção do deslocamento excessivo na parte inferior da solução após o primeiro modo.

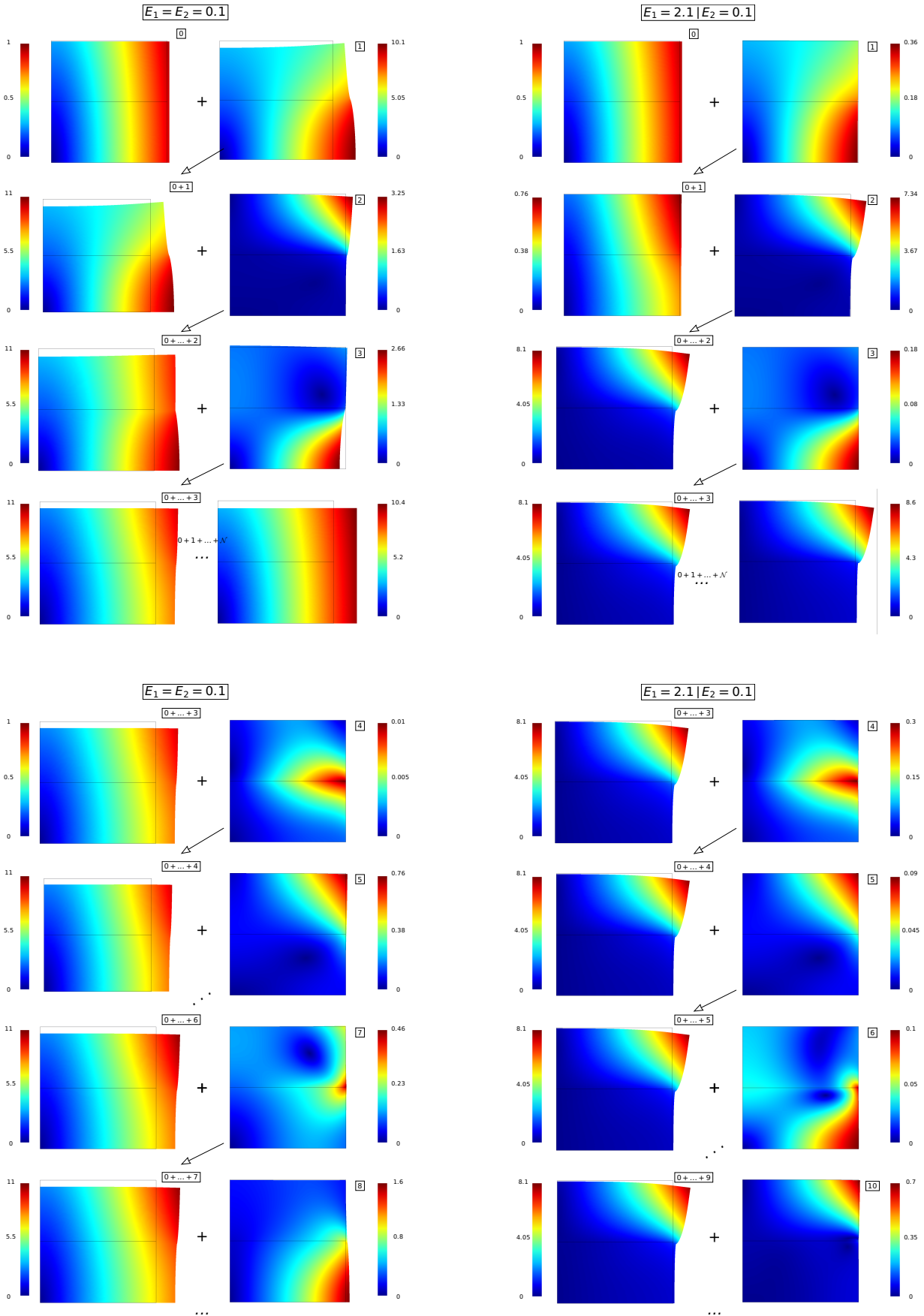
Para além dos 3 primeiros modos, observa-se que para a situação homogênea,  $E_1 = E_2 = 0,1$ , o 5º e o 8º modo são importantes para pequenos ajustes, mas importantes para a solução. Para a situação não homogênea,  $E_1 = 2,1, E_2 = 0,1$ , para além do segundo modo, que basicamente constitui a maior contribuição para a solução, nota-se a pequena, porém, importante contribuição do 10º modo, que amplifica ligeiramente o deslocamento na parte superior.



**Figura 4.10.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme:  $n_e = 256$ )



**Figura 4.11.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 3-6 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme:  $n_e = 256$ ).

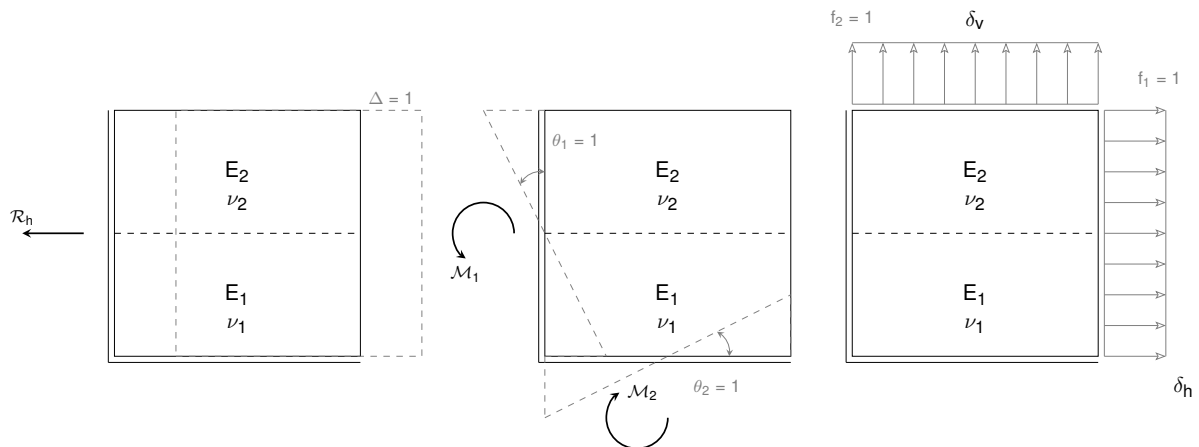


**Figura 4.12.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ) e correspondente às combinações com a parte superior flexível (global:  $n_e = 1589$ ). 1ª linha - Solução com 1-3 modos ; 2ª linha - Solução com 3-6 modos

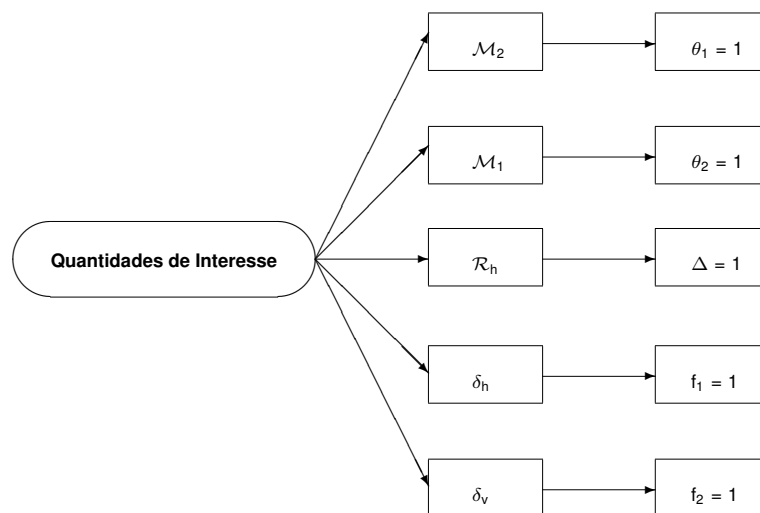
## 4.2.2 Convergência das Quantidades de Interesse (*Qdl*)

De seguida, efetua-se uma análise dos resultados, orientada aos valores de deslocamentos ou reações em regiões específicas da placa, e respetivos majorantes do erro.

Para o efeito, estudam-se as quantidades de interesse (*Qdl*) referentes às situações apresentadas na Fig. 4.13. Cada uma das situações, corresponde ao problema virtual que é necessário definir para a obtenção dos valores da quantidade de interesse que se deseja, como se ilustra no esquema da Fig. 4.14.



**Figura 4.13.** Quantidades de Interesse e Problemas Virtuais



**Figura 4.14.** Esquema representativo das Quantidades de Interesse consideradas e correspondentes Problemas Virtuais.

**Quantidade de Interesse:**  $\mathcal{R}_h$

Começa-se pela análise da reação horizontal no encastramento deslizando esquerdo, cujo problema virtual corresponde a impor uma translação horizontal unitária. Para uma malha uniforme, com  $n_e = 16$ , apresentam-se na Tab. 4.2, os valores obtidos para esta quantidade de interesse, em função do número de modos, fixando o valor do coeficiente de *Poisson*,  $\nu$ , e variando o módulo de elasticidade,  $E$ , das secções num dado intervalo.

$\Omega_E = [0,1;2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$
modos	$\Delta = 1$			
0	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00
1	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00
...	...	...	...	...
40	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00	1,00 ± 0,00

**Tabela 4.2.** Valor da Reação Horizontal,  $\mathcal{R}_h$ , e majorantes do erro em função do número de modos para diferentes combinações dos módulos de elasticidade dos materiais (refinamento uniforme:  $n_e = 16$ ).

A partir da Tab. 4.2, é possível verificar que logo para a solução inicial do método e para as diferentes combinações dos módulos de elasticidade, o valor da reação é igual à solução exata do problema. Relativamente ao majorante do erro, uma vez que o problema virtual associado a esta quantidade de interesse tem solução exata, sucede que o erro associado ao problema virtual,  $\bar{\epsilon} = 0 \rightarrow \epsilon_{a_{local}} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \epsilon = 0$ . Relativamente ao valor médio, de forma que haja equilíbrio, o integral das tensões,  $\sigma_{xx}$ , na extremidade esquerda da placa tem que verificar,  $\int_0^1 \sigma_{xx} dy = 1$ , qualquer que seja a combinação de módulos de elasticidade das secções. Por estas razões, os resultados relativos a esta quantidade de interesse não se alteram, independentemente dos detalhes usados para a aproximação das soluções, i.e, número de elementos das malhas, número de modos e intervalo do domínio paramétrico.

**Quantidade de Interesse:**  $\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_2$

Para qualquer combinação de parâmetros, verifica-se que  $\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_2$ , isto é, um é o simétrico do outro, de forma que a sua soma seja nula. Neste sentido, tange-se apenas na análise de um dos momentos, escolhendo-se para tal  $\mathcal{M}_1$ , relativo ao momento gerado no apoio esquerdo da placa. Ao contrário do problema anterior, o problema virtual associado a esta quantidade de interesse, que corresponde a impor uma rotação virtual unitária, já não apresenta solução exata, o que implica que o erro associado ao problema virtual,  $\bar{\epsilon} \neq 0$ , e por conseguinte, o majorante do erro,  $\epsilon_{a_{local}} \neq 0$ . Neste sentido, a qualidade dos resultados está dependente de alguns aspetos ligados à aproximação das soluções, como por exemplo o tipo e número de elementos das malhas, o número de modos e o intervalo do domínio paramétrico.

Para os casos em que ambos os módulos de elasticidade são iguais, apresentam-se os valores médios e os majorantes do erro na Tab. 4.3 e Tab. 4.4, relativos às malhas com  $n_e = 16$  e  $n_e = 1024$ ,



respetivamente, obtidas a partir de um refinamento uniforme. Da mesma forma, apresentam-se na Tab. 4.5 os valores para os casos em que os módulos de elasticidade são extremos. Saliente-se que a solução exata do problema homogéneo é  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = 0$ . Para além dos valores de  $\mathcal{M}_1$ , para os casos em que os módulos de elasticidade são iguais apresentam-se os valores de  $\mathcal{M}_2$ , e os majorantes do erro, de forma a ilustrar que os valores médios são simétricos e que os majorantes de erro são iguais. Nos casos apresentados, o intervalo do domínio paramétrico usado é o mesmo, pretendendo avaliar os resultados em termos do número de modos e do número de elementos da malha. Os gráficos apresentados na Fig. 4.15, complementam a informação da Tab. 4.3, Tab. 4.4 e Tab. 4.5, ilustrando-se os resultados para todos os modos inferiores a 10 e também usando outras duas malhas uniformes intermédias, com  $n_e = 64$  e  $n_e = 256$ .

$\Omega_E = [0,1;2,1]$ $\Omega_\nu = 0,3$ — Malha: $n_e = 16$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$
modos	$\theta_1 = 1$		$\theta_2 = 1$	
0	-0,00000 ± 0,12973	-0,00000 ± 0,12973	0,00000 ± 0,12973	0,00000 ± 0,12973
1	-0,01144 ± 0,07371	0,02357 ± 0,09756	0,01145 ± 0,07372	-0,02358 ± 0,09755
10	-0,00000 ± 0,00308	-0,00012 ± 0,00196	0,00000 ± 0,00308	0,00012 ± 0,00196
20	0,00000 ± 0,00071	-0,00002 ± 0,00125	0,00000 ± 0,00071	0,00002 ± 0,00125
40	0,00000 ± 0,00071	-0,00002 ± 0,00125	0,00000 ± 0,00071	0,00002 ± 0,00125

**Tabela 4.3.** Valor médio dos Momentos,  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , e respetivos majorantes do erro, em função do número de modos, para as situações com os módulos de elasticidade dos materiais iguais (refinamento uniforme:  $n_e = 16$ ).

$\Omega_E = [0,1;2,1]$ $\Omega_\nu = 0,3$ — Malha: $n_e = 1024$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$
modos	$\theta_1 = 1$		$\theta_2 = 1$	
0	-0,00000 ± 0,12393	0,00000 ± 0,12393	-0,00000 ± 0,12393	-0,00000 ± 0,12393
1	-0,00970 ± 0,02462	-0,04595 ± 0,17700	0,00970 ± 0,02462	0,04596 ± 0,17700
10	0,00000 ± 0,00042	0,00007 ± 0,00017	-0,00000 ± 0,00042	-0,00007 ± 0,00017
20	0,00000 ± 0,00010	-0,00000 ± 0,00003	0,00000 ± 0,00010	-0,00000 ± 0,00003
40	0,00000 ± 0,00003	0,00000 ± 0,00002	0,00000 ± 0,00003	0,00000 ± 0,00002

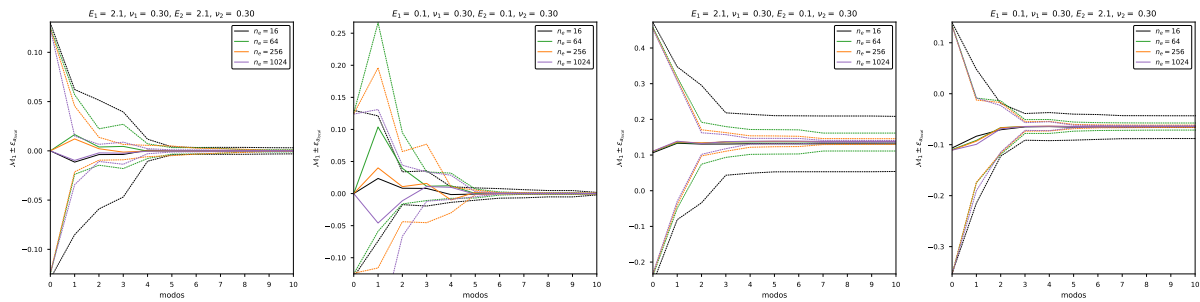
**Tabela 4.4.** Valor médio dos Momentos,  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , e respetivos majorantes do erro, em função do número de modos, para as situações com os módulos de elasticidade dos materiais iguais (refinamento uniforme:  $n_e = 1024$ ).

A partir dos resultados apresentados na Tab. 4.3 e Tab. 4.4, relativos aos casos homogéneos, observa-se que o valor médio do momento, para a aproximação inicial do método, coincide com o valor da solução exata do problema, porém, pelo facto do PGD modificar a solução globalmente nos modos seguintes, de forma a também satisfazer as outras combinações dos parâmetros, sucede que os valores médios associados a quantidade de interesse também acabam por ser alterados. Verifica-se ainda que o valor médio,  $\mathcal{M}_1$ , é recuperado com um número de modos do PGD inferior a 10, i.e, com

aproximadamente 5-6 modos, e que os majorantes do erro estabilizam com 20 modos, para a malha com  $n_e = 16$ , e com 40 modos, para a malha mais refinada, sendo menores neste ultimo caso.

$\Omega_E = [0,1; 2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3$				
Parâmetros	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$
modos	uniforme: $n_e = 16$		uniforme: $n_e = 1024$	
0	$0,10646 \pm 0,36522$	$-0,10646 \pm 0,24606$	$0,11077 \pm 0,34289$	$-0,11077 \pm 0,24376$
1	$0,13307 \pm 0,21423$	$-0,08339 \pm 0,13126$	$0,13877 \pm 0,16832$	$-0,09932 \pm 0,09092$
10	$0,13114 \pm 0,07719$	$-0,06561 \pm 0,02233$	$0,13822 \pm 0,00261$	$-0,06380 \pm 0,00083$
20	$0,13114 \pm 0,07705$	$-0,06558 \pm 0,02217$	$0,13825 \pm 0,00249$	$-0,06380 \pm 0,00062$
40	$0,13114 \pm 0,07705$	$-0,06558 \pm 0,02217$	$0,13825 \pm 0,00248$	$-0,06380 \pm 0,00062$

**Tabela 4.5.** Valor médio do Momento,  $\mathcal{M}_1$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais extremos opostos (refinamento uniforme:  $n_e = 16$  e  $n_e = 1024$ )



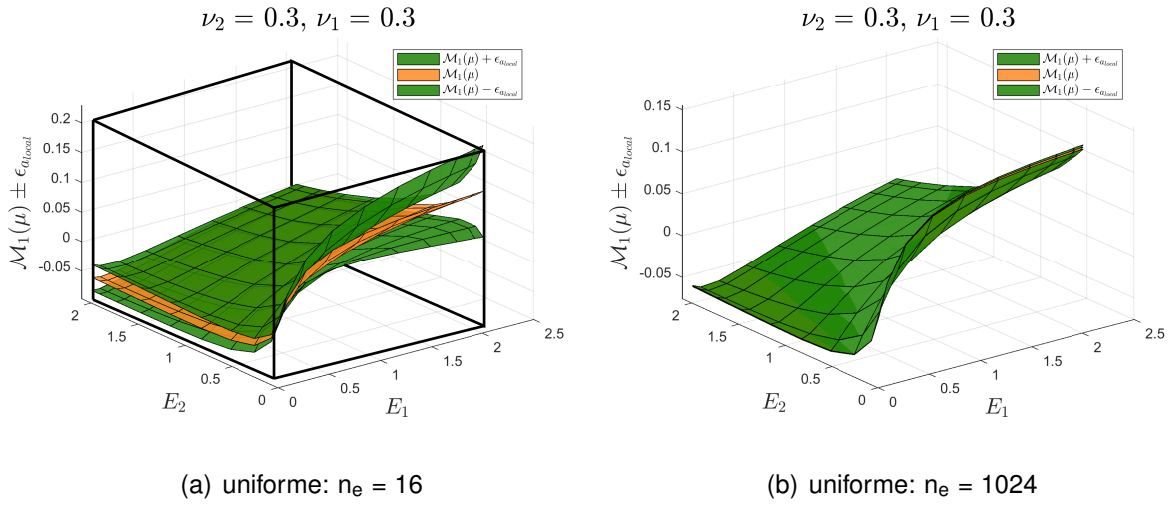
**Figura 4.15.** Valor médio do Momento,  $\mathcal{M}_1$ , e os seus limites, em função do número de modos, para as combinações dos módulos de elasticidade das secções correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico e para diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme.

Para os casos em que os módulos de elasticidade são extremos opostos, verifica-se na Tab. 4.5 que quando a secção inferior é rígida gera-se um maior valor do momento nos apoios, comparativamente ao caso em que a secção superior é rígida. A partir dos gráficos apresentados na Fig. 4.15, é possível observar que quando os módulos de elasticidade são extremos opostos, os valores médios do momento não diferem muito entre as malhas para os 10 primeiros modos apresentados, ao contrário do que se verifica para os casos em que os módulos de elasticidade são iguais, particularmente para as soluções com os 5 primeiros modos do PGD. Uma das razões que pode explicar isto, é o facto da solução global ser modificada nos primeiros modos, para os casos homogéneos, enquanto que para as situações no qual os módulos de elasticidade são extremos opostos, aqueles primeiros modos são fundamentais para estabelecer a solução.

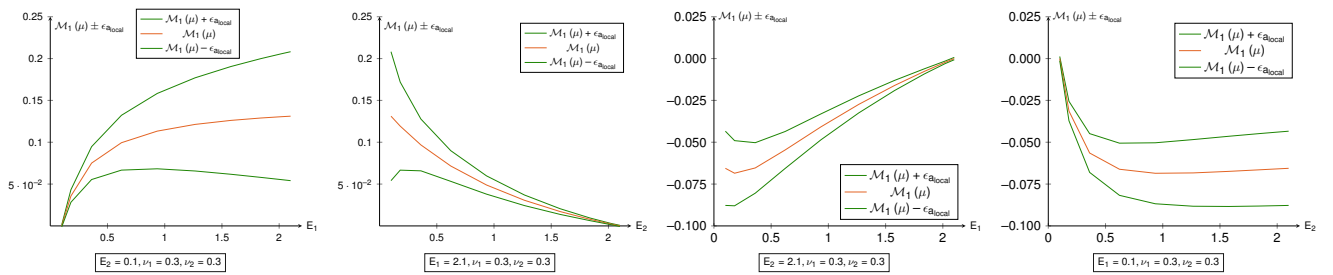
De forma geral, é possível verificar que os majorantes do erro são maiores com poucos modos, uma vez que o erro global das soluções,  $\epsilon$ , ainda são significativos, e menores com mais modos do PGD.

Para as soluções já convergidas, na Fig. 4.16 apresentam-se os valores do momento e os limites, superior e inferior, para as várias combinações dos módulos de elasticidade e usando as malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme com  $n_e = 16$  e  $n_e = 1024$ . Nos gráficos da Fig. 4.17, apresentam-se as secções correspondentes aos 4 extremos do gráfico da Fig. 4.16(a). Na Fig. 4.18, usando malhas

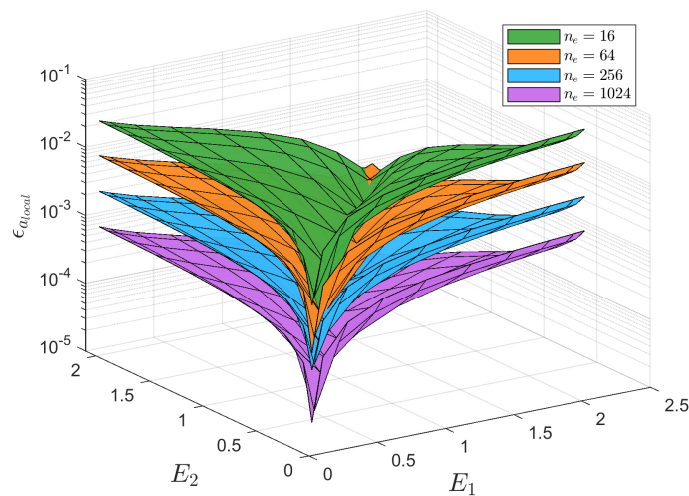
uniformes com diferentes número de elementos, apresentam-se os majorantes do erro para as várias combinações dos módulos de elasticidade.



**Figura 4.16.** Valor médio,  $\mathcal{M}_1$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais.



**Figura 4.17.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.16(a) para:  $E_2 = 0.1$ ,  $E_1 = 2.1$ ,  $E_2 = 2.1$  e  $E_1 = 0.1$ .

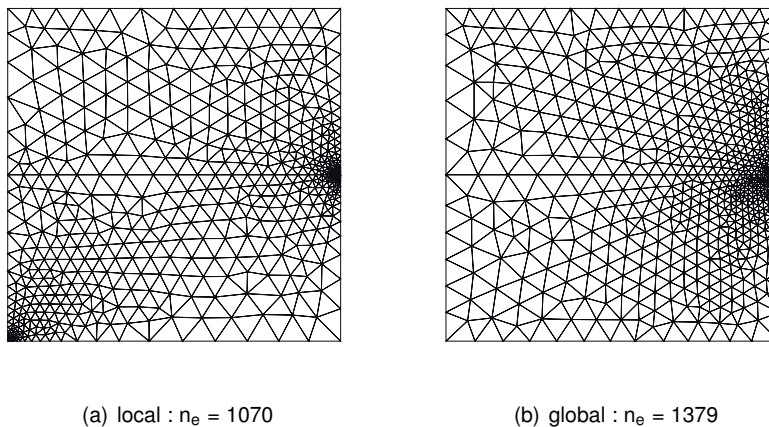


**Figura 4.18.** Majorantes do erro associados aos valores de  $\mathcal{M}_1$ , para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade e para diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme.

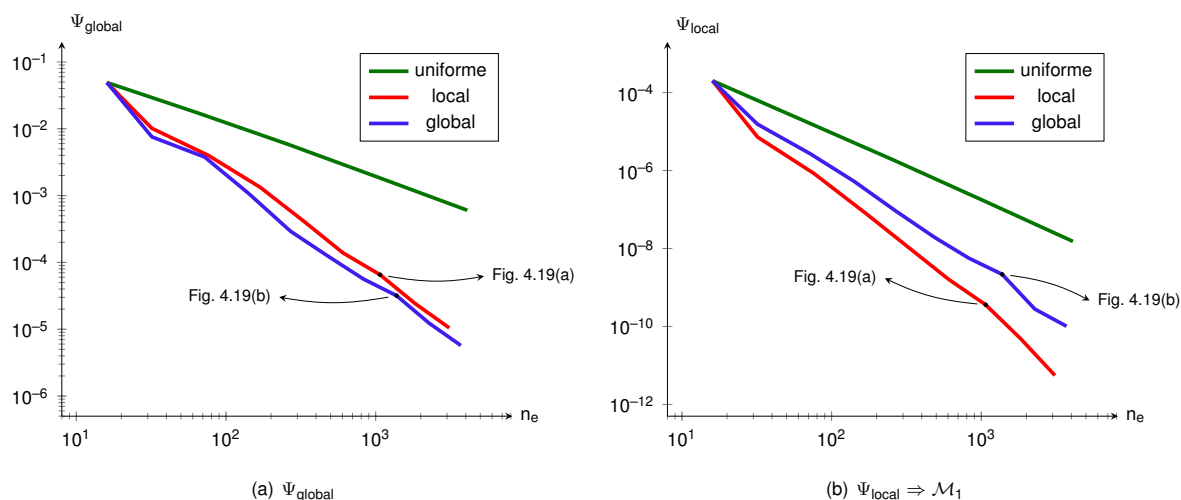
Observa-se claramente nos gráficos da Fig. 4.17, que os maiores majorantes do erro se verificam para os casos em que os módulos de elasticidade apresentam valores extremos opostos e menores erros para os casos em que são semelhantes. E utilizando uma malha mais refinada, na Fig. 4.16(b), a superfície do valor médio e dos seus limites praticamente se confundem. Verifica-se ainda, que se geram momentos nulos para os casos em que os materiais são semelhantes e o maior e menor momento, em valor absoluto, para os casos:  $E_1 = 2,1$ ;  $E_2 = 0,1$  e  $E_1 = 0,1$ ;  $E_2 = 2,1$ , respectivamente. No gráfico da Fig. 4.18, verifica-se que quanto mais refinada for a malha, menores valores se obtêm para os majorantes do erro. E mais uma vez, é possível ainda observar que no espaço dos parâmetros os maiores valores dos erros se registam nos casos em que os materiais apresentam valores extremos opostos do módulo de elasticidade, e os menores erros quando os módulos de elasticidade são iguais.

### Refinamento Adaptativo, usando como $Qdl$ $\mathcal{M}_1$

Usando o refinamento adaptativo, baseado no indicador do erro global e local, obtêm-se as malhas apresentadas na Fig. 4.19. Na Fig. 4.20, apresenta-se o integral no espaço paramétrico do majorante do erro das malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme e do processo adaptativo baseado no indicador do erro global e local.



**Figura 4.19.** Malhas de elementos finitos geradas a partir refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando o momento,  $\mathcal{M}_1$ , como a  $Qdl$ .



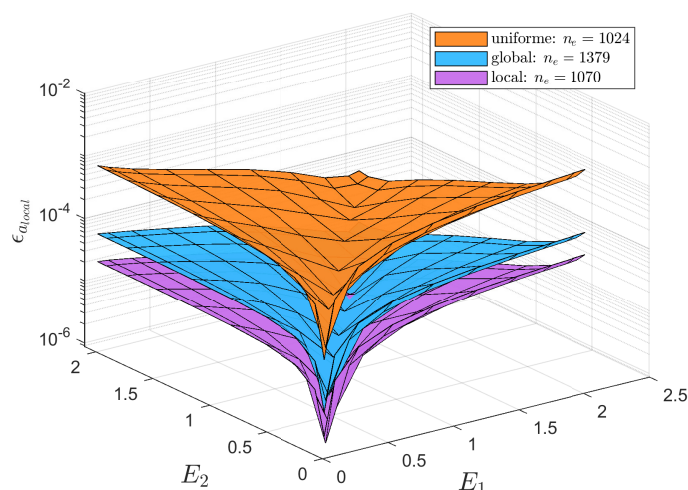
**Figura 4.20.** Integral no espaço paramétrico do majorante do erro em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando o momento,  $\mathcal{M}_1$ , como a  $Qdl$ .

A partir da Fig. 4.20(a) e Fig. 4.20(b), observa-se que o refinamento global conduz a menores majorantes do erro global, enquanto que o refinamento local conduz a melhores resultados para os majorantes do erro da  $Qdl$ . As malhas do refinamento uniforme apresentam os maiores erros em ambos os casos. É possível observar na Fig. 4.19(a) que a malha do refinamento local, para além de representar a zona de singularidade mecânica, consegue também representar o efeito da ação virtual na solução do problema, apresentando para tal um maior refinamento no canto inferior esquerdo da placa.

Na Tab. 4.6, apresentam-se os valores médios para o momento,  $\mathcal{M}_1$ , e os majorantes do erro, limitando a apresentação dos resultados para as malhas da Fig. 4.19(a) e Fig. 4.19(b) e para os casos em que os materiais possuem módulos de elasticidade extremos opostos. No gráfico da Fig. 4.21, apresentam-se os majorantes do erro, para as várias combinações dos módulos de elasticidade e usando os três diferentes tipos de malhas: uniforme, global e local.

$\Omega_E = [0,1; 2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3$				
Parâmetros	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$		$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$	
modos	global: $n_e = 1379$	local: $n_e = 1070$	global: $n_e = 1379$	local: $n_e = 1070$
0	0,11084 ± 0,34285	0,11084 ± 0,34250	-0,11084 ± 0,24373	-0,11084 ± 0,24370
1	0,13877 ± 0,16761	0,13886 ± 0,16710	-0,10036 ± 0,09231	-0,09978 ± 0,09143
5	0,13838 ± 0,00122	0,13901 ± 0,00371	-0,06405 ± 0,00686	-0,06420 ± 0,00140
10	0,13842 ± 0,00064	0,13842 ± 0,00020	-0,06371 ± 0,00022	-0,06372 ± 0,00017
20	0,13846 ± 0,00027	0,13845 ± 0,00011	-0,06372 ± 0,00006	-0,06372 ± 0,00002
40	0,13846 ± 0,00024	0,13845 ± 0,00011	-0,06372 ± 0,00005	-0,06372 ± 0,00002

**Tabela 4.6.** Valor médio do Momento,  $\mathcal{M}_1$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais de valores extremos opostos (local:  $n_e = 1070$  e global:  $n_e = 1379$ )



**Figura 4.21.** Majorantes do erro associados aos valores de  $\mathcal{M}_1$ , para várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais e para três diferentes tipos de malhas.

A partir da Tab. 4.6, é possível verificar que o valor médio estabiliza por volta dos 20 modos, enquanto que os majorantes do erro aos 40 modos do PGD. A partir do gráfico da Fig. 4.21, verifica-se que a malha do refinamento uniforme apresenta os maiores valores para o majorante do erro comparativamente às malhas obtidas usando o refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local. Por sua vez, a malha obtida a partir do refinamento local apresenta os menores valores para os majorantes do erro do que a malha obtida a partir do refinamento global, como esperado, mesmo possuindo um menor número de elementos.

**Quantidade de Interesse:**  $\delta_h$  e  $\delta_v$

Na Tab. 4.7, são apresentados os valores da solução exata do problema homogéneo, referentes as quantidades em questão, para diferentes combinações dos parâmetros, E e  $\nu$ , para comparação a *posteriori* com os resultados obtidos pelo PGD.

$\nu \setminus E$	$\delta_h$ exato		$\delta_v$ exato	
	0,1	2,1	0,1	2,1
0	10	0,47619	0	0
0,3	10	0,47619	3	0,14286

**Tabela 4.7.** Solução exata do problema homogéneo para as quantidades de interesse  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , para diferentes combinações de parâmetros E e  $\nu$

Pretende-se perceber o impacto que cada um dos parâmetros tem na construção das soluções pelo PGD. Para tal, fixa-se o parâmetro correspondente ao módulo de elasticidade E e varia-se o parâmetro  $\nu$  e vice-versa. Assim, na Tab. 4.8 e Tab. 4.9, são apresentados os resultados referentes a  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , respetivamente, utilizando uma malha uniforme, com  $n_e = 16$ , para diferentes combinações do coeficiente de *Poisson*,  $\nu$ , fixando neste caso o valor do módulo de elasticidade, E.

$\Omega_E = 0,1 \quad \Omega_\nu = [0; 0,3] \text{ — uniforme: } n_e = 16$				
Parâmetros	$\nu_1 = \nu_2 = 0$	$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$	$\nu_1 = 0; \nu_2 = 0,3$	$\nu_1 = 0,3; \nu_2 = 0$
modos	$f_1 = 1$			
0	$9,87961 \pm 0,12039$	$9,89021 \pm 0,10979$	$9,88491 \pm 0,11509$	$9,88491 \pm 0,11509$
1	$9,93896 \pm 0,06104$	$9,94377 \pm 0,05623$	$9,94376 \pm 0,05624$	$9,93803 \pm 0,06197$
5	$10,00000 \pm 0,00000$	$10,00000 \pm 0,00000$	$10,00000 \pm 0,00000$	$10,00000 \pm 0,00000$
10	$10,00000 \pm 0,00000$	$10,00000 \pm 0,00000$	$10,00000 \pm 0,00000$	$10,00000 \pm 0,00000$

**Tabela 4.8.** Valor do deslocamento médio,  $\delta_h$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para diferentes combinações do coeficiente de *Poisson*  $\nu$ , fixando  $\Omega_E$  (refinamento uniforme:  $n_e = 16$ )

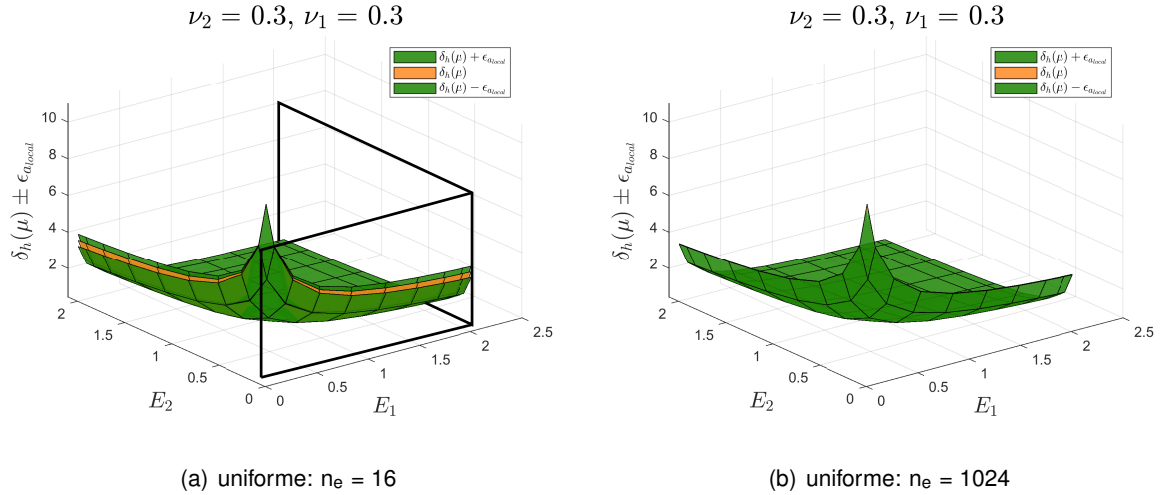
$\Omega_E = 0,1 \quad \Omega_\nu = [0; 0,3] \text{ — uniforme: } n_e = 16$				
Parâmetros	$\nu_1 = \nu_2 = 0$	$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$	$\nu_1 = 0; \nu_2 = 0,3$	$\nu_1 = 0,3; \nu_2 = 0$
modos	$f_2 = 1$			
0	$-0,03532 \pm 0,12039$	$-2,99921 \pm 0,10979$	$-1,51726 \pm 0,11509$	$-1,51726 \pm 0,11509$
1	$-0,01814 \pm 0,05900$	$-2,99614 \pm 0,05274$	$-1,50266 \pm 0,06726$	$-1,51656 \pm 0,06026$
5	$-0,00000 \pm 0,00000$	$-3,00000 \pm 0,00001$	$-1,50000 \pm 0,00017$	$-1,50000 \pm 0,00015$
10	$0,00000 \pm 0,00000$	$-3,00000 \pm 0,00000$	$-1,50000 \pm 0,00001$	$-1,50000 \pm 0,00000$

**Tabela 4.9.** Valor do deslocamento médio,  $\delta_v$ , e majorantes do erro em função do número de modos, para diferentes combinações do coeficiente de *Poisson*  $\nu$ , fixando  $\Omega_E$  (refinamento uniforme:  $n_e = 16$ ).

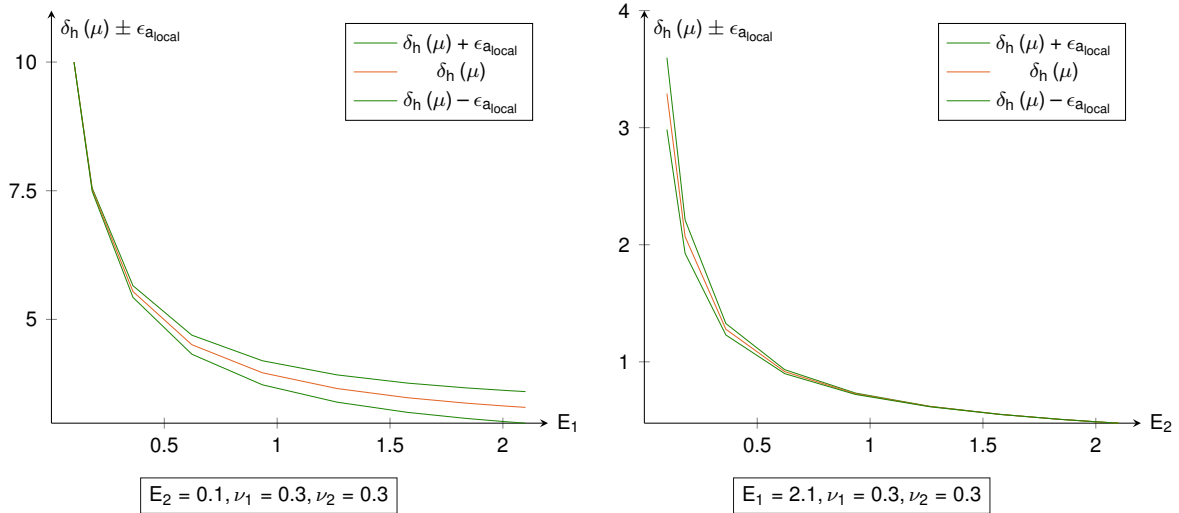
Usando a mesma malha, na Tab. 4.10 e Tab. 4.11, apresentam-se os resultados de  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , respectivamente, para as combinações do módulo de elasticidade correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico, e fixando o valor de coeficiente de *Poisson*  $\nu$ .

$\Omega_E = [0,1; 2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3 \text{ — Malha: } n_e = 16$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = 2,1; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1; E_2 = 2,1$
modos	$f_1 = 1$			
0	$0,27942 \pm 0,19677$	$5,86777 \pm 4,13223$	$3,07359 \pm 2,16450$	$3,07359 \pm 2,16450$
1	$0,31465 \pm 0,22228$	$10,43429 \pm 0,86409$	$2,30810 \pm 1,37149$	$2,54075 \pm 1,65524$
5	$0,47615 \pm 0,00077$	$9,94282 \pm 0,08039$	$3,28300 \pm 0,31814$	$3,35141 \pm 0,38974$
10	$0,47584 \pm 0,00045$	$9,99716 \pm 0,00371$	$3,29039 \pm 0,30713$	$3,40211 \pm 0,33431$
20	$0,47617 \pm 0,00002$	$9,99851 \pm 0,00153$	$3,29084 \pm 0,30658$	$3,40346 \pm 0,33246$

**Tabela 4.10.** Valores dos deslocamentos médios,  $\delta_h$ , e majorantes do erro em função do número de modos para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico, fixando  $\Omega_\nu$  (refinamento uniforme:  $n_e = 16$ )



**Figura 4.22.** Valores dos deslocamentos médios,  $\delta_h$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais.

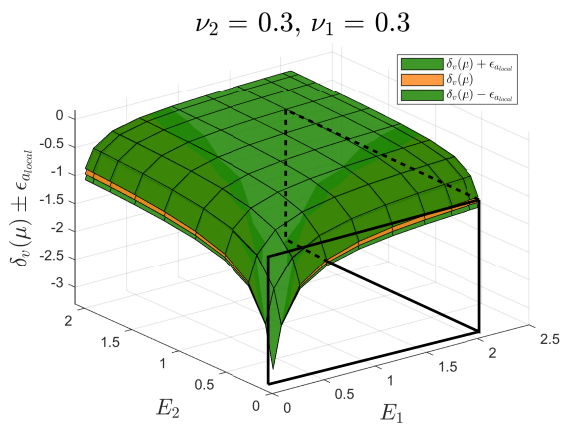


**Figura 4.23.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.22(a) para:  $E_2 = 0.1$  e  $E_1 = 2.1$ .

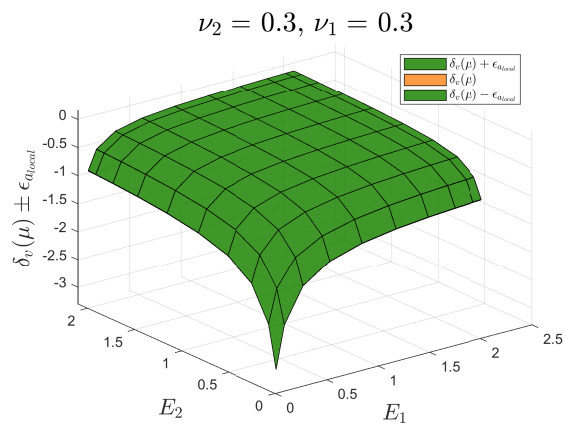
$\Omega_E = [0,1; 2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3$ — Malha: $n_e = 16$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = 2,1; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1; E_2 = 2,1$
modos	$f_2 = 1$			
0	$-0,08383 \pm 0,19677$	$-1,76033 \pm 4,13223$	$-0,92208 \pm 2,16450$	$-0,92208 \pm 2,16450$
1	$-0,11253 \pm 0,15130$	$-3,17679 \pm 1,36720$	$-0,71351 \pm 1,65615$	$-1,13076 \pm 0,53707$
5	$-0,14297 \pm 0,00036$	$-3,00468 \pm 0,01362$	$-0,98451 \pm 0,09758$	$-1,01875 \pm 0,10969$
10	$-0,14287 \pm 0,00008$	$-3,00077 \pm 0,00117$	$-0,98744 \pm 0,09201$	$-1,02111 \pm 0,10005$
20	$-0,14287 \pm 0,00002$	$-3,00013 \pm 0,00032$	$-0,98746 \pm 0,09191$	$-1,02116 \pm 0,09973$

**Tabela 4.11.** Valor dos deslocamentos médios,  $\delta_v$ , e majorantes do erro, em função do número de modos, para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico, fixando  $\Omega_\nu$  (refinamento uniforme:  $n_e = 16$ )



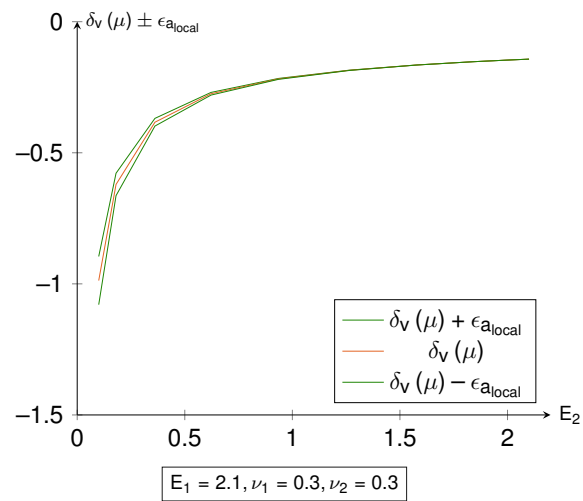
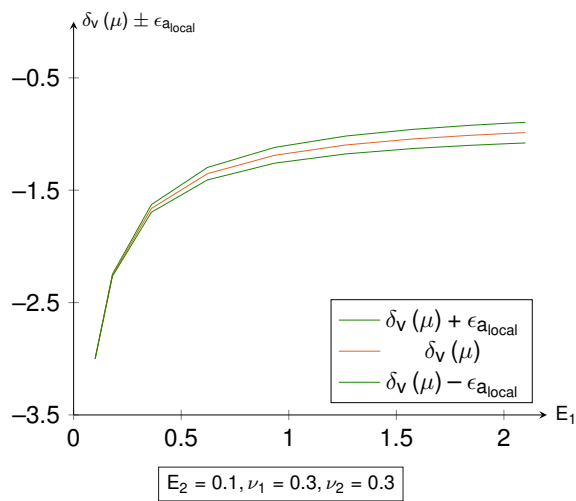


(a) uniforme:  $n_e = 16$

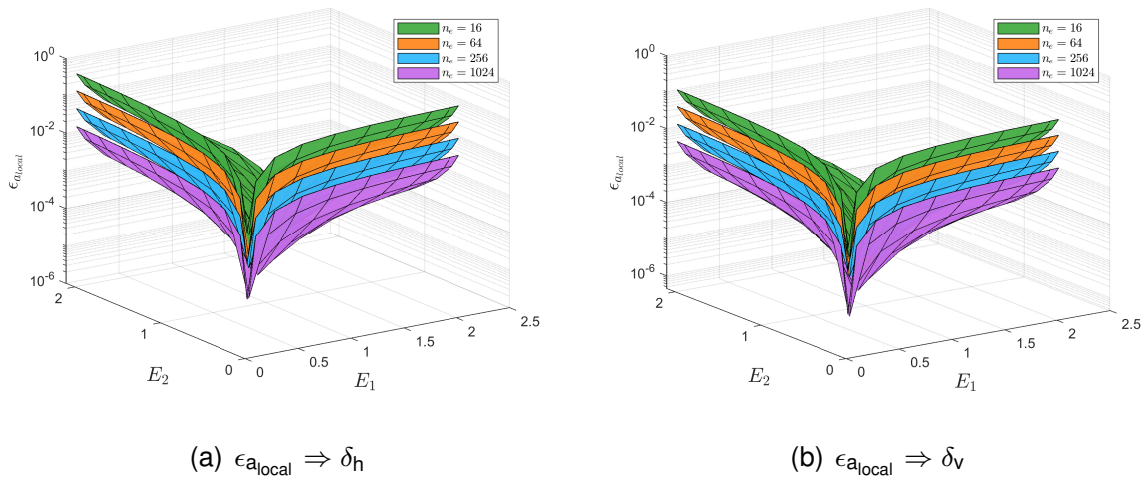


(b) uniforme:  $n_e = 1024$

**Figura 4.24.** Valores dos deslocamentos médios,  $\delta_v$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais.



**Figura 4.25.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.24(a) para:  $E_2 = 0.1$  e  $E_1 = 2.1$ .



**Figura 4.26.** Majorantes do erro para os deslocamentos médios,  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais e usando diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme.

Nos gráficos da Fig. 4.22 e Fig. 4.24, apresentam-se os valores dos deslocamentos médios,  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , respetivamente, e os seus limites, para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais. Para cada  $Qdl$ , ainda apresentam-se nos gráficos da Fig. 4.23 e Fig. 4.25, secções específicas dos gráficos apresentados na Fig. 4.22(a) e Fig. 4.24(a). Por fim, ilustram-se na Fig. 4.26, os majorantes do erro para as várias combinações dos módulos de elasticidade, usando diferentes malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme.

Relativamente ao valor do deslocamento horizontal na extremidade direita da placa,  $\delta_h$ , verifica-se a partir da Tab. 4.8, que fixando o valor do módulo de elasticidade, em  $E = 0,1$ , o valor médio  $\delta_h$  atinge a solução exata do problema homogéneo com  $\mathcal{N} = 5$  modos do PGD, independentemente da combinação dos valores do coeficiente de *Poisson*  $\nu$ , uma vez que na solução exata o valor de  $\delta_h$  não depende daquele parâmetro, enquanto que, variando os valores dos módulos de elasticidade,  $E$ , num dado intervalo, como consta na Tab. 4.10, é possível observar que para a combinação de parâmetros específica,  $E_1 = E_2 = E = 0,1$ , o valor médio não atinge propriamente o valor da solução exata com  $\mathcal{N} = 5$  modos, pelo que, só com  $\mathcal{N} = 20$  modos é que se verifica o valor mais próximo do exato e com o majorante do erro já suficientemente pequeno. Para a combinação específica,  $E_1 = E_2 = 2,1$ , para  $\mathcal{N} = 20$  modos, nota-se um facto curioso, que mostra o valor exato,  $\delta_h^{\text{ex.}} = 0,47619$ , mesmo no limite do intervalo do erro, ficando assim a prova de que o majorante do erro,  $\epsilon_{a_{\text{local}}}$ , é extremamente rigoroso. Do gráfico apresentado na Fig. 4.22(a) e das secções representadas na Fig. 4.23, é possível verificar, por um lado, que o maior valor do deslocamento se verifica, como se seria de esperar, quando ambos materiais são flexíveis e o menor quando são rígidos, e por outro lado, que os majorantes dos erro são maiores para os casos em que os módulos de elasticidade são extremos opostos, i.e,  $E_2 = 0,1$ ;  $E_1 = 2,1$  e  $E_2 = 2,1$ ;  $E_1 = 0,1$ , comparativamente aos casos em que os módulos de elasticidade são iguais. Da Fig. 4.26(a), é possível também retirar a mesma conclusão, observando-se ainda que refinando a malha obtêm-se, regra geral, majorantes do erro menores, tanto que para a malha da Fig. 4.22(b) não se consegue distinguir o valor médio dos limites.

Relativamente ao valor do deslocamento vertical na extremidade superior da placa,  $\delta_v$ , verifica-se a partir dos resultados na Tab. 4.9, no qual o parâmetro  $E = 0,1$  está fixo, que com 5 modos do PGD o valor médio atinge a solução exata do problema homogéneo, enquanto que, fixando o parâmetro,  $\nu$ , que consta na na Tab. 4.11, verifica-se que para a situação específica,  $E_1 = E_2 = E = 0,1$ , o valor médio com 5 modos não atinge precisamente o valor exato, ficando o mais perto possível do valor exato para  $\mathcal{N} = 20$  modos, com um erro já desprezável. Dos gráficos apresentados na Fig. 4.24, também se verifica novamente que o maior valor do deslocamento acontece para a situação de ambos os materiais serem flexíveis e o menor valor quando ambos são rígidos. Quando os valores dos módulos de elasticidade são extremos opostos têm-se valores intermédios comparativamente as situações referidas anteriormente. É mais uma vez, a partir dos cortes apresentados nos gráficos da Fig. 4.25, é possível verificar que os maiores valores do majorante do erro ocorrem quando os módulos de elasticidade têm valores extremos opostos. Comparando os majorantes do erro apresentados na Fig. 4.26, obtidos para as  $Qdl$ ,  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , é possível observar que a ordem de grandeza dos valores são muito semelhantes no domínio dos parâmetros.

De forma geral, constata-se que variar os valores do coeficiente de *Poisson*,  $\nu$ , e fixando o parâmetro,  $E$ , não tem influência significativa na convergência dos valores de  $\delta_h$  ou  $\delta_v$ , comparativamente à variação dos valores dos módulos de elasticidade,  $E$ , e fixando o parâmetro,  $\nu$ , na medida em que são necessários poucos modos, para o primeiro caso, e mais modos, para o segundo caso, para que o valor médio seja igual ou próximo ao do valor exato do problema homogéneo. Isto tem a ver com a maior ou menor facilidade que o PGD tem para construir as soluções globais, ao variar um ou outro parâmetro. Variando os dois parâmetros ao mesmo tempo,  $E$  e  $\nu$ , apresentados na Tab. 4.12 ( $\delta_h$ ) e Tab. 4.13 ( $\delta_v$ ), implicam mais modos do PGD na construção da representação separada, porém, os resultados não diferem muito dos apresentados somente com o módulo de elasticidade,  $E$ , a variar. Assim, variando os dois parâmetros, apesar da solução não convergir logo, conseguem-se obter os valores de  $\delta_h$  ou  $\delta_v$ , para as várias combinações desejadas, que representa uma vantagem e com majorantes do erro que garantem adequada fiabilidade ao valor médio.

$\Omega_E = [0,1; 2,1]$ $\Omega_\nu = [0; 0,3]$ — Malha: $n_e = 16$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$
modos	$f_1 = 1 ; \nu_1 = \nu_2 = 0,3$			
0	$0,27939 \pm 0,19680$	$5,84784 \pm 4,15216$	$3,06361 \pm 2,17448$	$3,06361 \pm 2,17448$
1	$0,32469 \pm 0,20463$	$9,92002 \pm 1,35222$	$2,26235 \pm 1,37933$	$2,65013 \pm 1,64544$
5	$0,46202 \pm 0,01547$	$9,74499 \pm 0,27769$	$3,19298 \pm 0,41245$	$3,34844 \pm 0,39523$
10	$0,47393 \pm 0,00265$	$9,94710 \pm 0,05360$	$3,28163 \pm 0,31721$	$3,39445 \pm 0,34357$
20	$0,47598 \pm 0,00022$	$9,99511 \pm 0,00494$	$3,28447 \pm 0,31292$	$3,39865 \pm 0,33706$

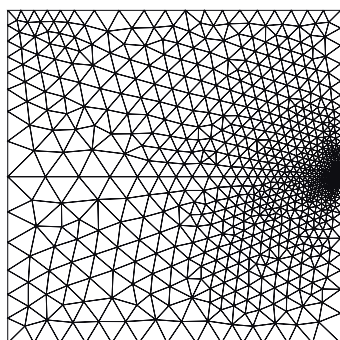
**Tabela 4.12.** Valores médios do deslocamento,  $\delta_h$ , e majorantes do erro, em função ao número de modos, variando  $\Omega_E$  e  $\Omega_\nu$ .

$\Omega_E = [0,1;2,1] \quad \Omega_\nu = [0;0,3] \text{ — Malha: } n_e = 16$				
Parâmetros	$E_1 = E_2 = 2,1$	$E_1 = E_2 = 0,1$	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$	$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$
modos	$f_2 = 1 ; \nu_1 = \nu_2 = 0,3$			
0	$-0,20480 \pm 0,19680$	$-1,63921 \pm 4,15216$	$-0,92201 \pm 2,17448$	$-0,92201 \pm 2,17448$
1	$-0,18226 \pm 0,14292$	$-2,48558 \pm 1,71712$	$-0,63900 \pm 1,66273$	$-1,04943 \pm 0,60981$
5	$-0,14367 \pm 0,00240$	$-2,98334 \pm 0,02481$	$-0,96279 \pm 0,11977$	$-1,00722 \pm 0,13010$
10	$-0,14286 \pm 0,00145$	$-2,99512 \pm 0,01460$	$-0,98473 \pm 0,09612$	$-1,01992 \pm 0,10454$
20	$-0,14291 \pm 0,00016$	$-2,99845 \pm 0,00255$	$-0,98737 \pm 0,09349$	$-1,02092 \pm 0,10078$

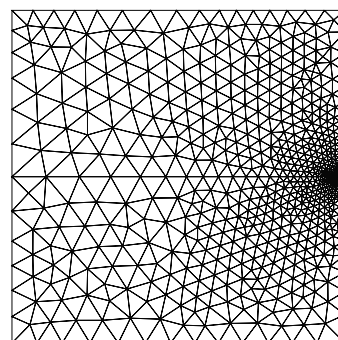
**Tabela 4.13.** Valores médios do deslocamento,  $\delta_v$ , e majorantes do erro, em função ao número de modos, variando  $\Omega_E$  e  $\Omega_\nu$ .

### Refinamento Adaptativo, usando como *Qdl* $\delta_v$

Usando como quantidade de interesse o valor do deslocamento vertical na extremidade superior da placa,  $\delta_v$ , procede-se ao refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local das soluções, obtendo-se as malhas apresentadas na Fig. 4.27. Na Fig. 4.28, apresentam-se o integral dos majorantes do erro em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, sendo possível observar que as malhas do refinamento uniforme apresentam os maiores erros nas duas situações, pelo que a sua utilização conduz a maiores erros das soluções. É possível ainda verificar que usando tanto o refinamento global ou local conduz a majorantes do erro global semelhantes, enquanto que, usando o refinamento local conduz a majorantes do erro menores para a *Qdl* em análise.

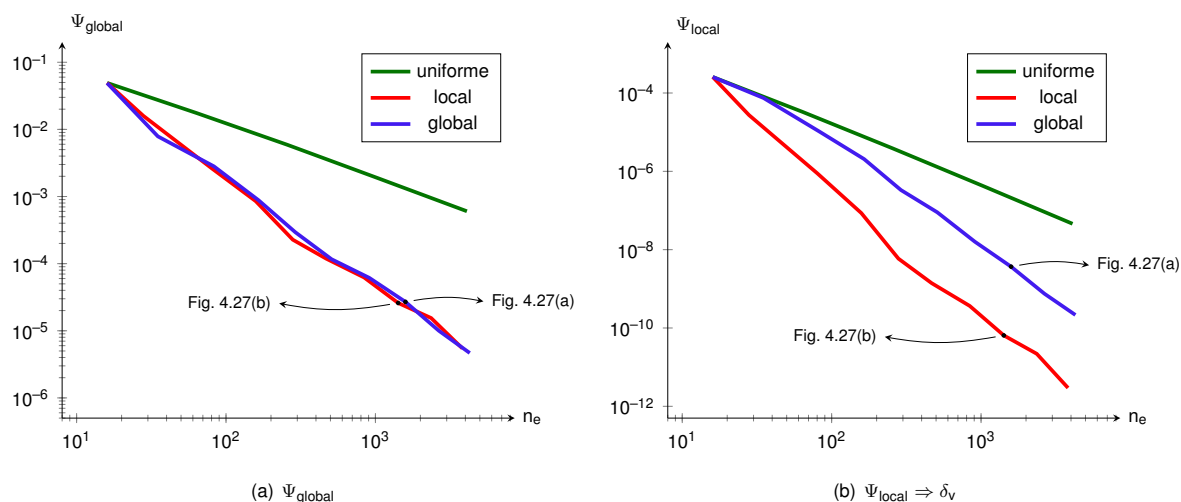


(a) global:  $n_e = 1589$



(b) local:  $n_e = 1420$

**Figura 4.27.** Malhas de elementos finitos geradas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando o deslocamento vertical,  $\delta_v$ , como a *Qdl*



**Figura 4.28.** Integral dos majorantes do erro em função do número de elementos das malhas geradas a partir do refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseado no indicador do erro global e local, usando o deslocamento vertical,  $\delta_v$ , como a  $Qdl$ .

Na Tab. 4.14, para as malhas obtidas a partir do refinamento uniforme e do refinamento adaptativo global e local, apresentam-se os resultados do deslocamento médio,  $\delta_v$ , e os majorantes do erro, em função do número de modos, para situações dos módulos de elasticidade iguais e na Tab. 4.15, quando são extremos opostos. Usando os três diferentes tipos de malhas, no gráfico da Fig. 4.29, apresentam-se os majorantes do erro para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais.

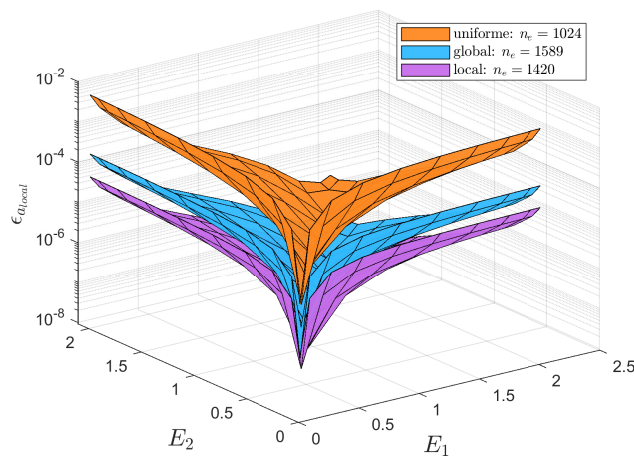
A partir dos resultados apresentados na Tab. 4.14, para os três diferentes tipos de malhas, observa-se que com  $\mathcal{N} = 20$  modos, o valor médio praticamente já atingiu o valor exato do problema homogêneo. E a partir da Tab. 4.15, é possível verificar que os valores de  $\delta_v$  são praticamente semelhantes considerando a parte inferior rígida e a superior flexível, e vice-versa. A partir do gráfico da Fig. 4.29, observa-se que os majorantes do erro são maiores para a malha uniforme comparativamente as malhas do refinamento global e local. Entre as malhas do refinamento global e local, verifica-se que as diferenças não são muito expressivas, podendo estar relacionado ao facto de ambas as malhas apresentarem uma configuração semelhante, apesar de ambas terem sido geradas com base em indicadores de erros diferentes, um global e outro local, e de o integral do majorante do erro local  $\Psi_{local}$  para as duas malhas ser significativamente diferente,  $\Psi_{local}^{Fig.4.27(b)} \approx 10^{-11}$ ;  $\Psi_{local}^{Fig.4.27(a)} \approx 10^{-9}$ .

$\Omega_E = [0,1;2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3$						
Parâmetro	$E_1 = 2,1; E_2 = 2,1$			$E_1 = 0,1; E_2 = 0,1$		
modos	uniforme: $n_e = 1024$	global: $n_e = 1589$	local: $n_e = 1420$	uniforme: $n_e = 1024$	global: $n_e = 1589$	local: $n_e = 1420$
0	-0,08383 ± 0,19677	-0,08383 ± 0,19677	-0,08383 ± 0,19677	-1,76033 ± 4,13223	-1,76033 ± 4,13223	-1,76033 ± 4,13223
1	-0,11803 ± 0,12563	-0,11807 ± 0,12567	-0,11804 ± 0,12561	-2,54383 ± 2,53908	-2,55263 ± 2,52442	-2,54827 ± 2,53462
5	-0,14316 ± 0,00053	-0,14310 ± 0,00091	-0,14304 ± 0,00031	-3,03394 ± 0,03574	-3,03354 ± 0,04051	-3,03463 ± 0,03923
10	-0,14295 ± 0,00012	-0,14288 ± 0,00019	-0,14293 ± 0,00016	-2,99996 ± 0,00028	-3,00093 ± 0,00189	-3,00009 ± 0,00111
20	-0,14286 ± 0,00001	-0,14285 ± 0,00000	-0,14286 ± 0,00000	-3,00001 ± 0,00001	-3,00001 ± 0,00004	-2,99998 ± 0,00004
40	-0,14286 ± 0,00000	-0,14286 ± 0,00000	-0,14286 ± 0,00000	-3,00001 ± 0,00001	-3,00000 ± 0,00000	-3,00000 ± 0,00000

**Tabela 4.14.** Valor médio do deslocamento,  $\delta_v$ , e majorante do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais de valores iguais e usando três diferentes tipos de malhas

$\Omega_E = [0,1;2,1] \quad \Omega_\nu = 0,3$						
Parâmetro	$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$			$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$		
modos	uniforme: $n_e = 1024$	global: $n_e = 1589$	local: $n_e = 1420$	uniforme: $n_e = 1024$	global: $n_e = 1589$	local: $n_e = 1420$
0	$-0,92208 \pm 2,16450$	$-0,92208 \pm 2,16450$	$-0,92208 \pm 2,16450$	$-0,92208 \pm 2,16450$	$-0,92208 \pm 2,16450$	$-0,92208 \pm 2,16450$
1	$-0,64833 \pm 1,50902$	$-0,64520 \pm 1,50286$	$-0,64527 \pm 1,50229$	$-0,98935 \pm 0,37599$	$-0,98915 \pm 0,38143$	$-0,98990 \pm 0,37793$
5	$-0,93560 \pm 0,01851$	$-0,93873 \pm 0,00232$	$-0,93404 \pm 0,01166$	$-0,96166 \pm 0,00921$	$-0,95172 \pm 0,02431$	$-0,95944 \pm 0,00503$
10	$-0,94018 \pm 0,00469$	$-0,93769 \pm 0,00022$	$-0,93765 \pm 0,00019$	$-0,96101 \pm 0,00443$	$-0,95881 \pm 0,00027$	$-0,95873 \pm 0,00025$
20	$-0,94014 \pm 0,00449$	$-0,93763 \pm 0,00007$	$-0,93763 \pm 0,00006$	$-0,96119 \pm 0,00398$	$-0,95883 \pm 0,00006$	$-0,95883 \pm 0,00005$
40	$-0,94014 \pm 0,00449$	$-0,93763 \pm 0,00005$	$-0,93763 \pm 0,00005$	$-0,96119 \pm 0,00397$	$-0,95884 \pm 0,00005$	$-0,95883 \pm 0,00004$

**Tabela 4.15.** Valor médio do deslocamento,  $\delta_v$ , e majorante do erro, em função do número de modos, para os casos com os módulos de elasticidade dos materiais de valores extremos opostos e usando três diferentes tipos de malhas



**Figura 4.29.** Majorantes do erro para o valor do deslocamento médio,  $\delta_v$ , para as várias combinações de valores no espaço dos parâmetros e usando três diferentes tipos de malhas.

Em forma de resumo, na Tab. 4.16, envolvendo as três *Qdl* anteriormente analisadas, apresenta-se o integral dos erros para os três tipos de malhas: uma obtida a partir de um refinamento uniforme e as outras duas obtidas a partir do refinamento adaptativo, baseado no indicador do erro global e local, usando como *Qdl* o momento,  $\mathcal{M}_1$ , apresentadas na Fig. 4.19(a) e Fig. 4.19(b). Verifica-se que  $\Psi_{\text{global}}$  é menor usando a malha obtida a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global. A malha do refinamento uniforme apresenta os maiores valores dos integrais  $\Psi_{\text{global}}$  e  $\Psi_{\text{local}}$  comparativamente as restantes duas malhas, pelo que conduz em média aos maiores valores do erro. Verifica-se ainda que, usando a malha do refinamento local, obtêm-se os menores valores para o integral,  $\Psi_{\text{local}}$ , para a quantidade de interesse a partir do qual foi obtida,  $\mathcal{M}_1$ , mas não para as outras *Qdl*.

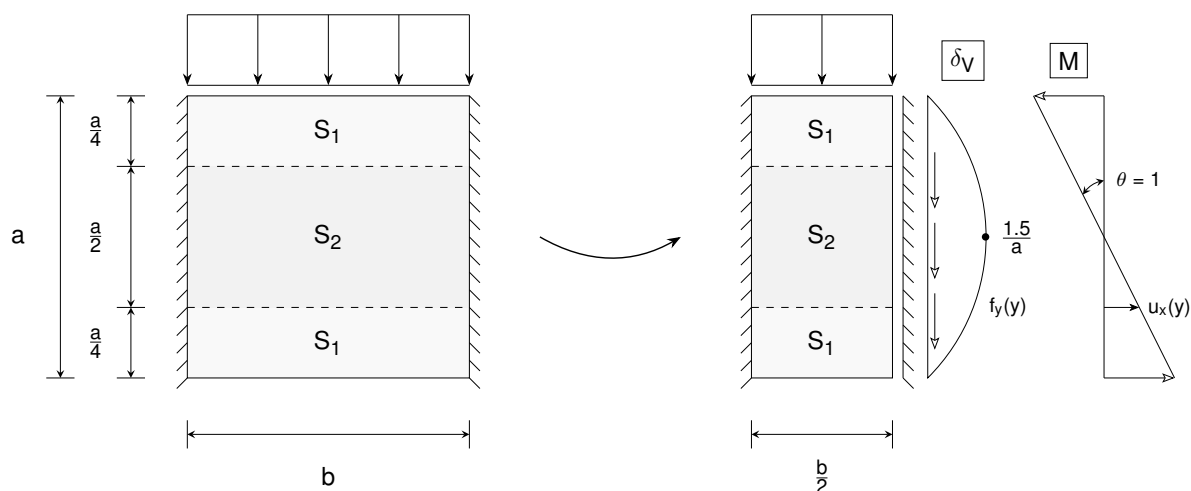
<i>Qdl</i>	uniforme: $n_e = 1024$		global: $n_e = 1379$		local: $n_e = 1070$	
	$\Psi_{\text{global}}$	$\Psi_{\text{local}}$	$\Psi_{\text{global}}$	$\Psi_{\text{local}}$	$\Psi_{\text{global}}$	$\Psi_{\text{local}}$
$\mathcal{M}_1$	$1,90 \times 10^{-3}$	$1,72 \times 10^{-7}$	$3,02 \times 10^{-5}$	$2,18 \times 10^{-9}$	$6,53 \times 10^{-5}$	$3,60 \times 10^{-10}$
$\delta_h$	$1,90 \times 10^{-3}$	$3,96 \times 10^{-6}$	$3,02 \times 10^{-5}$	$9,78 \times 10^{-10}$	$6,53 \times 10^{-5}$	$4,89 \times 10^{-9}$
$\delta_v$	$1,90 \times 10^{-3}$	$4,27 \times 10^{-7}$	$3,02 \times 10^{-5}$	$8,79 \times 10^{-11}$	$6,53 \times 10^{-5}$	$4,41 \times 10^{-10}$

**Tabela 4.16.** Integral dos majorantes do erro para  $\mathcal{M}_1$ ,  $\delta_h$  e  $\delta_v$  usando uma malha obtida de um refinamento uniforme e as malhas obtidas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando como *Qdl*  $\mathcal{M}_1$ .

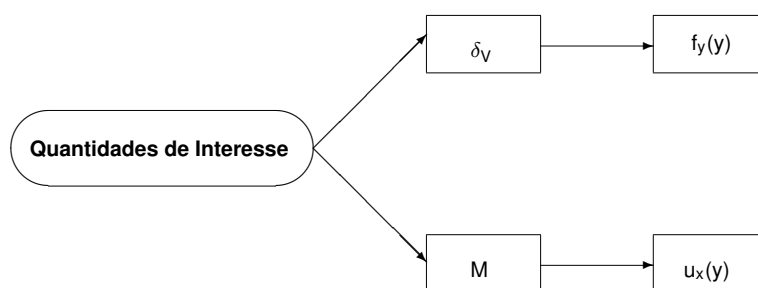
### 4.3 Placa bi-encastrada composta por dois materiais

Apresenta-se na Fig. 4.30 o problema a modelar e analisar, onde se define em função dos parâmetros,  $a$  e  $b$ , a geometria e a simplificação de simetria da placa sujeita a uma pressão no topo. Esta é composta por secções distintas designadas por  $S_1$  e  $S_2$ , cada possuindo um módulo de elasticidade,  $E$ , e coeficiente de *Poisson*,  $\nu$ .

As quantidades de interesse (*Qdl*) que se pretendem analisar para este problema, correspondem ao deslocamento e o valor do momento à meia largura da placa. Neste sentido, para a determinação do deslocamento, define-se uma distribuição de tensão virtual cuja resultante corresponde a uma carga virtual unitária. Esta distribuição tem a forma parabólica, o que garante que o campo de tensões resultante da solução virtual possa ser equilibrado. Para a determinação do momento, define-se como problema virtual uma rotação unitária, a qual implica uma variação linear do deslocamento horizontal. No esquema da Fig. 4.31, ilustram-se os problemas virtuais associados a cada *Qdl*.



**Figura 4.30.** Geometria do problema, simplificação de simetria, problema real e virtual.



**Figura 4.31.** Esquema representativo das Quantidades de Interesse e os correspondentes Problemas Virtuais.



### 4.3.1 Geometria da placa: $a=b=1$

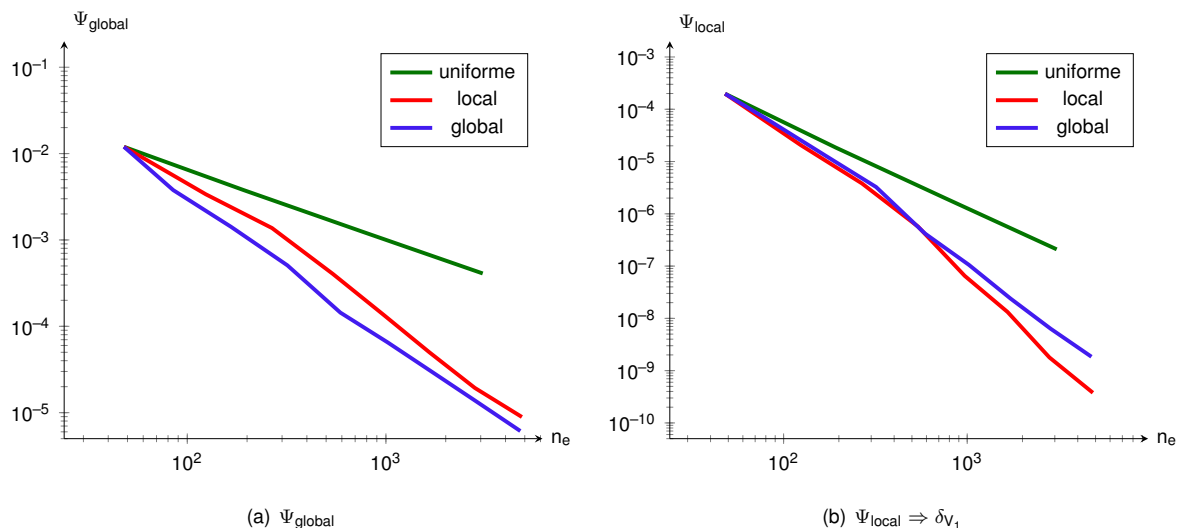
Quantidade de interesse:  $\delta_{V_1}$

Começa-se por analisar o problema para a situação em que ambas as dimensões,  $a$  e  $b$ , são iguais e com o domínio para as propriedades dos materiais relativos a cada secção apresentados na Tab. 4.17. Fixa-se o valor do coeficiente de *Poisson*,  $\nu$ , para ambas as secções, com vista à simplificação da análise e uma vez que a influência deste não é considerável, ao nível das tensões e deslocamentos, quando comparado com o módulo de elasticidade,  $E$ . Neste sentido, foca-se maior atenção na variação dos módulos de elasticidade das secções e o impacto desta no comportamento da placa.

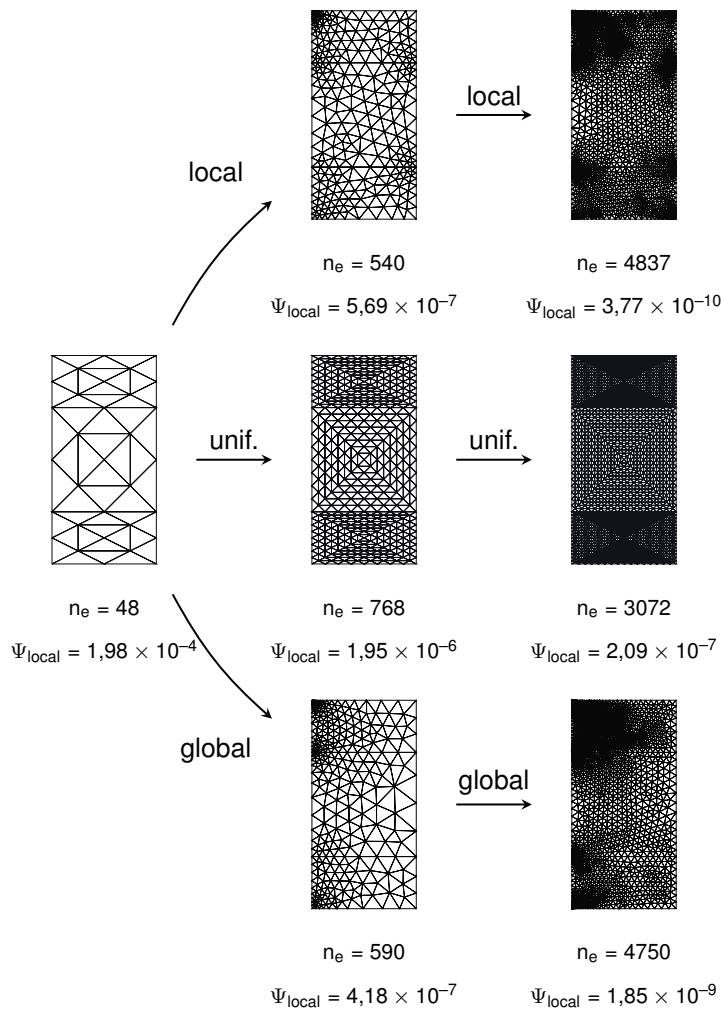
Apresentam-se nos gráficos da Fig. 4.32, o integral no espaço paramétrico do majorante do erro para as malhas apresentadas na Fig. 4.33, geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local das soluções, usando como  $QdI$   $\delta_{V_1}$ .

$\mu$	$\Omega$
a	1
b	1
$E_1$	[0,1 ; 2,1]
$E_2$	[0,1 ; 2,1]
$\nu_1$	0,15
$\nu_2$	0,15

**Tabela 4.17.** Domínio dos parâmetros ( $E, \nu$ ) de cada secção. Geometria da placa:  $a = b = 1$ .



**Figura 4.32.** Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando como  $QdI$   $\delta_{V_1}$ .



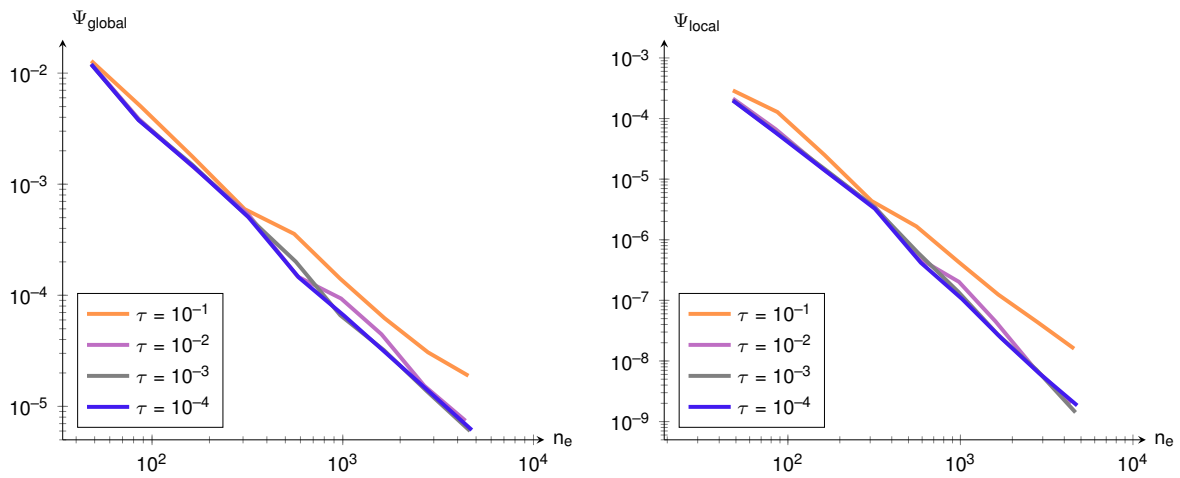
**Figura 4.33.** Esquema das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando como  $Qdl \delta_{V_1}$ .

A partir dos gráficos da Fig. 4.32, constata-se que as malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme apresentam os maiores valores para os majorantes do erro, uma vez que não têm informação relativa aos erros das soluções, ao contrário das malhas do refinamento global e local, que têm acesso a esta informação, razão pelo qual apresentam mais elementos em regiões localizadas da placa. Observa-se que o refinamento global conduz a menores valores para os majorantes do erro global das soluções, enquanto que o refinamento local conduz a menores valores para os majorantes do erro associados à  $Qdl$ . O refinamento global tem a informação relativa ao erro das soluções do problema real e é capaz de representar a transição das propriedades mecânicas e as singularidades geométricas. O refinamento local tem informação relativa aos erros das soluções do problema virtual, pelo que é capaz de representar efeito da ação virtual, para além, da transição das propriedades mecânicas e das singularidades geométricas.

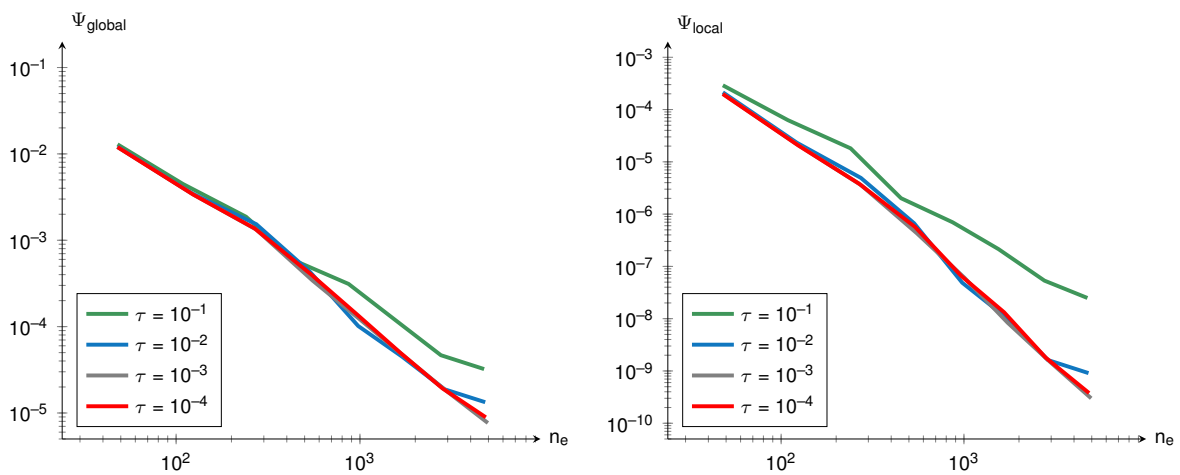
Pretende-se verificar o impacto no processo de refinamento adaptativo das malhas, relativamente à utilização de diferentes tolerâncias  $\tau$  do PGD na aproximação das soluções. Desta forma, utilizando diferentes tolerância  $\tau$  do PGD, nos gráficos da Fig. 4.34 e Fig. 4.35, apresentam-se os integrais do majorante do erro referentes às malhas geradas a partir de refinamento adaptativo baseado no indicador

do erro global e local das soluções, com  $\tau$  variando de  $10^{-1}$  até  $10^{-4}$ . Os gráficos para  $\tau = 10^{-4}$  são idênticos aos da Fig. 4.32.

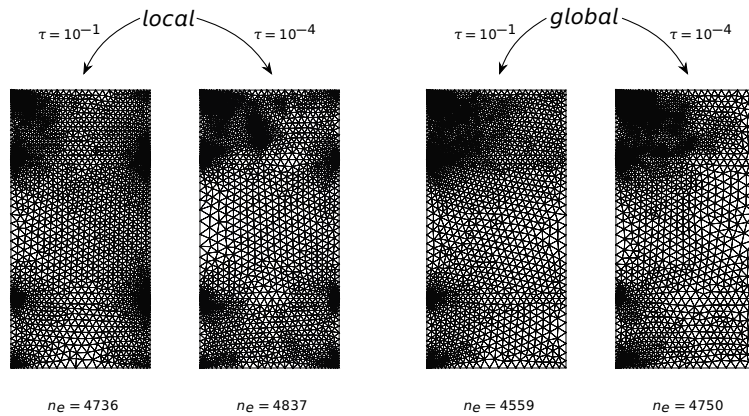
A partir dos gráficos da Fig. 4.34 e Fig. 4.35, observa-se que usar a menor tolerância, neste caso  $\tau = 10^{-1}$ , conduz em média a maiores valores do majorante do erro, a nível global e a nível local para a  $Qdl$ , enquanto que, para as restantes tolerâncias, os erros são muito semelhantes para a sequência de malhas geradas. No entanto, como se pode observar para  $\tau = 10^{-1}$ , a partir de um certo número de elementos, os erros começam a divergir dos erros das outras tolerâncias, pelo que, para as tolerâncias,  $\tau \geq 10^{-2}$ , usando malhas mais refinadas do que as apresentadas, sucede o mesmo. Apresentam-se na Fig. 4.36, as últimas malhas geradas do processo adaptativo baseado no indicador do erro local e global, usando para cada, como tolerância do PGD,  $\tau = 10^{-1}$  e  $\tau = 10^{-4}$ .



**Figura 4.34.** Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global. Tolerâncias  $\tau$  do PGD entre  $\tau = 10^{-1}$  e  $\tau = 10^{-4}$ .



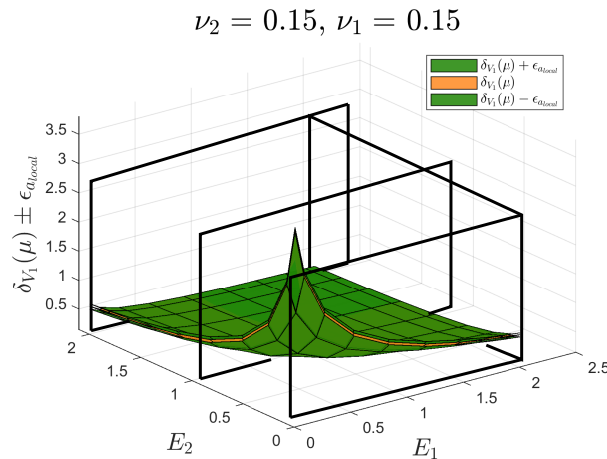
**Figura 4.35.** Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local. Tolerâncias  $\tau$  do PGD entre  $\tau = 10^{-1}$  e  $\tau = 10^{-4}$ .



**Figura 4.36.** Malhas de elementos finitos geradas a partir de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, para as tolerâncias  $\tau = 10^{-1}$  e  $\tau = 10^{-4}$ .

A partir da figura Fig. 4.36, observa-se que apesar da tolerância inferior, as malhas geradas para  $\tau = 10^{-1}$  também são capazes de representar as zonas de singularidades, assim como as malhas obtidas para  $\tau = 10^{-4}$ , porém, com uma menor precisão, que resulta em zonas menos refinadas. Isto pode ser notado de forma mais explícita, nos cantos superior e inferior direito, para a malha do refinamento local e no canto superior esquerdo para a malha do refinamento global.

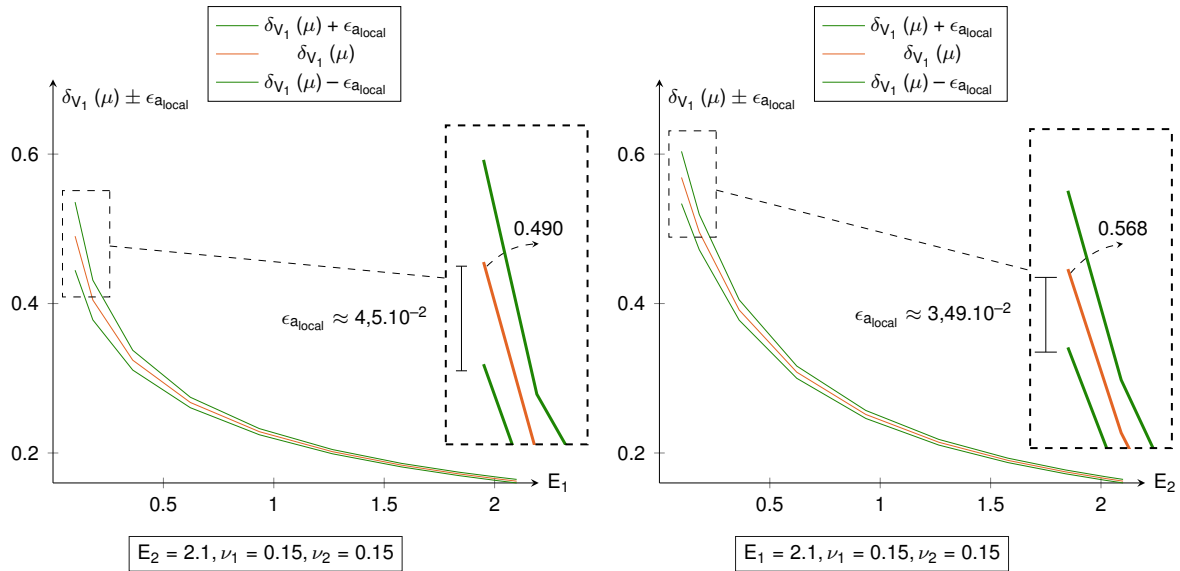
Na Fig. 4.37, para a malha inicial, com  $n_e = 48$ , apresentam-se os valores médios do deslocamento vertical a meia largura da placa,  $\delta_{V_1}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais que constituem a placa. Na Fig. 4.38, apresentam-se secções específicas do gráfico da Fig. 4.37 para os valores dos parâmetros:  $E_2 = 2,1$ ,  $E_1 = 2,1$ , e na Fig. 4.39 para os casos:  $E_2 = 0,1$  e  $E_2 = 1,0$ .



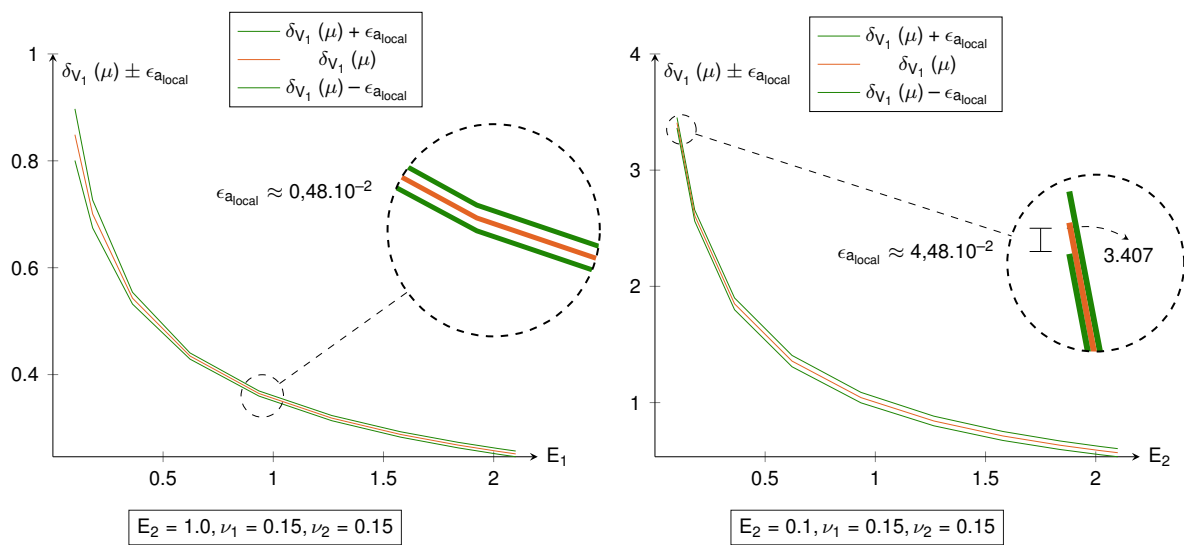
**Figura 4.37.** Valores dos deslocamentos médios,  $\delta_{V_1}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais.

No gráfico da Fig. 4.37, verifica-se claramente que quando ambas secções são flexíveis ocorre o maior valor de  $\delta_{V_1}$  e, quando ambas secções são rígidas, apresenta o menor valor. E para qualquer outra combinação de parâmetros, os valores de  $\delta_{V_1}$  estão compreendidos entre aqueles dois limites, i.e,  $\delta_{V_1}^{\min} = 0,162 \leq \delta_{V_1} \leq 3,407 = \delta_{V_1}^{\max}$ . A partir dos gráficos da Fig. 4.38 e Fig. 4.39, é possível

observar que os maiores valores dos majorantes do erro ocorrem quando os módulos de elasticidade apresentam valores extremos opostos, i.e,  $S_2$  rígida e  $S_1$  flexível, e vice-versa. E os menores valores para os majorantes do erro ocorrem quando os módulos de elasticidade de ambos os materiais são iguais.

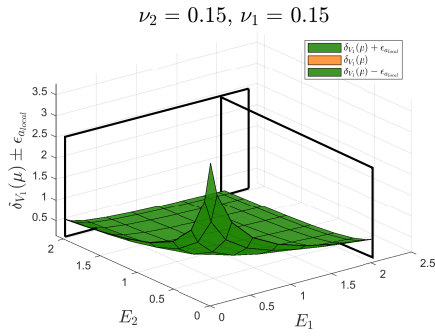


**Figura 4.38.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.37 para:  $E_2 = 2.1$  e  $E_1 = 2.1$ .

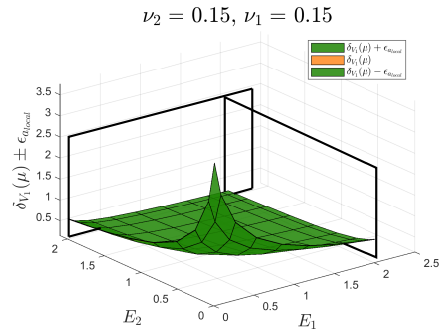


**Figura 4.39.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.37 para:  $E_2 = 1.0$  e  $E_2 = 0.1$ .

Comparam-se de seguida os valores de  $\delta_{V_1}$  e os seus limites, usando dois tipos diferentes de malhas, sendo uma obtida a partir de um refinamento uniforme e a outra obtida a partir de um refinamento adaptativo com o indicador do erro local. Desta forma, na Fig. 4.40 apresentam-se os valores médios,  $\delta_{V_1}$ , e respetivos limites para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais. E nos gráficos da Fig. 4.41 e Fig. 4.42, apresentam-se secções dos gráficos da Fig. 4.40 para os seguintes valores dos parâmetros:  $E_2 = 2,1$  e  $E_1 = 2,1$ .

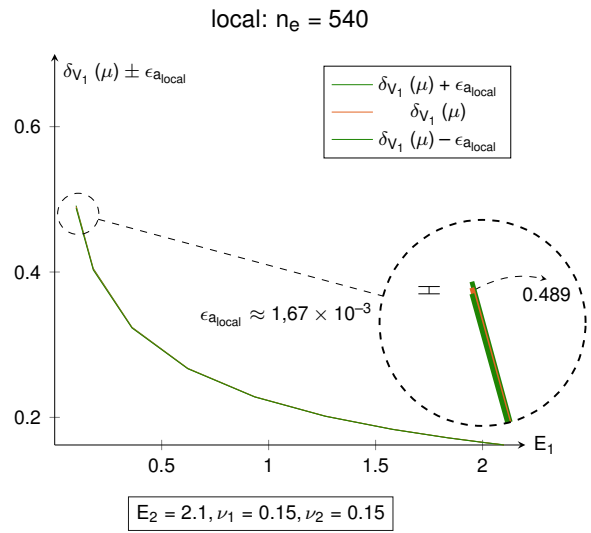
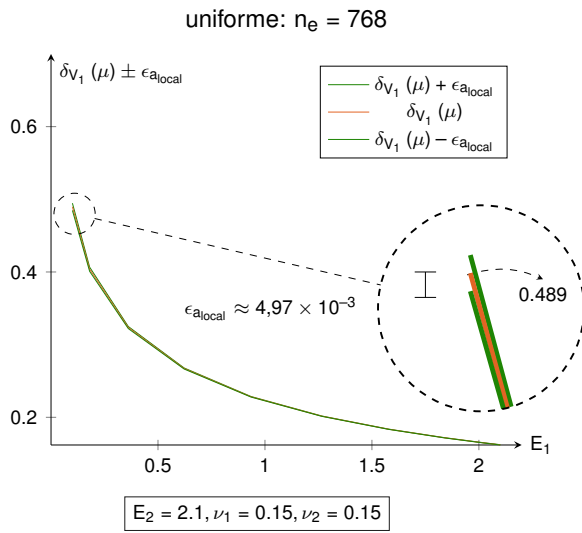


(a) uniforme:  $n_e = 768$

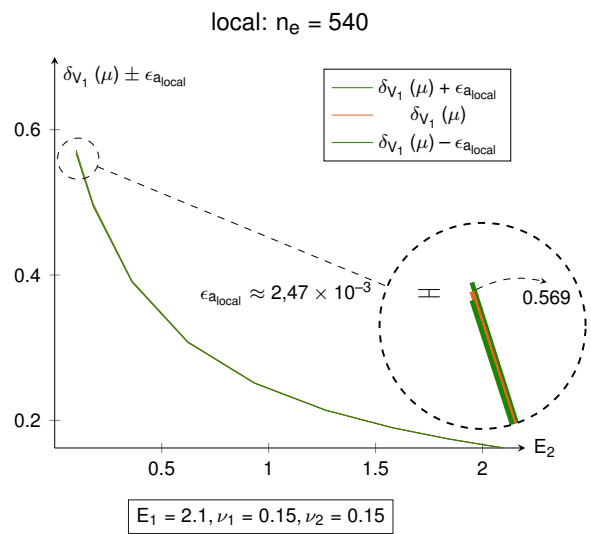
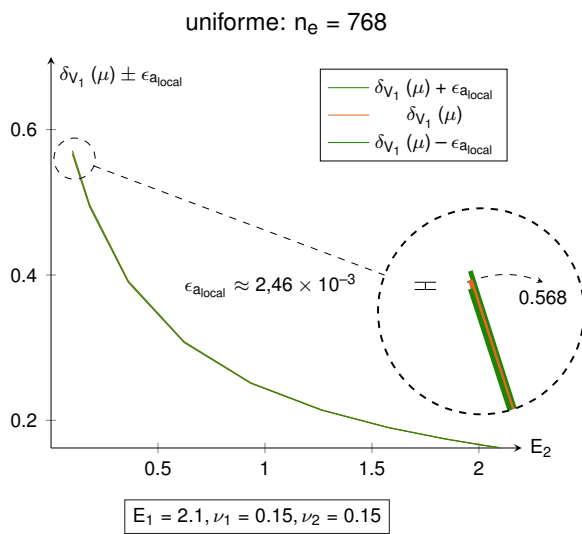


(b) local:  $n_e = 540$

**Figura 4.40.** Valores dos deslocamentos médios,  $\delta_{V_1}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais.



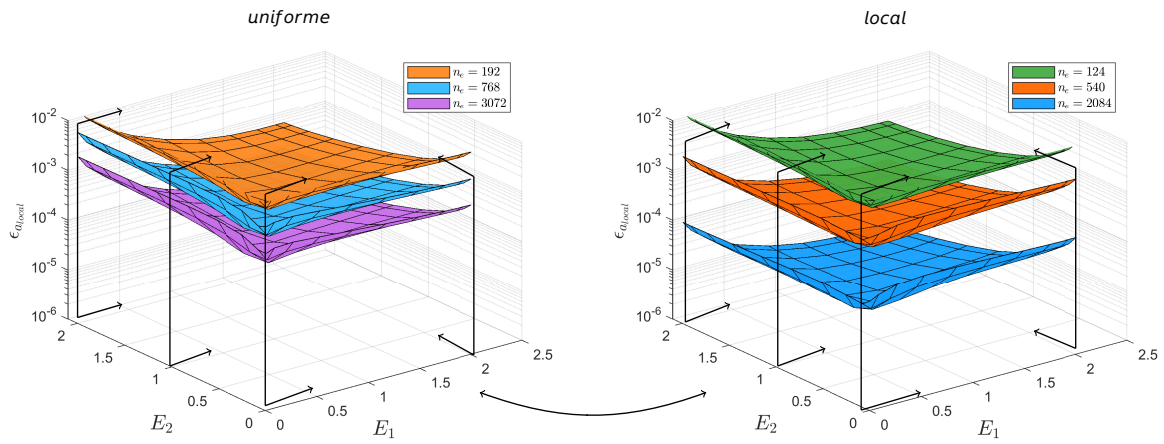
**Figura 4.41.** Secção específica dos gráficos da Fig. 4.40 para  $E_2 = 2.1$ .



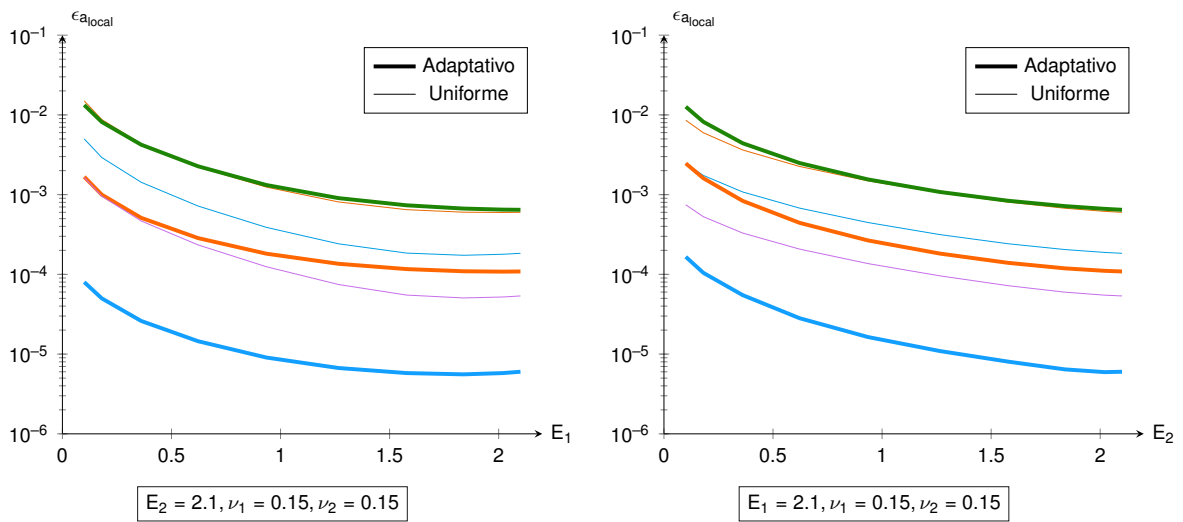
**Figura 4.42.** Secção específica dos gráficos da Fig. 4.40 para  $E_1 = 2.1$ .

Olhando para os gráficos da Fig. 4.40, percebe-se que a diferença entre o valor médio,  $\delta_{V_1}$ , e os limites superior e inferior é muito reduzida, razão pelo qual as superfícies dos gráficos se confundem. Por outro lado, comparando os gráficos da Fig. 4.40 e da Fig. 4.37 correspondente à malha uniforme com  $n_e = 48$ , nota-se uma redução para os majorantes do erro, uma vez que, regra geral, os majorantes tendem a diminuir com o refinamento da malha, dada a caracterização do modelo ser melhor. A partir da comparação dos gráficos da Fig. 4.41 e Fig. 4.42, e do gráficos da Fig. 4.38, estima-se uma redução num fator  $\sim 10^{-1}$ . Para o caso em que o material intermédio, i.e,  $S_2$ , é rígido e  $S_1$  flexível, apresentado no detalhe da Fig. 4.41, observa-se que a malha obtida a partir do refinamento adaptativo com base no erro local, apresenta um menor valor do majorante do erro comparativamente à malha uniforme, mesmo tendo um menor número de elementos. Para o caso contrário, no detalhe da Fig. 4.42, verifica-se que os majorantes do erro para ambas as malhas são praticamente semelhantes. No entanto, pelo facto da malha uniforme apresentar  $n_e = 768$ , e a malha obtida a partir do refinamento local apresentar  $n_e = 512$ , as comparações realizadas são meramente qualitativas.

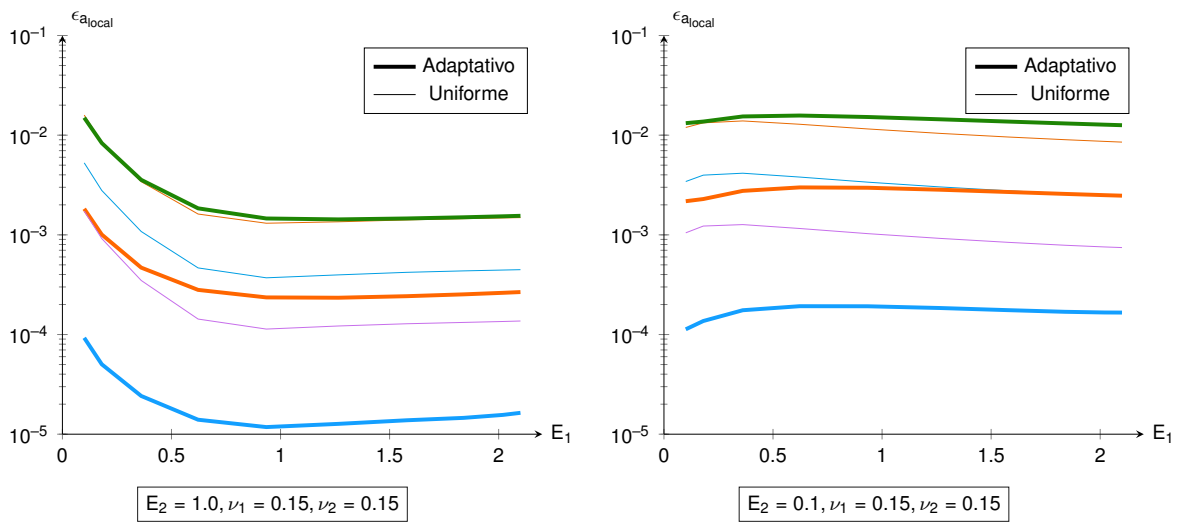
Usando malhas com diferentes número de elementos obtidas de um refinamento uniforme e de um refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local, apresentam-se na Fig. 4.43 os majorantes do erro associados ao valor médio,  $\delta_{V_1}$ , para as várias combinações de valores do módulo de elasticidade dos materiais. Apresentam-se na Fig. 4.44 e Fig. 4.45, cortes dos gráficos da Fig. 4.43 para os seguintes valores dos parâmetros:  $E_2 = 2,1$ ,  $E_1 = 2,1$ ,  $E_2 = 1,0$  e  $E_2 = 0,1$ . A partir da Fig. 4.43, observa-se claramente que os maiores valores dos majorantes do erro associados a  $\delta_{V_1}$ , ocorrem quando um dos materiais é o mais flexível, i.e,  $E_1 = 0,1$  ou  $E_2 = 0,1$  e o outro rígido, i.e,  $E \in ]0,1 ; 2,1]$ , como é possível observar no corte  $E_2 = 0,1$  da Fig. 4.45. E com a ajuda dos gráficos da Fig. 4.44 e da Fig. 4.45, verificam-se os menores valores dos majorantes do erro para os casos em que os materiais apresentam os módulos de elasticidade iguais. A partir dos gráficos apresentados na Fig. 4.44 e Fig. 4.45, nota-se que para as malhas obtidas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local, se obtêm valores para os majorantes do erro menores do que os obtidos usando malhas do refinamento uniforme com aproximadamente o mesmo número de elementos. Porém, a observação anterior não é totalmente afirmativa para a malha, com  $n_e = 124$ , obtida a partir do refinamento adaptativo baseado no erro local, uma vez que o processo de refinamento adaptativo ainda se encontra numa fase inicial.



**Figura 4.43.** Majorantes do erro associados ao valor médio,  $\delta_{V_1}$ , para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais e para diferentes tipos de malhas.



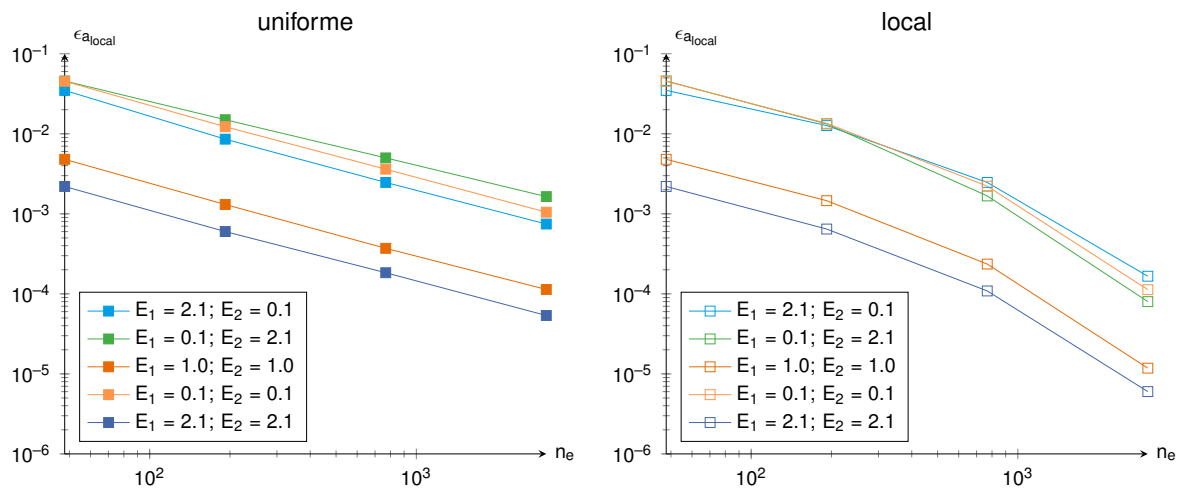
**Figura 4.44.** Secções específicas dos gráficos da Fig. 4.43 para:  $E_2 = 2,1$  e  $E_1 = 2,1$ .



**Figura 4.45.** Secções específicas dos gráficos da Fig. 4.43 para:  $E_2 = 1,0$  e  $E_2 = 0,1$ .

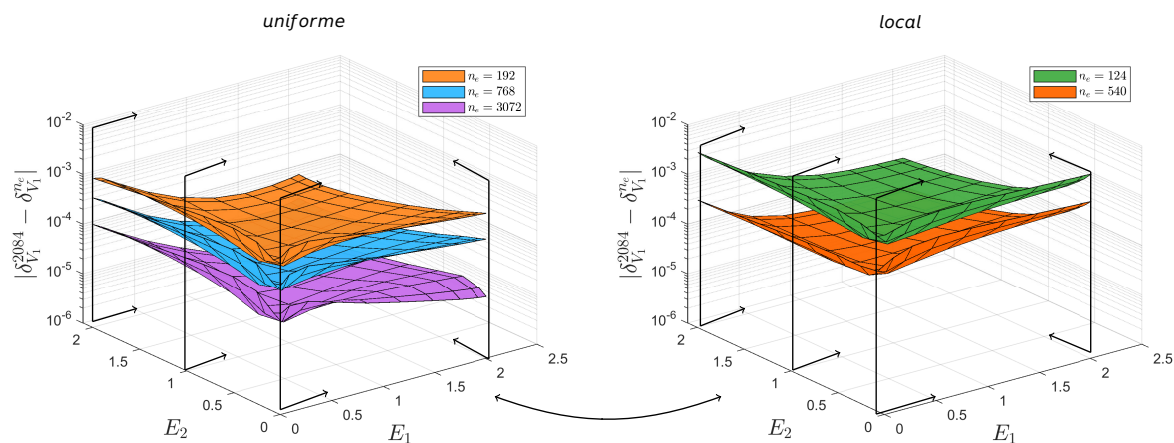


Na Fig. 4.46, para combinações específicas dos módulos de elasticidade das secções, apresentam-se os majorantes do erro, em função do número de elementos das malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme e de um refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local. Observa-se que os valores dos majorantes do erro são menores para as malhas obtidas a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local, especialmente para as malhas com um maior número de elementos. Nota-se, mais uma vez, que para as situações homogêneas, i.e,  $E_1 = E_2 = E$ , os erros são inferiores comparativamente aos casos em que os módulos de elasticidade são extremos opostos, com a exceção para o caso em que os dois materiais são flexíveis, uma vez que o valor médio,  $\delta_{V_1}$ , correspondente àquela combinação específica apresenta o maior valor, pelo que a incerteza, ou se se preferir o erro associado, é também superior. Usando as malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme, observa-se que o logaritmo dos majorantes do erro tende a reduzir a uma taxa constante com o logaritmo do número de elementos, enquanto que usando as malhas do refinamento local se observa uma taxa de redução variável, aumentando para as malhas mais refinadas, i.e, com mais elementos.

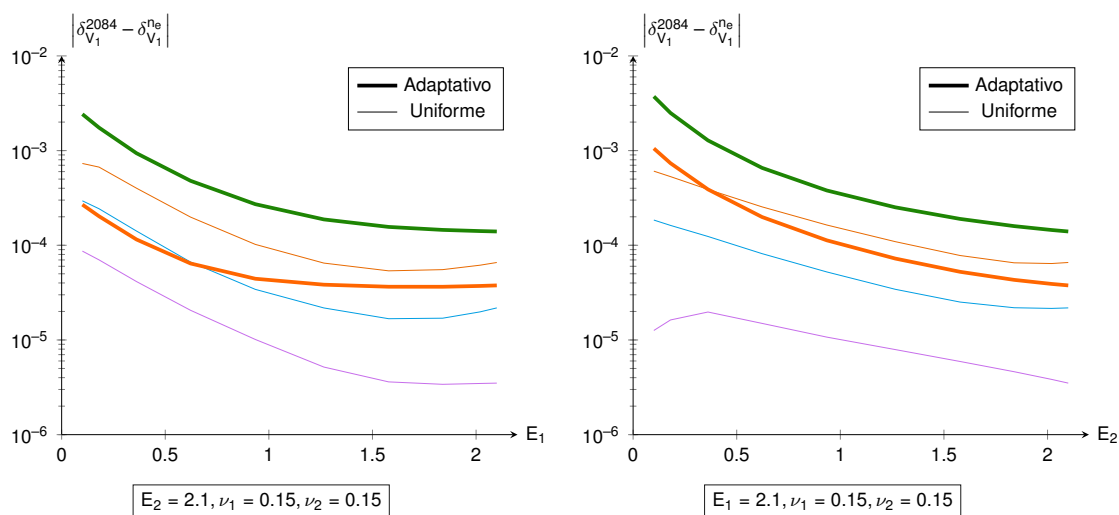


**Figura 4.46.** Majorantes do erro associados ao valor médio,  $\delta_{V_1}$ , em função do número de elementos das malhas e para combinações específicas dos módulos de elasticidade dos materiais.

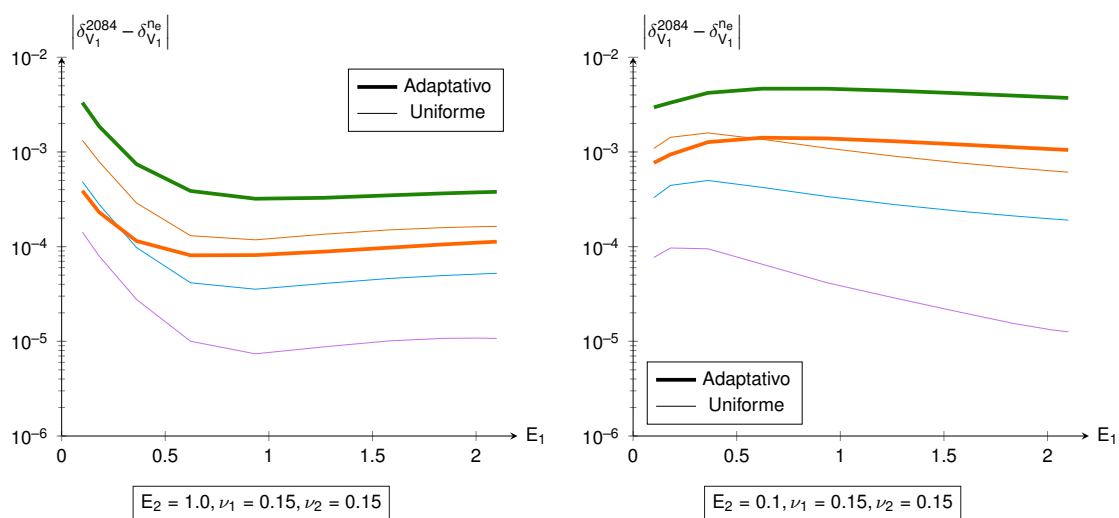
Apesar do valor médio,  $\delta_{V_1}$ , não evidenciar alteração significativa para as malhas apresentadas na Fig. 4.37 e Fig. 4.40, aquela diferença existe, porém com valores muito reduzidos, praticamente desprezáveis. Assim, na Fig. 4.47, apresenta-se o módulo da diferença entre o valor médio de diferentes malhas e o de uma malha de referência obtida a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador erro local, com  $n_e = 2084$ . E nos gráficos da Fig. 4.48 e Fig. 4.49, ilustram-se cortes do gráfico da Fig. 4.47 para os seguintes valores dos parâmetros:  $E_2 = 2,1$ ,  $E_1 = 2,1$ ,  $E_2 = 1,0$  e  $E_2 = 0,1$ .



**Figura 4.47.** Diferença do valor médio da  $QdI$ ,  $\delta_V$ , correspondente a diferentes malhas com  $\delta_{V_1}^{2084}$  relativa a uma malha de referência (local:  $n_e = 2084$ ) para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais.



**Figura 4.48.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.47 para:  $E_2 = 2.1$  e  $E_1 = 2.1$ .



**Figura 4.49.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.47 para:  $E_2 = 1.0$  e  $E_2 = 0.1$ .

À semelhança do comportamento evidenciado pelos majorantes do erro, apresentado anteriormente na Fig. 4.43, observa-se que as maiores diferenças se registam quando os valores dos módulos de elasticidade apresentam valores extremos, e as menores diferenças quando os módulos de elasticidade são iguais. Porém, no corte  $E_2 = 0,1$  da Fig. 4.49, verifica-se que as malhas obtidas a partir de um refinamento uniforme apresentam uma menor diferença para o caso em que os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos, i.e,  $E_2 = 0,1$ ;  $E_1 = 2,1$  em detrimento do caso  $E_1 = E_2 = 0,1$ . Verifica-se ainda que as diferenças são menores para a malha mais refinada, obtida a partir de um refinamento uniforme, com  $n_e = 3072$ , e as diferenças são maiores para a malha menos refinada obtida a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local, com  $n_e = 124$ . De forma qualitativa, pode-se aferir que a malha uniforme, com  $n_e = 768$ , apresenta um melhor valor médio do que a malha obtida a partir refinamento local, com  $n_e = 540$ , porém, apresenta um valor do majorante do erro superior a esta última malha, como pode ser verificado nos gráficos das Fig. 4.44 e Fig. 4.45 apresentados anteriormente.

#### Quantidade de Interesse: $M_1$

Na Tab. 4.18, apresentam-se os valores do momento,  $M_1$ , e os majorantes do erro para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico. Utiliza-se uma malha obtida a partir de um refinamento uniforme e a outra obtida a partir do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local, usando como  $Qdl \delta_{V_1}$ .

Parâmetro	uniforme: $n_e = 768$	local: $n_e = 540$
$E_1 = E_2 = 2,1$	$-0,05333 \pm 0,00005$	$-0,05334 \pm 0,00002$
$E_1 = E_2 = 0,1$	$-0,05333 \pm 0,00005$	$-0,05334 \pm 0,00002$
$E_1 = 2,1$ ; $E_2 = 0,1$	$-0,04979 \pm 0,00010$	$-0,04979 \pm 0,00009$
$E_1 = 0,1$ ; $E_2 = 2,1$	$-0,05604 \pm 0,00011$	$-0,05604 \pm 0,00004$

**Tabela 4.18.** Valor da  $Qdl$ ,  $M_1$ , e majorantes do erro, para as combinações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico.

A partir da Tab. 4.18, verifica-se que o valor do momento,  $M_1$ , assim como os majorantes do erro, são iguais para as situações que correspondem a uma placa homogénea, i.e,  $E_1 = E_2$ , enquanto que, para os casos em que os módulos de elasticidade apresentam valores extremos opostos, observa-se um valor superior para o momento no caso que tem o material intermédio,  $S_2$ , rígido.

#### Diagramas de Deslocamentos ( $u$ ) e Tensões ( $\sigma$ )

Na Fig. 4.50, apresenta-se o campo de deslocamentos compatível  $u$ , e a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$  da placa, para os casos em que os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos. Para as mesmas situações na Fig. 4.51 e Fig. 4.52, apresentam-se os diagramas de deslocamentos  $u_y$ , e das tensões  $\sigma_{xx}$  à meia largura da placa, e na Fig. 4.53 os diagramas de tensões  $\sigma_{xx}$ , na secção do apoio.

Para o caso em que o material intermédio ( $S_2$ ) é flexível, a partir da Fig. 4.50 e do diagrama da Fig. 4.61(b) é possível verificar uma redução quase linear da componente de deslocamento  $u_y$  do topo para o inferior da placa, enquanto que, para o caso contrário cujo diagrama consta na Fig. 4.61(a), se verifica que as maiores amplitudes da componente de deslocamento  $u_y$  se verificam na secção de topo, com as restantes secções a evidenciarem deslocamentos muito pequenos.

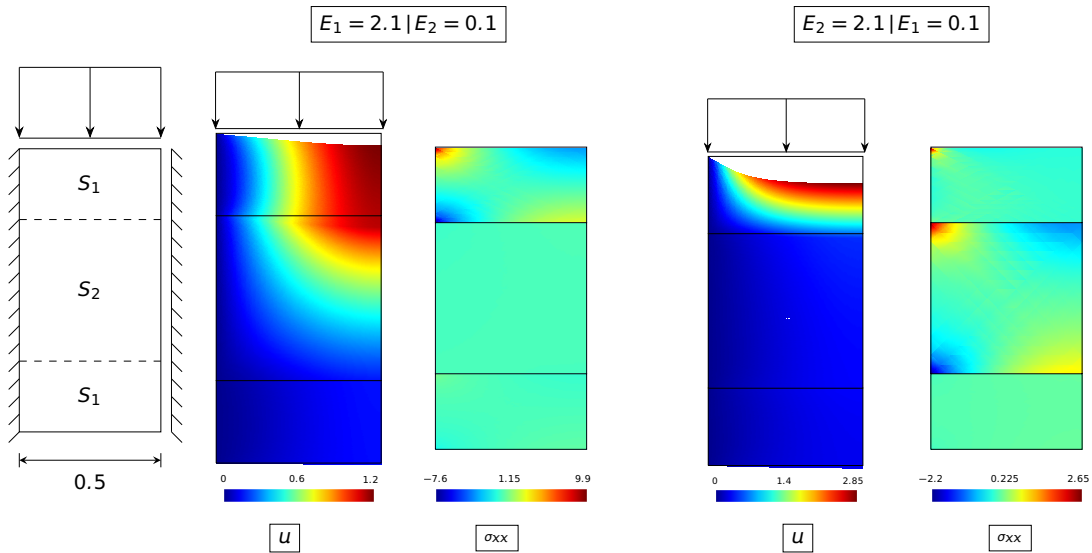
Através dos diagramas de deslocamentos  $u_y$  apresentados na Fig. 4.51, que provêm de uma solução compatível, é possível validar de forma aproximada os valores médios da  $Qdl$ ,  $\delta_{V_1}$ , apresentados anteriormente nos gráficos da Fig. 4.37 e Fig. 4.40. Assim, denotando  $\delta_{V_1}^k$  o valor aproximado da  $Qdl$  obtido através de uma solução compatível para o campo de deslocamentos, este valor pode ser calculado através da ponderação dos valores de  $u_y$  com a função  $f_y(y)$  ilustrada na Fig. 4.30, que representa a ação virtual. A aplicação disto resulta em:

$$\delta_{V_1}^k \simeq \int_0^1 u_y \times f_y(y) dy \simeq 0,567, \quad \text{Fig. 4.38} \Rightarrow \delta_{V_1} = 0,568 \quad (E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1) \quad (4.2)$$

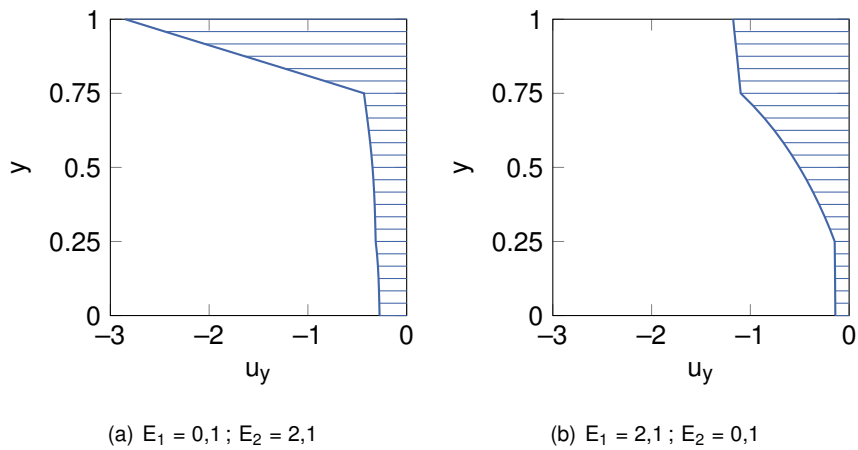
$$\delta_{V_1}^k \simeq \int_0^1 u_y \times f_y(y) dy \simeq 0,485, \quad \text{Fig. 4.38} \Rightarrow \delta_{V_1} = 0,490 \quad (E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1) \quad (4.3)$$

Saliente-se que, estes valores não são exatamente iguais aos obtidos nos gráficos das Fig. 4.37 ou da Fig. 4.40 apresentados anteriormente, uma vez que aqueles levam também em consideração os valores da componente  $u_y$  obtida a partir de uma solução equilibrada, constituindo o valor final uma média de ambos. No entanto, estes valores calculados de forma expedita constituem uma boa aproximação para a verificação dos valores obtidos pelo programa.

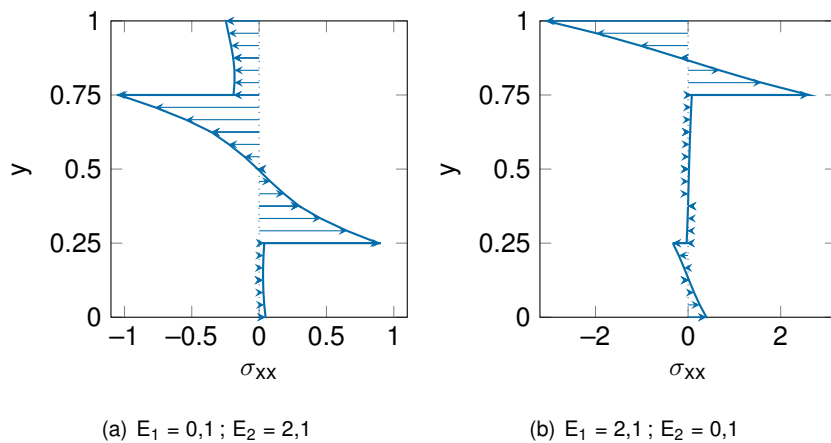
Relativamente às tensões  $\sigma_{xx}$ , a partir da Fig. 4.50 é possível observar, de forma geral, que os maiores valores de  $\sigma_{xx}$  se desenvolvem nos materiais mais rígidos. Comparando os diagramas da Fig. 4.52 e Fig. 4.53, relativos às tensões,  $\sigma_{xx}$ , nas secções a meio e no apoio da placa, respetivamente, notam-se maiores valores de tensões na secção do encastramento do que na secção a meia largura da placa, que pode ser explicado comparando o problema em questão ao modelo de uma viga bi-encastrada, em que o maior valor do momento se verifica na secção do encastramento. É possível ainda observar que as tensões que se desenvolvem no caso  $E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$ , são superiores em valor absoluto às tensões que se desenvolvem para a combinação de módulos de elasticidade oposta, uma vez que a altura da secção rígida de topo,  $S_1$ , é metade da secção,  $S_2$ , que implica uma inércia inferior e por isso, mobilizam um maior valor de tensão,  $\sigma_{xx}$ . De forma qualitativa, estima-se que as tensões máximas  $\sigma_{xx}$  para o casos em que  $E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1 \sim \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  das tensões máximas para a combinação oposta, i.e,  $E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$ .



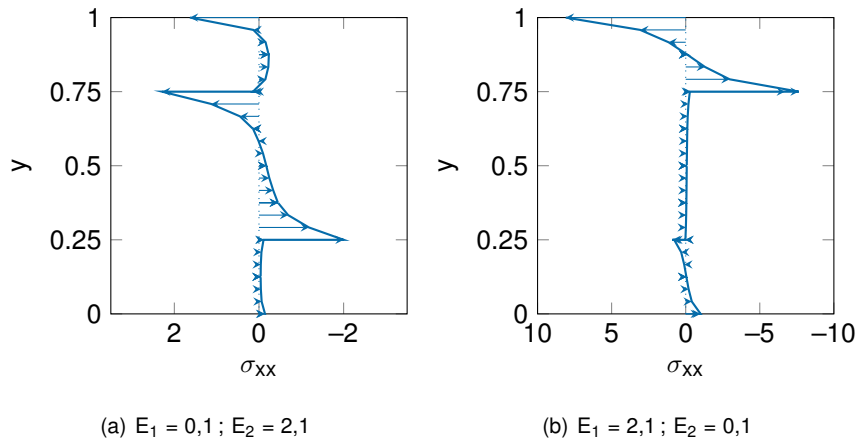
**Figura 4.50.** Campo de deslocamentos ( $u$ ), e componente de tensão  $\sigma_{xx}$ , referentes aos casos em que os módulos de elasticidades dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme:  $n_e = 768$ ).



**Figura 4.51.** Diagrama de deslocamentos  $u_y$  à meia largura da placa para valores extremos opostos dos módulos de elasticidade dos materiais (malha uniforme:  $n_e = 768$ ).



**Figura 4.52.** Diagrama de tensões  $\sigma_{xx}$  à meia largura da placa quando os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme:  $n_e = 768$ ).



**Figura 4.53.** Diagrama de tensões  $\sigma_{xx}$  no apoio quando os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme:  $n_e = 768$ ).

### 4.3.2 Geometria da placa: $a = 1$ , $b = 2$

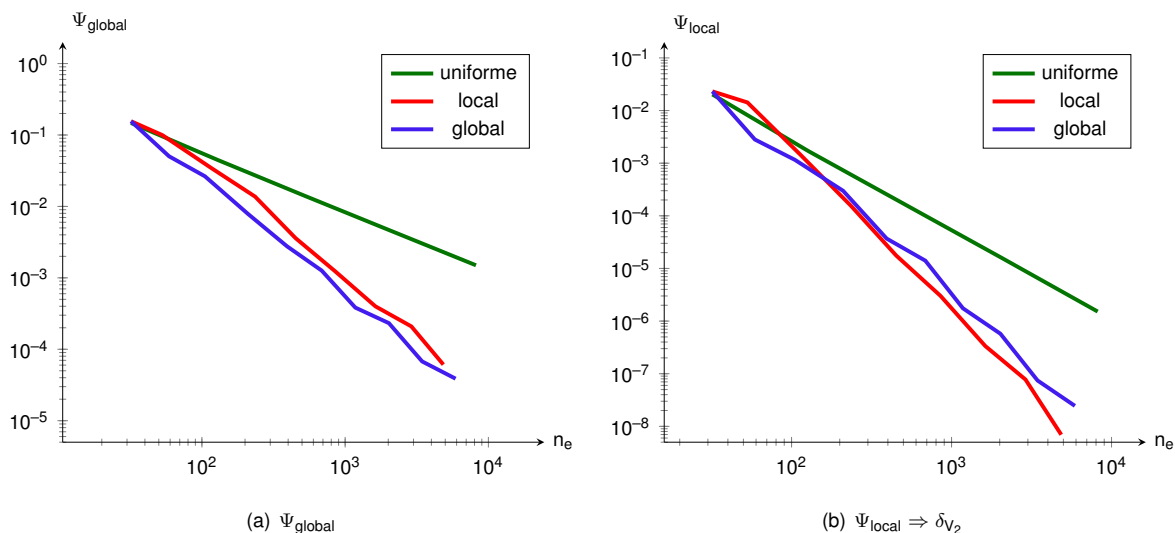
Analisa-se de seguida o problema para o caso em que as dimensões apresentam a relação  $\frac{a}{b} = 0,5$ , i.e, com a largura maior que a altura, e com o domínio das propriedades mecânicas dos materiais referentes a cada secção apresentados na Tab. 4.19.

$\mu$	$\Omega$
a	1
b	2
$E_1$	[0,1 ; 2,1]
$E_2$	[0,1 ; 2,1]
$\nu_1$	0,15
$\nu_2$	0,15

**Tabela 4.19.** Domínio dos parâmetros ( $E$  e  $\nu$ ) de cada secção. Geometria da placa:  $a = 1$  ;  $b = 2$ .

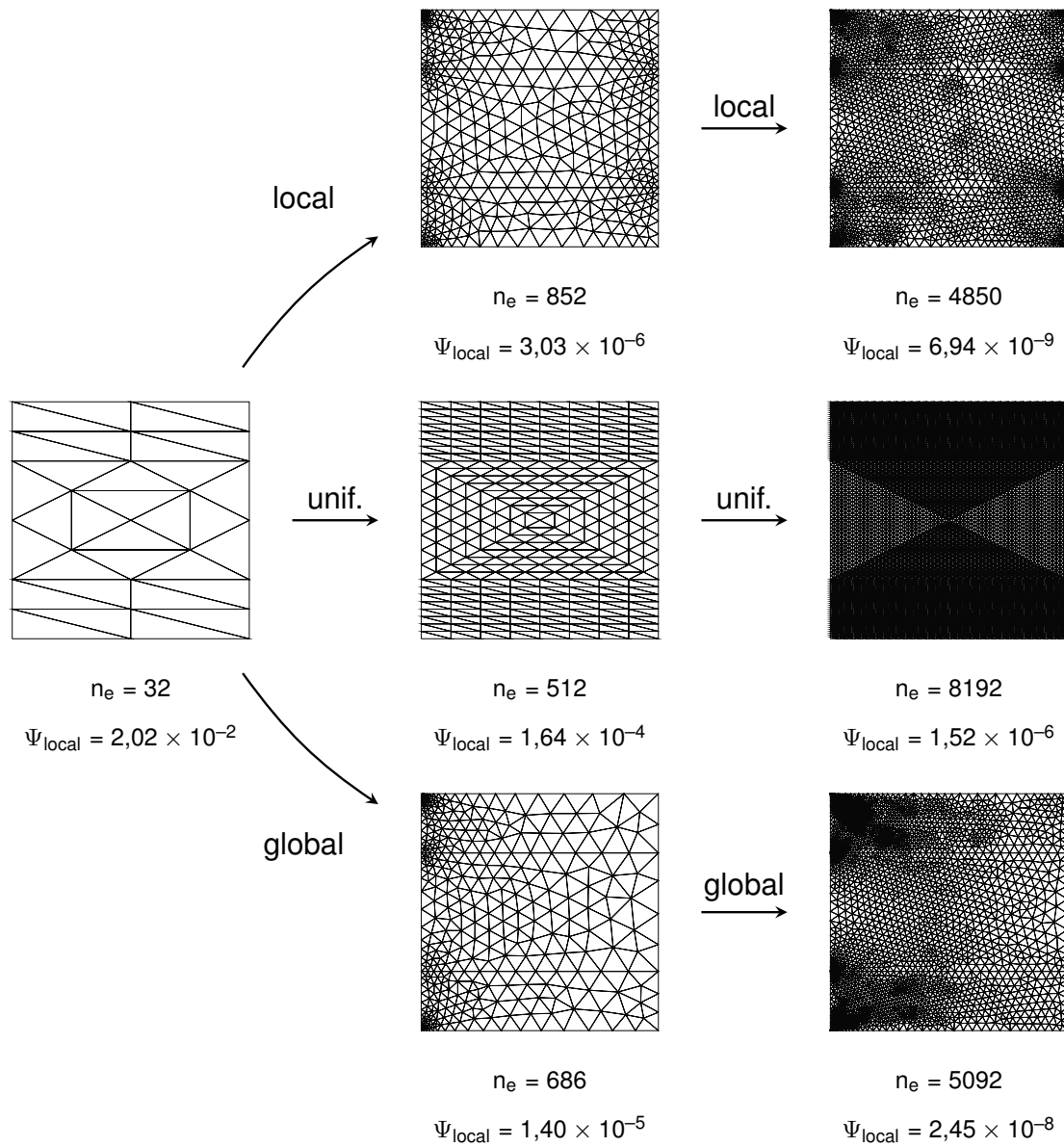
**Quantidade de interesse:**  $\delta_{V_2}$

Usando como  $Qdl$  o deslocamento a meia largura da placa,  $\delta_{V_2}$ , apresenta-se na Fig. 4.54 o integral no espaço paramétrico do majorante do erro para a sequência de malhas ilustradas na Fig. 4.55 obtidas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local.



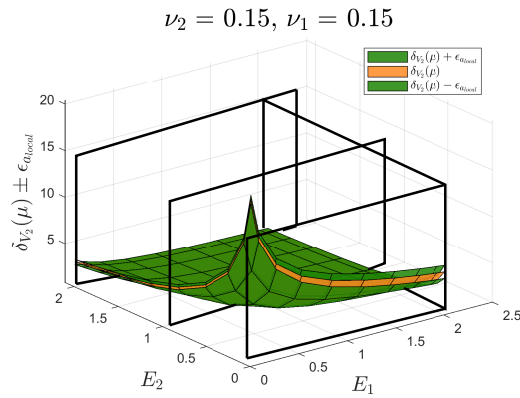
**Figura 4.54.** Integral no espaço paramétrico do majorante do erro, em função do número de elementos das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e de refinamentos adaptativos baseados no indicador do erro global e local, usando como  $Qdl$   $\delta_{V_2}$ .

A partir dos gráficos da Fig. 4.54, observa-se mais uma vez que as malhas do refinamento uniforme apresentam os maiores erros, enquanto que, as malhas do refinamento global conduzem a menores valores para o erro global das soluções e as malhas do refinamento local conduzem a menores valores para os erros da  $Qdl$  em análise. A partir da Fig. 4.55, é possível verificar que as malhas do refinamento adaptativo baseado no erro global concentram mais elementos na zona das singularidades, nomeadamente a transição das propriedades mecânicas e singularidades geométricas, e as malhas do refinamento adaptativo baseado no erro local, para além daquelas zonas, também conseguem capturar o efeito da ação virtual aplicada à meia largura da placa. Comparando os resultados do integral do majorante do erro da Fig. 4.54, com os resultados obtidos para a geometria  $a = b = 1$ , que constam na Fig. 4.32, é possível constatar que apresentam maiores valores para ambos os integrais  $\Psi$ , por um lado pelo facto da geometria ser maior, o que explica o maior valor para os majorantes do erro global, e por outro lado, pelo facto da largura  $b$  ser maior, o que induz valores superiores para a  $Qdl$  em análise  $\delta_{V_2}$ , e por conseguinte, valores maiores do majorante do erro local.

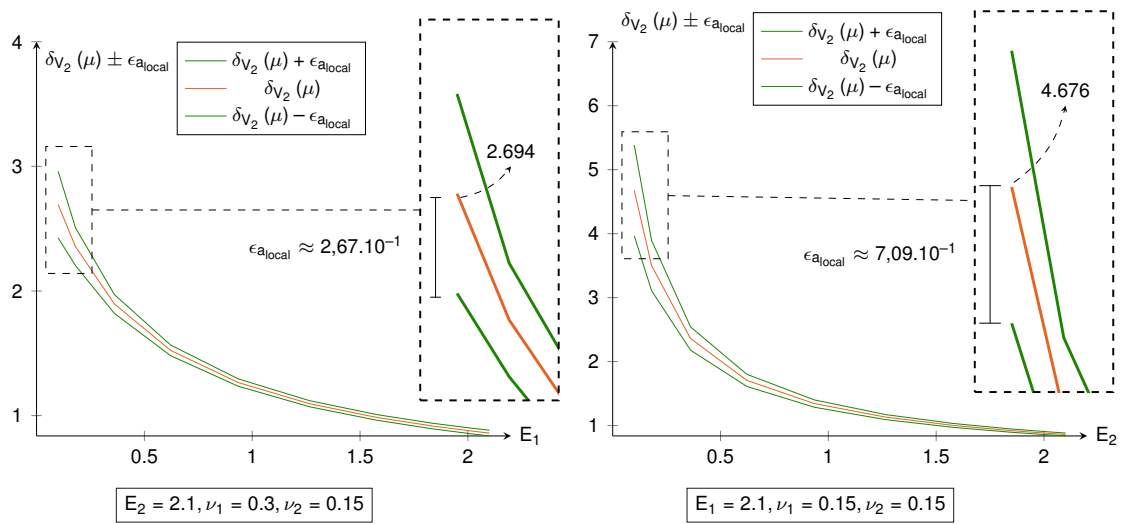


**Figura 4.55.** Esquema das malhas geradas a partir de um refinamento uniforme e do refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global e local, usando como  $QdI \delta_{V_2}$ .

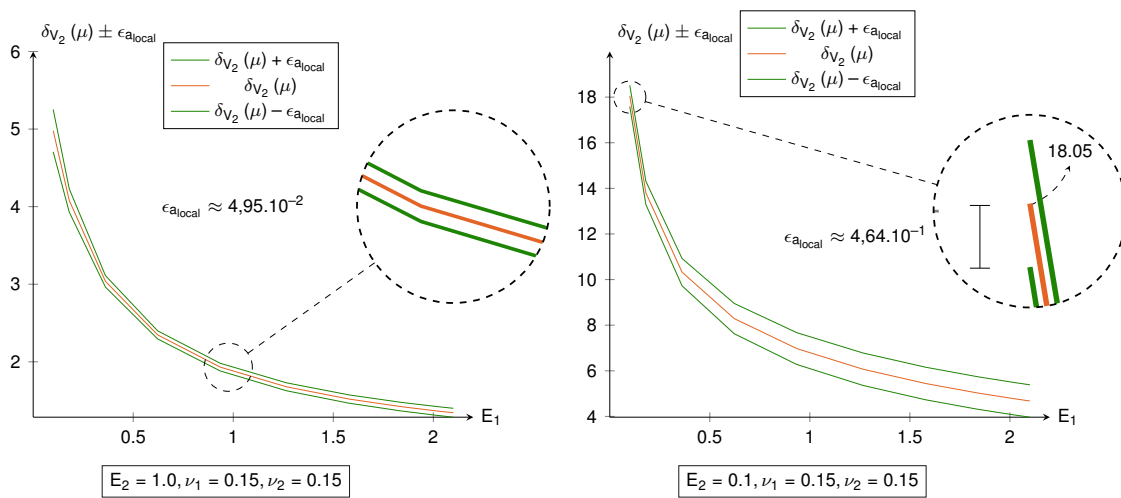




**Figura 4.56.** Valores dos deslocamentos médios,  $\delta_{V_2}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos valores dos módulos de elasticidade dos materiais.



**Figura 4.57.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.56 para:  $E_2 = 2.1$  e  $E_1 = 2.1$ .

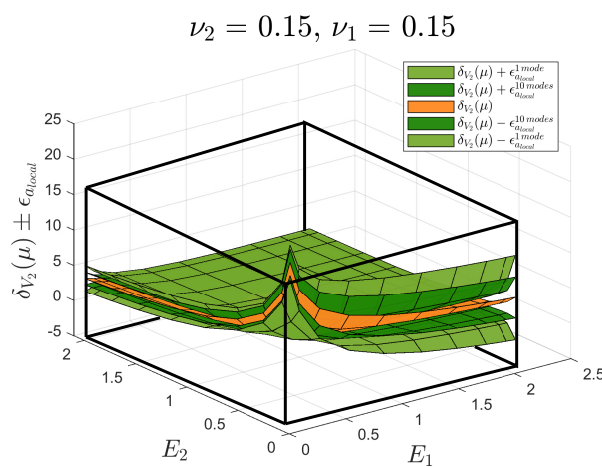


**Figura 4.58.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.56 para:  $E_2 = 1.0$  e  $E_2 = 0.1$ .

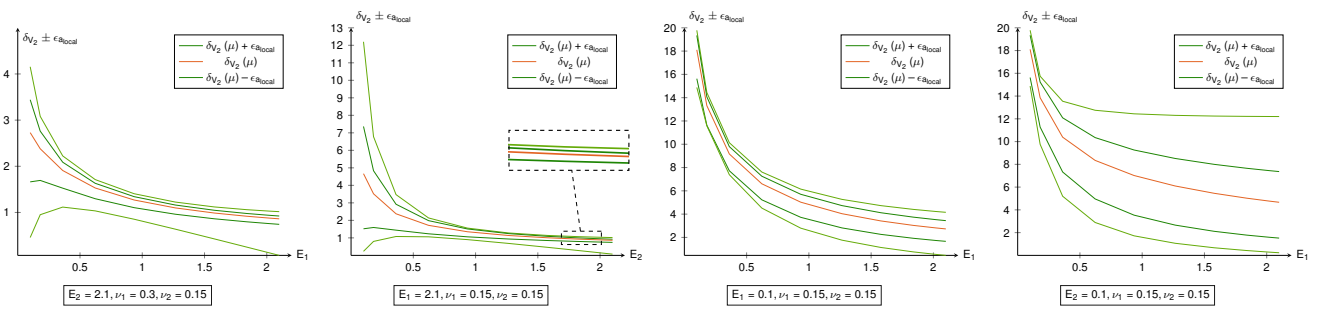
Nos gráficos da Fig. 4.56, para a malha inicial com  $n_e = 32$ , apresentam-se os valores do deslo-

cimento médio,  $\delta_{V_2}$ , e os seus limites, para as várias combinações dos módulos de elasticidade dos materiais. Observa-se claramente a partir da Fig. 4.56, mais uma vez, que o máximo valor de  $\delta_{V_2}$  ocorre quando os materiais são flexíveis e o mínimo valor quando os materiais são rígidos. Para qualquer outra combinação dos parâmetros, os valores de  $\delta_{V_2}$  estão compreendidos entre aqueles dois limites, i.e.,  $\delta_{V_2}^{\min} = 0,86 < \delta_{V_2} < 18,05 = \delta_{V_2}^{\max}$ . A partir dos gráficos da Fig. 4.57 e Fig. 4.58, observa-se claramente que os maiores valores para os majorantes do erro ocorrem quando os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos, i.e.,  $E_1 = 0,1$ ;  $E_2 = 2,1$  e vice-versa. E os menores valores para os majorantes ocorrem, regra geral, quando os módulos de elasticidade são iguais. Apesar disso, note-se que para a situação  $E_1 = E_2 = 0,1$ , o majorante do erro é superior para o caso em que  $E_1 = 0,1$ ;  $E_2 = 2,1$ , verificando-se assim que quanto maior for a ordem de grandeza do valor médio,  $\delta_{V_2}$ , maior é também a estimativa para o majorante do erro. E conseqüentemente, para o caso em que os materiais são rígidos, o valor do majorante do erro é o menor de todos. Observa-se ainda, que quando o material intermédio  $S_2$  é flexível e  $S_1$  rígido regista-se um maior valor de  $\delta_{V_2}$  comparativamente à situação oposta. Em geral, o comportamento do gráfico da Fig. 4.56 é semelhante ao apresentado no gráfico da Fig. 4.37 para a geometria  $a = b = 1$ , exceto para os valores do deslocamento médio  $\delta_V$  e dos majorantes do erro, que são maiores.

No gráfico da Fig. 4.59, apresentam-se os valores do deslocamento médio,  $\delta_{V_2}$ , correspondente à malha de referência obtida a partir de um refinamento adaptativo baseado no indicador do erro local, com  $n_e = 852$ , e os limites, superior e inferior, das soluções com 1 e 10 modos do PGD correspondente à malha uniforme com  $n_e = 8$ . A partir da Fig. 4.59 e da Fig. 4.60, verifica-se claramente que os majorantes do erro são superiores para a solução com 1 modo do PGD comparativamente à solução com 10 modos, especialmente para as situações em que os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos, i.e.,  $E_2 = 2,1$ ;  $E_1 = 0,1$  e vice-versa. Para as situações em que os módulos de elasticidade são iguais, i.e.,  $E_1 = E_2$ , a diferença não é tão expressiva. A partir do detalhe ampliado na Fig. 4.60 para o corte  $E_1 = 2,1$ , verifica-se que mesmo com poucos modos do PGD os majorantes do erro são sempre fiáveis.



**Figura 4.59.** Valores do deslocamento médio,  $\delta_{V_2}$ , correspondente à solução de referência (local:  $n_e = 852$ ) e os limites para as soluções com 1 e 10 modos do PGD da malha grosseira (uniforme:  $n_e = 8$ ).



**Figura 4.60.** Secções específicas do gráfico da Fig. 4.59 para os casos:  $E_2 = 2.1$ ,  $E_1 = 2.1$ ,  $E_1 = 0.1$  e  $E_2 = 0.1$ .

### Quantidade de Interesse: $M_2$

Na Tab. 4.20, apresentam-se os valores do momento,  $M_2$ , e os majorantes do erro, para as combinações do módulo de elasticidade correspondente aos 4 cantos do domínio paramétrico e usando uma malha uniforme e outra obtida a partir do refinamento adaptativo com base no erro local, usando como  $Qdl$   $\delta_{V_2}$ .

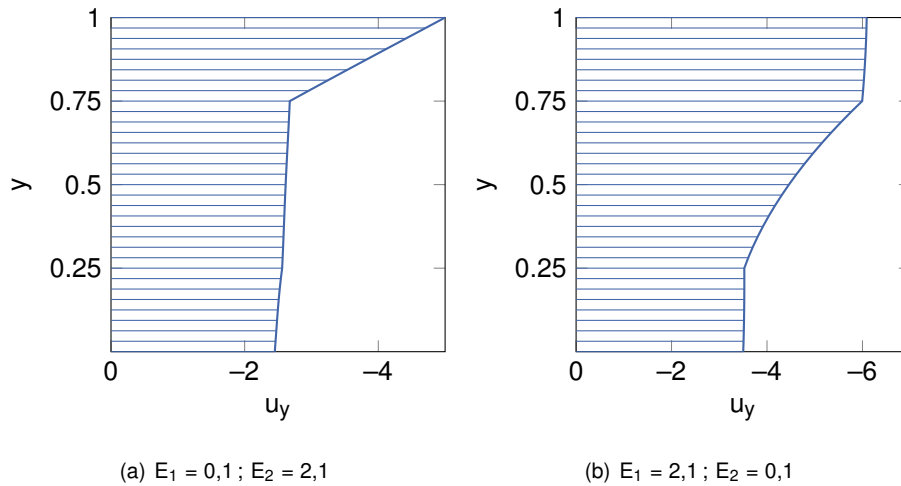
Parâmetro	uniforme: $n_e = 512$	local: $n_e = 852$
$E_1 = E_2 = 2,1$	$-0,17914 \pm 0,00026$	$-0,17910 \pm 0,00001$
$E_1 = E_2 = 0,1$	$-0,17914 \pm 0,00026$	$-0,17910 \pm 0,00001$
$E_1 = 2,1 ; E_2 = 0,1$	$-0,17544 \pm 0,00087$	$-0,17544 \pm 0,00008$
$E_1 = 0,1 ; E_2 = 2,1$	$-0,18214 \pm 0,00024$	$-0,18211 \pm 0,00002$

**Tabela 4.20.** Valor médio da  $Qdl$ ,  $M_2$ , e majorantes do erro, para as combinações correspondente aos 4 cantos do domínio paramétrico.

A partir da Tab. 4.20, é possível observar que os valores do momento, assim como os majorantes do erro, são iguais para os casos em que os módulos de elasticidade são iguais, i.e,  $E_1 = E_2$ . Estas situações apresentam os menores majorantes do erro comparativamente aos casos em que os módulos de elasticidade são extremos opostos. Observa-se um maior valor do momento para a situação que apresenta o material intermédio  $S_2$  rígido e  $S_1$  flexível, e o menor valor para a situação oposta.

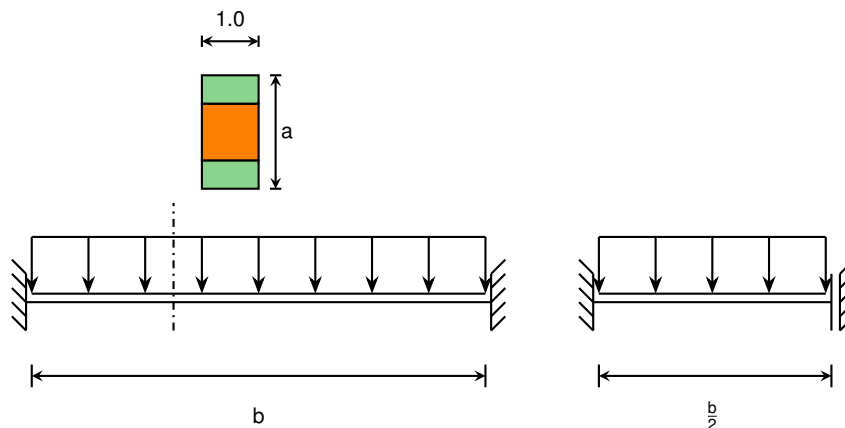
### Diagramas de Deslocamentos ( $u$ ) e Tensões ( $\sigma$ )

Na Fig. 4.61, apresentam-se os diagramas de deslocamentos  $u_y$  a meia largura da placa, para os valores extremos opostos dos módulos de elasticidade dos materiais. A partir da Fig. 4.61(b) é possível observar que a magnitude da componente do deslocamento  $u_y$  ao longo da altura da placa é superior para o caso em que a secção intermédia,  $S_2$ , é flexível, pelo que é possível constatar, de forma qualitativa, que o valor médio do deslocamento naquela zona é superior comparativamente à situação oposta apresentada na Fig. 4.61(a). Do gráfico da Fig. 4.57, para àquela situação verificou-se que  $\delta_{V_2} = 4,676 > 2,694 = \delta_{V_2}$  para a situação oposta, conforme o esperado.



**Figura 4.61.** Diagrama de deslocamentos  $u_y$  à meia largura da placa para os casos em que os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos (malha uniforme:  $n_e = 512$ ).

De seguida, comparam-se os diagramas de tensões,  $\sigma_{xx}$ , obtidos à meia largura da placa pelo PGD, com os diagramas  $\sigma_{xx}$  considerando um modelo de viga com a secção transversal da placa. Adotando o modelo de viga, apresentado na Fig. 4.62, utiliza-se a equação (4.4) para a determinação das tensões  $\sigma_{xx}$  ao longo da altura da viga, à luz da teoria de Bernoulli.



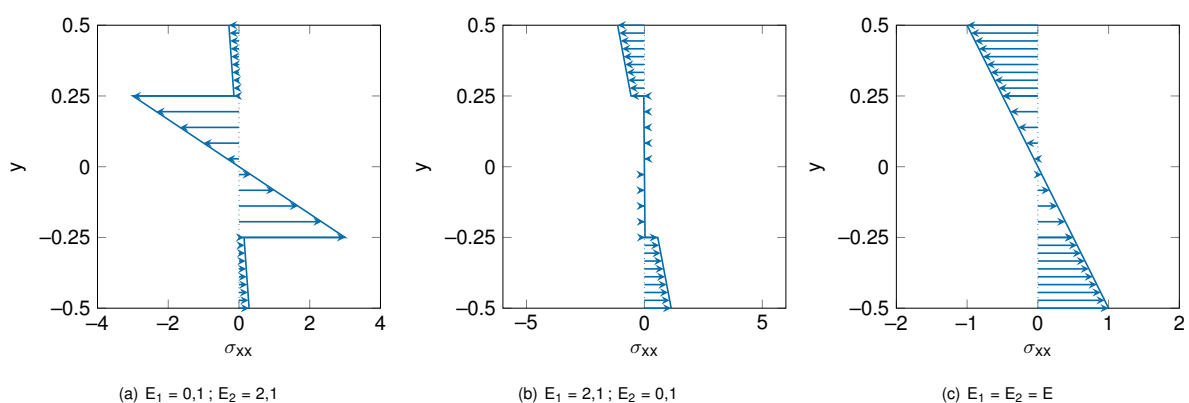
**Figura 4.62.** Representação do modelo de viga, e respetiva simplificação de simetria, com a secção transversal da placa

$$\sigma = \frac{E_i M}{\sum E_i I_i} y \quad b = 2 \rightarrow \left\{ M^+ = \frac{1 \times 2^2}{24} = 0,167 \right. \quad (4.4)$$

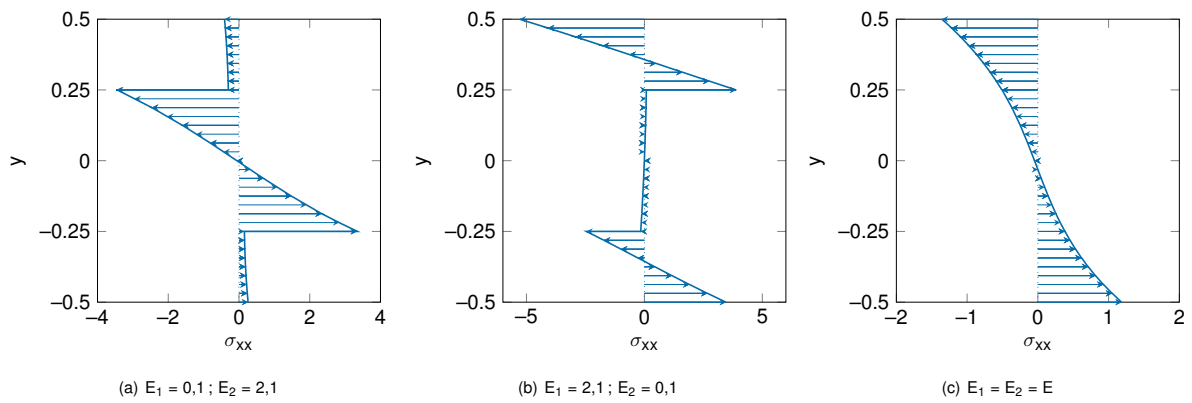
Assim, na Fig. 4.63 apresenta-se o diagrama de tensões  $\sigma_{xx}$  na secção a meio vão da viga para os casos em que os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos e para o caso em que os módulos de elasticidade são iguais. Para as mesmas situações, na Fig. 4.64 apresentam-se os diagramas obtidos pelo PGD na secção a meia largura da placa. Observa-se que, para os casos em que a secção intermédia,  $S_2$ , é rígida, a distribuição obtida por ambas as abordagens assemelham-se, e para o caso em que os módulos de elasticidade são iguais, a distribuição de tensões, e por conseguinte, as extensões não apresentam uma variação linear, no entanto, a ordem de grandeza

dos valores assemelham-se bastante. Constata-se assim, que para aqueles valores específicos dos parâmetros, a modelação deste problema como viga ou placa, não é assim tão diferente. Observa-se que quando a secção intermédia,  $S_2$ , é rígida, a tensão que se gera nos materiais adjacentes flexíveis é praticamente desprezável, conferindo a noção de que só o material intermédio está a funcionar. Quando os módulos de elasticidade são iguais, verifica-se que a distribuição é independente do módulo de elasticidade dos materiais. Por outro lado, para o caso em que a secções inferior e de topo,  $S_1$ , são rígidas, verifica-se que as duas abordagens divergem, fornecendo diferentes resultados. Para o caso da viga, não existe descontinuidade no diagrama de extensões, enquanto que para a placa observa-se um comportamento independente entre os diferentes materiais, verificando-se a descontinuidade no diagrama de tensões, e por conseguinte, das extensões.

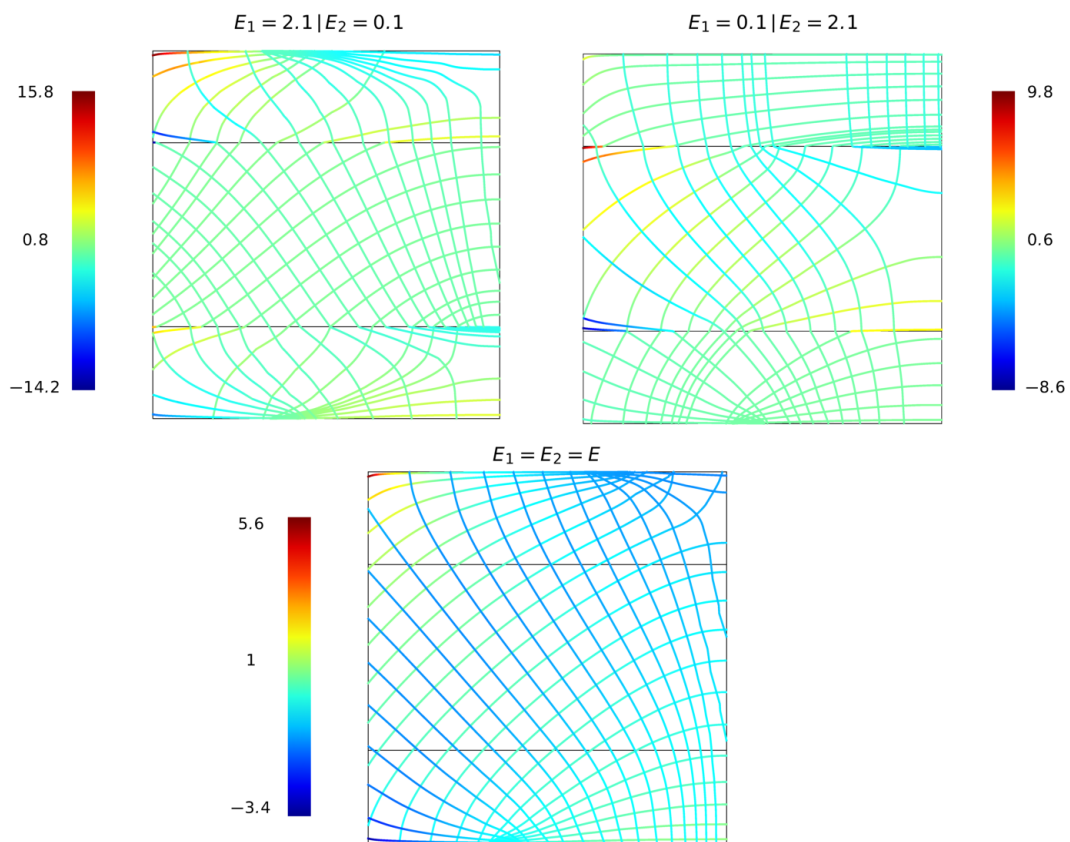
Na Fig. 4.65, apresentam-se as trajetórias das tensões principais na placa para as situações com módulos de elasticidade dos materiais extremos opostos e para a situação com os módulos de elasticidade dos materiais iguais. É possível perceber, para cada situação, os caminhos que a tensão aplicada no topo perfaz até chegar à zona de apoio. Para os casos em que os módulos de elasticidade são extremos, é possível observar que as tensões que se geram nos materiais flexíveis são praticamente desprezáveis, servindo apenas como meio de transmissão de tensão para o material mais rígido. Observa-se ainda que as tensões  $\sigma_{xx}$  apresentadas na Fig. 4.64, correspondem às tensões principais no lado direito de cada caso da Fig. 4.65, e ainda se verifica que nessa zona as trajetórias são retilíneas e paralelas entre si, comparativamente às zonas mais próximas do apoio. Os maiores valores das tensões principais, de tração e de compressão, verificam-se na zona do apoio, i.e, no encastramento. Para o caso  $E_1 = 2,1$  ;  $E_2 = 0,1$ , os valores máximos verificam-se nas fibras, superior e inferior, da secção  $S_1$  de topo, e para o caso oposto, nas fibras inferior e superior, da secção intermédia  $S_2$ . Para o caso em que os módulos de elasticidade são iguais, os maiores valores ocorrem nas fibras superior e inferior correspondentes à altura total da placa.



**Figura 4.63.** Diagrama de tensões  $\sigma_{xx}$  a meio vão do modelo de viga à luz da Teoria de Bernoulli.



**Figura 4.64.** Diagrama de tensões  $\sigma_{xx}$  na secção à meia largura do modelo de placa, calculada através do PGD (malha uniforme:  $n_e = 512$ ).



**Figura 4.65.** Trajetória das Tensões Principais para as situações em que os materiais apresentam valores de módulos de elasticidade extremos opostos e para a situação em que os módulos de elasticidade são iguais.

### Convergência Global: Deslocamentos ( $u$ ) e Tensões ( $\sigma$ )

Nas Fig. A.4 e Fig. A.5, para uma malha obtida a partir de um refinamento uniforme, com  $n_e = 512$ , e a outra obtida a partir de um refinamento adaptativo baseado no indicador do erro global, com  $n_e = 686$ , respetivamente, apresenta-se o processo de enriquecimento das soluções pelo PGD para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ . As malhas de elementos finitos estão apresentadas na Fig. 4.55. O processo é apresentado para as situações correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico,

com um esquema semelhante para os processos apresentados para a placa quadrada na Sec. 4.2. Saliente-se que a escala das tensões apresentada nas duas figuras é a mesma, de modo a facilitar a sua leitura, no entanto, para o processo da Fig. A.5, por se verificar alguma concentração de tensões no canto superior esquerdo da placa, o valor nessa zona em particular pode ser ligeiramente superior ao apresentado na escala.

Nas Fig. A.4 e Fig. A.5, é possível observar que a aproximação inicial do método corresponde a uma situação em que os módulos de elasticidade das secções são iguais. Quando se quer conhecer as soluções para esses casos, o ideal seria esta solução inicial. No entanto, esta solução é alterada para também se poder satisfazer as outras combinações dos parâmetros e posteriormente recuperada, após se acrescentarem alguns modos do PGD. Neste sentido, estes novos modos adicionados à solução favorecem as situações em que os módulos de elasticidade das secções apresentam valores extremos opostos, de modo que uma solução para estas situações específicas possa ser representada. Refira-se que a solução de  $\sigma_{xx}$ , para a malha obtida a partir de um refinamento uniforme, converge completamente após  $\mathcal{N} = 20$  modos do PGD, enquanto que a malha obtida a partir do refinamento com base no erro global converge ao fim de aproximadamente  $\mathcal{N} = 40$  modos. Apesar disso, para ambos os casos verifica-se que com 3-4 modos do PGD, a solução praticamente já convergiu, pelo menos visualmente, servindo os modos seguintes apenas para ajustes localizados da solução, em função do grau de detalhe das malhas. As funções do espaço de um dado modo  $\mathcal{N}$  são semelhantes para as diferentes situações, a menos do sinal e do seu peso. Destaque-se a importância do primeiro modo,  $\mathcal{N} = 1$ , para o caso em que a secção intermédia,  $S_2$ , é rígida e as adjacentes flexíveis, e a importância do segundo modo,  $\mathcal{N} = 2$ , para a situação oposta. Não se observam diferenças significativas para os pesos das funções do espaço referente às situações semelhantes apresentadas na Fig. A.4 e Fig. A.5.

Usando as mesmas malhas de elementos finitos, na Fig. A.6 e Fig. A.7 apresenta-se o processo da construção das soluções do PGD para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ). É possível observar, que a aproximação inicial do método corresponde ao campo de deslocamentos correspondente a um caso homogéneo, com um valor de módulo de elasticidade intermédio do intervalo que define o domínio paramétrico  $[0,1; 2,1]$ , i.e,  $E = 1,1$ , uma vez que  $2 \times 1,1 \approx 23 \times 0,1 \approx 1 \times 2,1$ . Para o caso em que as secções apresentam o menor valor do módulo de elasticidade, aqueles deslocamentos da aproximação inicial são amplificados, e para o caso contrário, os deslocamentos são reduzidos. Para tal, verifica-se que o primeiro modo,  $\mathcal{N} = 1$ , e o segundo modo,  $\mathcal{N} = 2$ , são importantes naquela modificação. Para os casos em que os módulos de elasticidade são extremos opostos, nota-se que o primeiro modo,  $\mathcal{N} = 1$ , é preponderante para a situação em a secção  $S_2$  é rígida, enquanto que, o segundo modo,  $\mathcal{N} = 2$ , revela-se mais importante para a situação oposta. Observa-se ainda, que o terceiro modo,  $\mathcal{N} = 3$ , de peso menor que os primeiros dois, atribui maior importância às situações que têm a secção  $S_1$  flexível e importância desprezável nas restantes. Comparando os processos apresentados na Fig. A.6 e Fig. A.7, observam-se pequenas alterações nos pesos dos 2 primeiros modos para o caso  $E_1 = E_2 = 0,1$  e ainda se verifica na Fig. A.7 a ligeira alteração da função do espaço que corresponde ao terceiro modo,  $\mathcal{N} = 3$ , em que a secção intermédia e a secção inferior já passam a apresentar alguma flexibilidade.

## Capítulo 5

# Conclusões

Neste capítulo revisitam-se alguns tópicos importantes apresentados neste trabalho, complementados com as conclusões retiradas e finalizando com algumas linhas orientadoras para futuros trabalhos neste tema.

Em forma de resumo, saliente-se que, assim como os outros métodos de ordem reduzida, o PGD é uma técnica numérica relativamente recente e transversal, i.e, pode ser aplicada a uma grande variedade de problemas das ciências da engenharia, e que surge com o principal objetivo de colmatar a ineficiência dos métodos clássicos de elementos finitos ao lidar com modelos multi-dimensionais, uma vez que o número de graus de liberdade cresce exponencialmente com a dimensão do problema. Porém, o surgimento desta técnica também abre novas alternativas ou abordagens àqueles problemas mais clássicos envolvendo as coordenadas espaciais ou de tempo, aos quais podem-se adicionar novos parâmetros, como por exemplo, as propriedades dos materiais, as condições de fronteira ou ainda os parâmetros de geometria. Abre-se assim a porta para a otimização dos modelos, i.e, a obtenção de múltiplas soluções ao mesmo tempo. Neste sentido, é importante também enfatizar que um dos pontos chave do sucesso da técnica para fazer face aos modelos multi-dimensionais, ou mesmo com os mais clássicos, sem grandes dificuldades, é a representação separada das soluções e a vantagem que esta representa no cálculo dos integrais, uma vez que, o integral de um modelo definido num espaço de dimensão  $D$ , i.e,  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_D$  é transformado numa série de integrais 1D em  $\Omega_i$  como ilustra a equação (5.1), tornando-se assim numa tarefa simples do ponto de vista computacional.

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_D} \underbrace{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} F_i^1(x_1) \times \dots \times F_i^D(x_D)}_{\widehat{F}(x_1, x_2, \dots, x_D)} d\Omega = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left( \int_{\Omega_1} F_i^1(x_1) dx_1 \right) \times \dots \times \left( \int_{\Omega_D} F_i^D(x_D) dx_D \right) \quad (5.1)$$

Relativamente às soluções globais obtidas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$  e para o campo de deslocamentos compatível  $u$ , dos 2 problemas analisados compostos pelos materiais  $S_1$  e



$S_2$ , de forma geral observou-se que para a componente de tensão  $\sigma_{xx}$ , a aproximação inicial do método corresponde à solução exata do problema homogéneo, contudo, por força de também ter que se satisfazer as outras combinações dos parâmetros, aquela solução é modificada mas recuperada após se acrescentarem alguns modos do PGD. Assim, este facto ilustra que quando se quer conhecer a solução para a combinação homogénea este não é o mais vantajoso, porém, para os casos não homogéneos aqueles modos iniciais são fundamentais para que as soluções correspondentes a essas situações específicas possam ser representadas. Também se verificou para o campo de deslocamentos ( $u$ ), que a aproximação inicial do método corresponde a uma solução homogénea para um valor intermédio no domínio  $E \in [0,1 ; 2,1]$ , i.e,  $E = 1,1$ , e consoante a situação, a amplitude do deslocamento é amplificada ou reduzida com a adição de novos modos de maneira que as soluções específicas possam ser representadas.

De forma geral, observou-se ainda que para as soluções apresentadas de  $\sigma_{xx}$  e  $u$ , o número de modos  $\mathcal{N}$  para que se atinja uma solução com uma precisão adequada, não passam, em geral, dos dez ou menos, mesmo com a utilização de malhas mais refinadas. No entanto, usando malhas mais refinadas e para uma dada precisão, tem-se um maior número de modos  $\mathcal{N}$  utilizados na representação separada das soluções e a sua utilização conduz, regra geral, a uma melhor representação da componente  $\sigma_{xx}$  e do campo  $u$  no domínio e na fronteira. Referiu-se ainda, que para as combinações de parâmetros apresentadas, as funções das coordenadas espaciais em cada etapa de enriquecimento  $n$  são semelhantes, porém, com importâncias diferentes. Este facto, ilustra bem o carácter separável das soluções, uma vez que cada parâmetro do modelo depende apenas da função que o caracteriza em cada modo.

Relativamente às *QdI* analisadas para a placa quadrada, verificou-se para a reação horizontal  $\mathcal{R}_h$  que o valor coincide com o valor exato independentemente dos detalhes de implementação, uma vez que a solução virtual é exata, i.e,  $\bar{\epsilon} = 0 \rightarrow \epsilon_{a_{local}} = 0$ . Relativamente ao momento  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  disse-se que são iguais e de sinais opostos, i.e, auto-equilibrados. O maior momento, em valor absoluto, verificou-se para o caso em que a parte inferior  $S_1$  é rígida e a superior  $S_2$  flexível, e o menor valor quando acontece o oposto. E para a situações em que os materiais apresentam módulos de elasticidade iguais o valor é nulo. Por fim, relativamente aos deslocamento horizontal na extremidade direita  $\delta_h$  e vertical na extremidade superior  $\delta_v$ , verificou-se que o valor máximo ocorre quando ambos materiais são flexíveis e o valor mínimo quando são rígidos. Para qualquer outra combinação, os valores estão compreendidos entre aqueles dois limites. Assim, para as soluções já convergidas, verificou-se que fixando  $\nu = 0,3$  e  $E \in [0,1 ; 2,1]$  obtém-se:  $\delta_h^{\min} = 0,4762 < \delta_h < 10 = \delta_h^{\max}$  e  $\delta_v^{\min} = -0,1428 < \delta_v < -3 = \delta_v^{\max}$ , cujos limites correspondem às soluções exatas do problema homogéneo para os valores extremos do domínio, i.e,  $\delta_h \sim \frac{1}{E}$ ;  $\delta_v \sim -\frac{\nu}{E}$ ,  $E \in \{0,1;2,1\}$ . Utilizando estas *QdI*, observou-se ainda que variar o módulo de elasticidade,  $E$ , e fixando o parâmetro,  $\nu$ , tem uma maior influência na convergência de  $\delta_h$  e  $\delta_v$ , i.e, são precisos mais modos para que a solução do problema homogéneo seja atingido. Variando os dois parâmetros,  $E$  e  $\nu$ , os valores não diferem muito do caso referido anteriormente.

Relativamente ao problema da placa fixa nas duas extremidades, analisaram-se os resultados correspondentes a duas geometrias  $a = b = 1$  e  $a = 1, b = 2$ . Relativamente às *QdI* analisadas, para o

deslocamento vertical médio à meia largura da placa,  $\delta_V$ , observou-se que valor máximo ocorre quando ambos os materiais são flexíveis e o valor mínimo quando os materiais são rígidos. Fixando  $\nu = 0,15$  e  $E \in [0,1 ; 2,1]$  verificou-se:  $\delta_{V_1}^{\min} = 0,162 < \delta_h < 3,407 = \delta_{V_1}^{\max}$  para a geometria  $a = b = 1$  ;  $\delta_{V_2}^{\min} = 0,86 < \delta_h < 18,05 = \delta_{V_2}^{\max}$  para a geometria  $a = 1, b = 2$ . Evidentemente que para o caso em que a dimensão do vão é maior, o deslocamento vertical médio, inclusive os majorantes do erro, são também maiores para as várias combinações de parâmetros. Relativamente ao momento M verificou-se que os valores são maiores para a geometria  $a = 1 ; b = 2$  do que para a geometria  $a = b = 1$ , como era de se esperar.

De forma geral, relativamente aos majorantes do erro associados às *Qdl*, verificou-se que tendem a ser superiores quando os módulos de elasticidade dos materiais apresentam valores extremos opostos, i.e, um rígido e outro flexível, e inferiores quando apresentam valores iguais. E com o refinamento da malha aqueles valores tendem a reduzir. Verificou-se que o refinamento uniforme conduz a maiores valores para ambos os integrais do majorante do erro  $\Psi_{\text{global}}$  e  $\Psi_{\text{local}}$ , ao passo que o refinamento adaptativo com base no erro global conduz a menores valores para o integral do majorante do erro global  $\Psi_{\text{global}}$ , e logo menores erros globais das soluções, e o refinamento adaptativo com base no erro local conduz a menores valores do integral do majorante do erro local  $\Psi_{\text{local}}$ , que implica menores erros associados à *Qdl*.

Como parte do trabalho realizado, desenvolveram-se rotinas adicionais em ambiente *Python* que permitiram a obtenção dos modos utilizados pelo PGD na construção das soluções, a representação gráfica dos diagramas de tensões ou deslocamentos numa dada secção e a determinação das trajetórias das tensões principais.

## 5.1 Desenvolvimentos Futuros

Desde o surgimento da técnica por volta dos anos 2000, é extenso o número de trabalhos que surgiram desde então neste tema, inclusive este, relativos aos fundamentos da técnica e a sua aplicação a diversos problemas dos vários ramos das ciências das engenharias. Em particular no ramo de mecânica estrutural, propõem-se futuros trabalhos neste tema que explorem os seguintes aspetos:

- Explorar geometrias diferentes e mais complexas, uma vez que este trabalho limitou-se a geometrias simples;
- Para geometrias simples obter a representação separada para as soluções em função das dimensões. Em vez de resolver o problema várias vezes para dimensões particulares, procura-se assim obter uma solução mais geral com os valores para os parâmetros da geometria especificados num dado domínio. No entanto, obter uma representação separada da solução em função daqueles parâmetros não é uma tarefa fácil, dada a dependência entre as coordenadas dos elementos da malha e os parâmetros da geometria e, por conseguinte, a dificuldade na manipulação da inversa da matriz Jacobiana de transformação de coordenadas.

# Bibliografia

- [1] L. Chamoin, P. Ladeveze, and F. Pled. Recent advances in the control of PGD-based approximations. 6<sup>th</sup> *International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*, pages 170–181, June 2013. doi:hal-01057247.
- [2] F. Chinesta, R. Keunings, and A. Leygue. *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations. A primer*. 01 2014. ISBN 978-3-319-02864-4. doi: 10.1007/978-3-319-02865-1.
- [3] J. Reis. *Error Estimation and Adaptivity for PGD Solutions*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2020.
- [4] J. Reis, J. P. Moitinho de Almeida, P. Díez, and S. Zlotnik. Error estimation for proper generalized decomposition solutions: Dual analysis and adaptivity for quantities of interest. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(3):752–776, 2021. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.6559>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6559>.
- [5] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79:1309–1331, Nov. 2009.
- [6] O. Pereira and J. P. Moitinho de Almeida. Automatic drawing of stress trajectories in plane systems. *Computers & Structures*, 53(2):473–476, 1994.

# Apêndice A

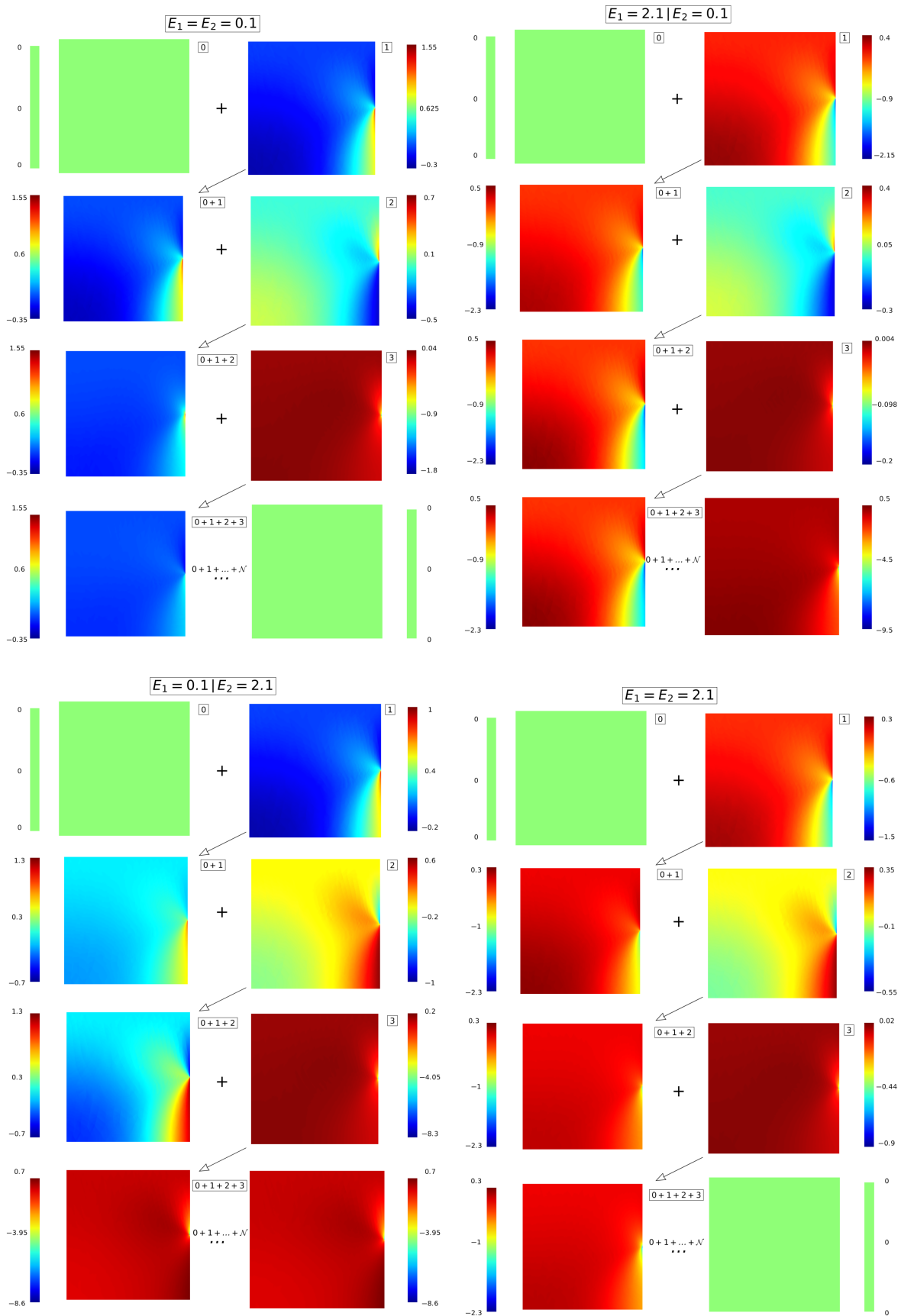
## Construção da solução pelo PGD

Problema da Placa Quadrada apresentado na Sec. 4.2:

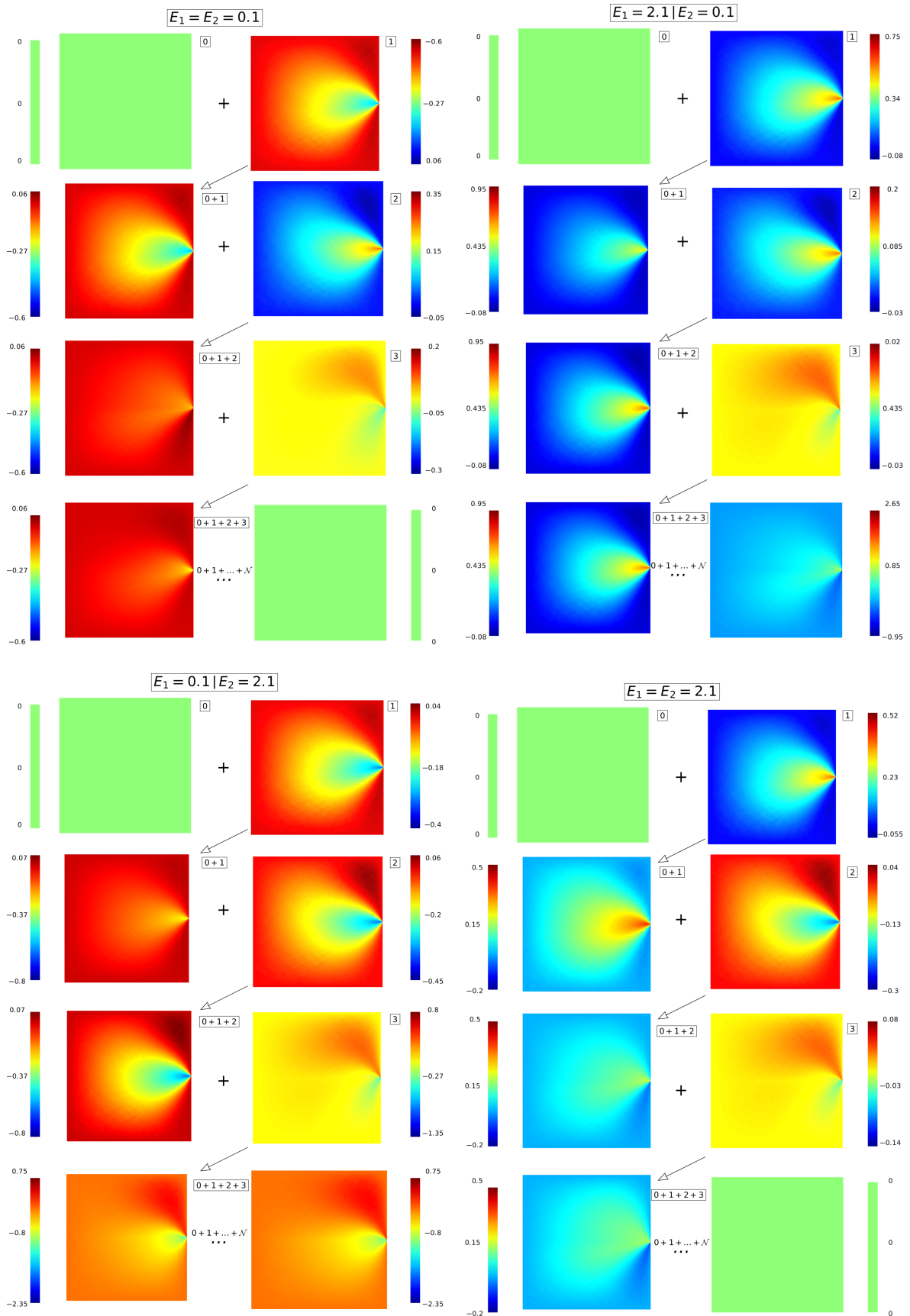
- Na Fig. A.1 e Fig. A.2 apresenta-se o processo de construção das soluções pelo PGD para as componentes de tensão equilibradas,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ , correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico.
- Na Fig. A.3 apresenta-se o processo de construção das soluções pelo PGD para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$  correspondente às combinações com a parte superior rígida.

Problema da Placa Bi-Encastada apresentado na Sec. 4.3:

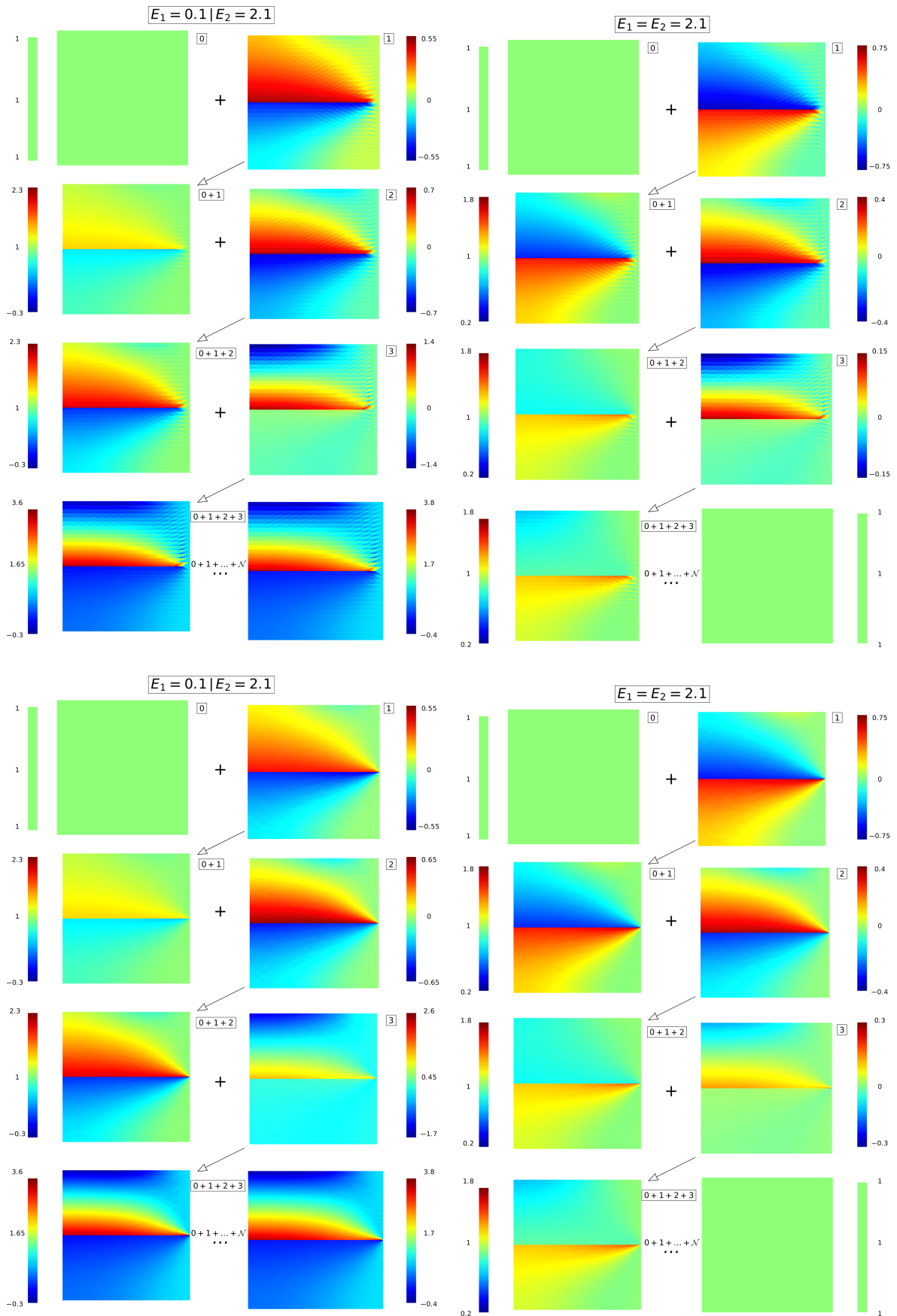
- Na Fig. A.4 à Fig. A.7 apresenta-se o processo de construção das soluções pelo PGD para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$  e para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico.



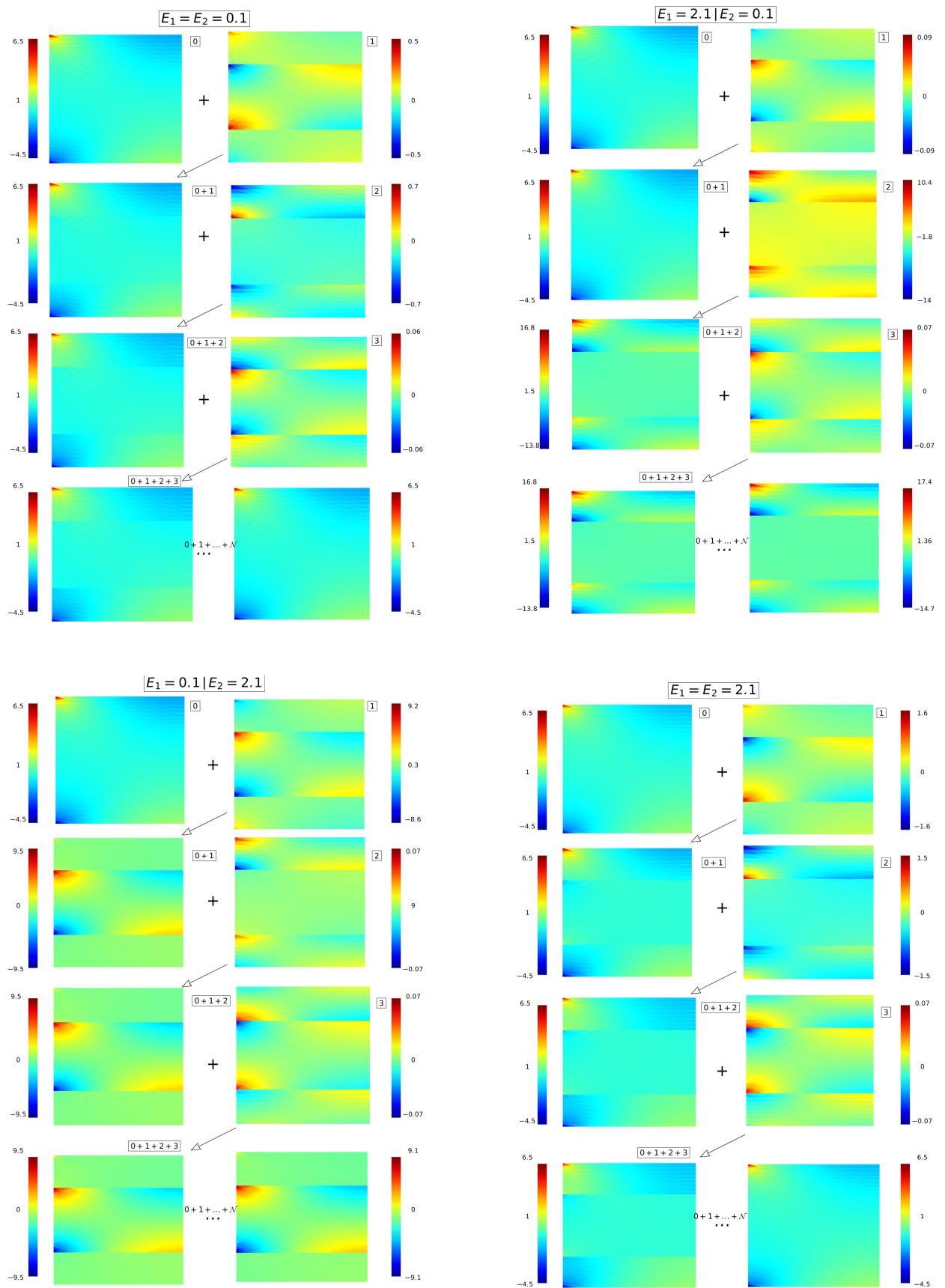
**Figura A.1.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{yy}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global:  $n_e = 1589$ ).



**Figura A.2.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xy}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global:  $n_e = 1589$ ).

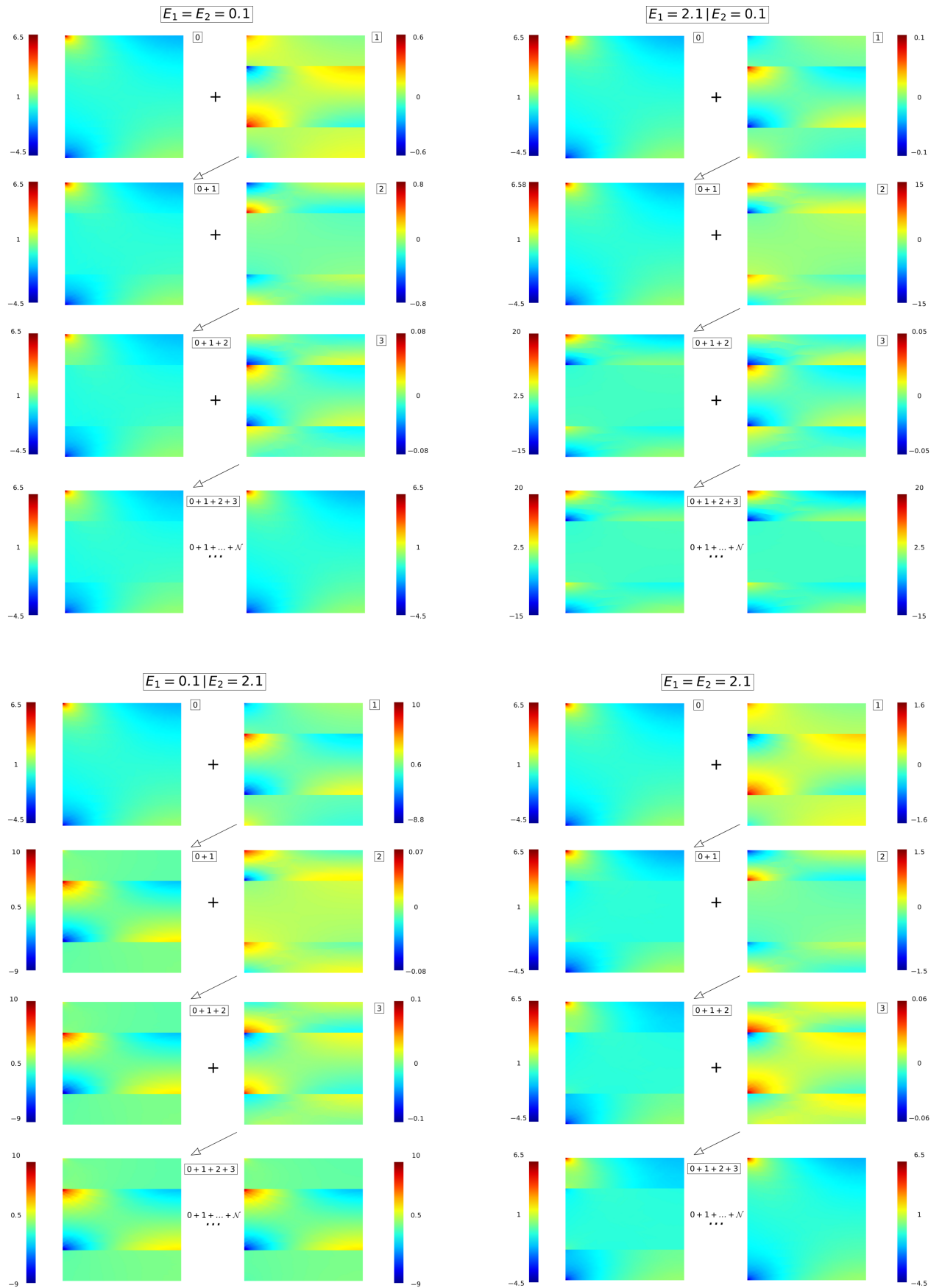


**Figura A.3.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondente às combinações com a parte superior rígida. 1ª linha - uniforme:  $n_e = 1024$ ; 2ª linha - global:  $n_e = 1589$ .

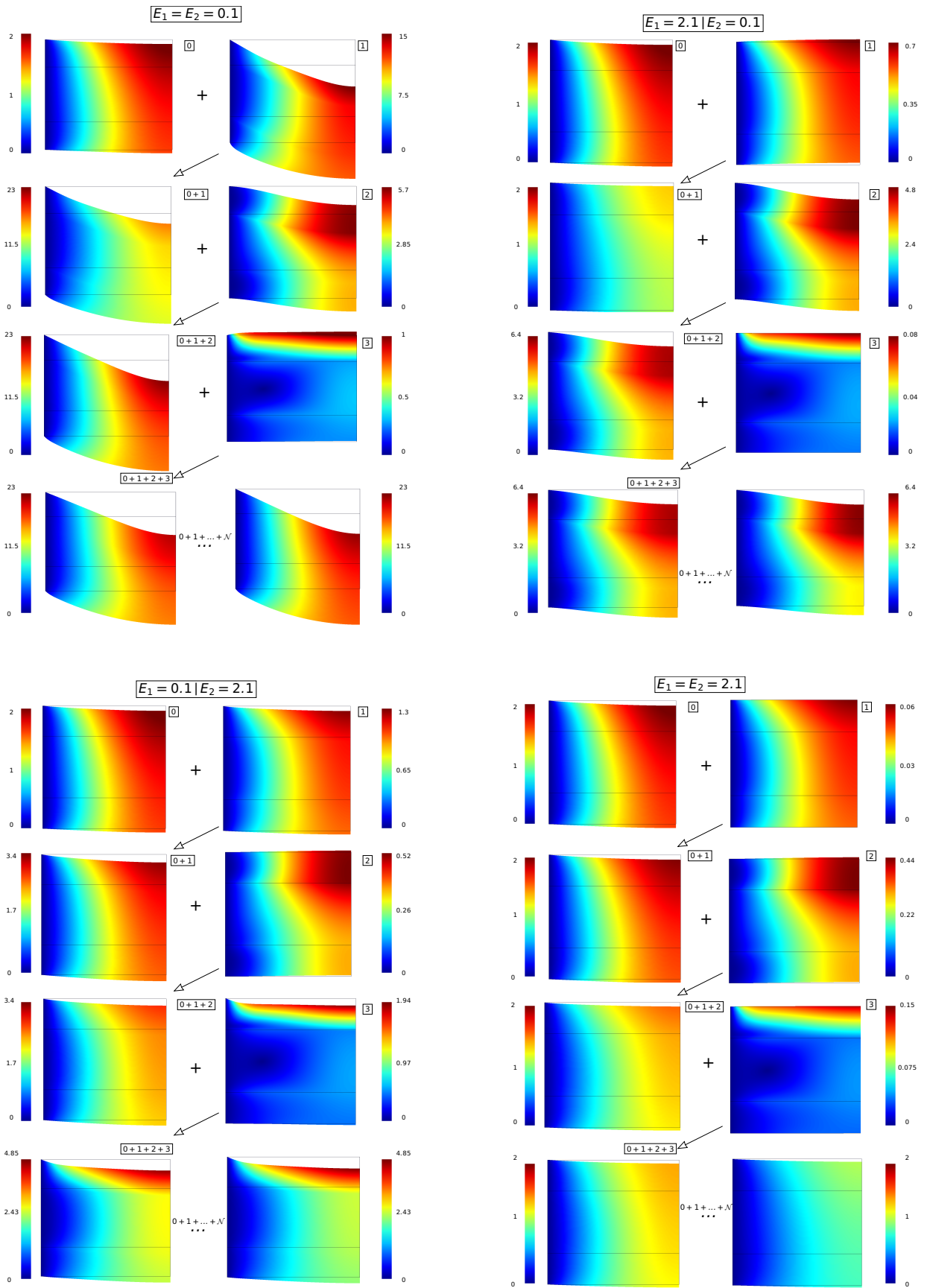


**Figura A.4.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme:  $n_e = 512$ ).

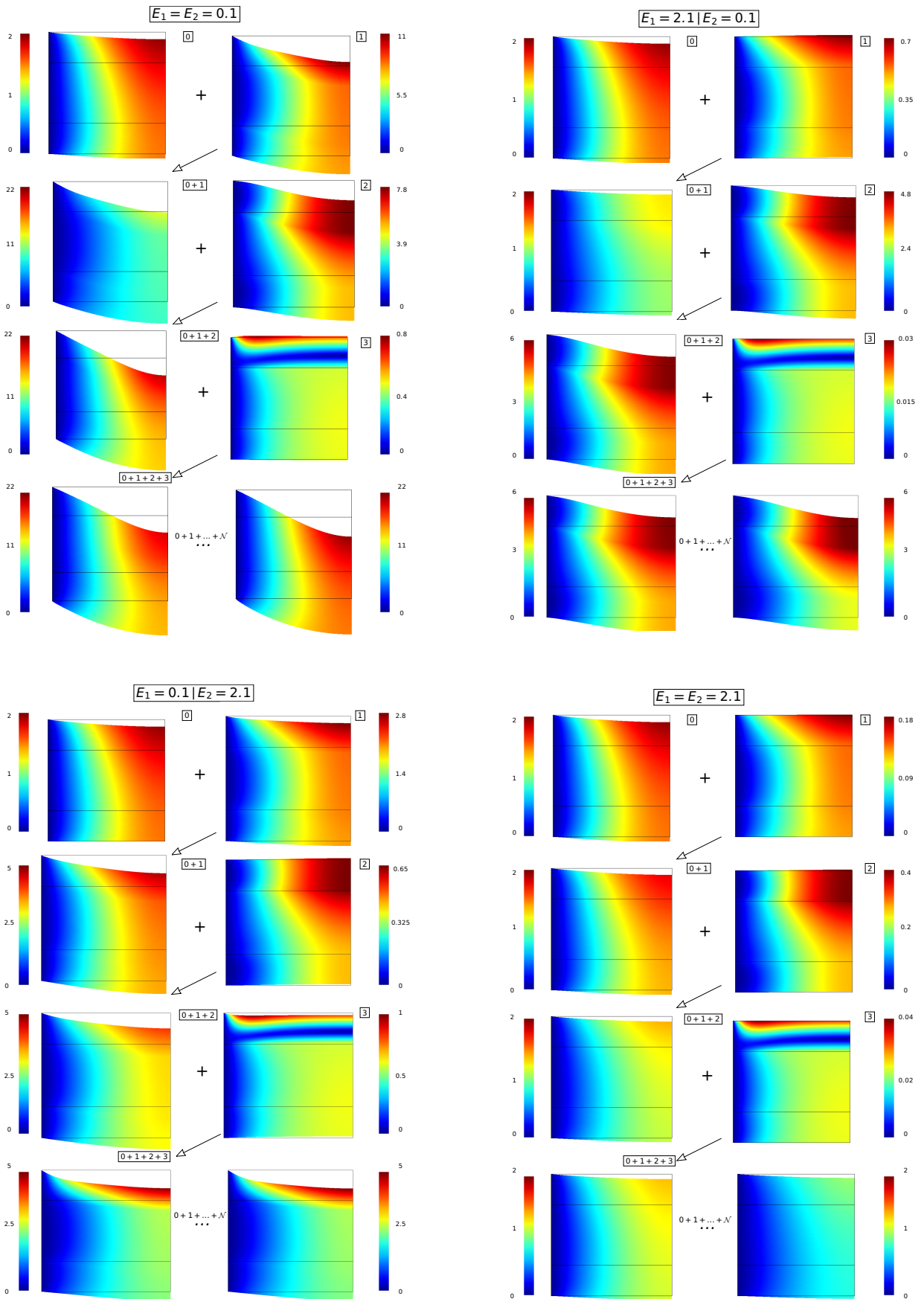




**Figura A.5.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para a componente de tensão equilibrada  $\sigma_{xx}$ , com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global:  $n_e = 686$ ).



**Figura A.6.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (uniforme:  $n_e = 512$ ).



**Figura A.7.** Processo de enriquecimento sucessivo do PGD na obtenção de soluções aproximadas para o campo de deslocamentos compatível ( $u$ ), com 1-3 modos e correspondentes aos 4 cantos do domínio paramétrico (global:  $n_e = 686$ ).