Exercícios Resolvidos Extra de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI - CDI-I -, 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 3. Cálculo Diferencial.

Diferenciabilidade

1. Calcule as constantes a e b por forma a que seja diferenciável em 0 a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} a + bxe^{2x} & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Justifique a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}$ calcule a sua derivada, e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $a \leq 0$.

RESOLUÇÃO

Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} 2x = 1 + 2\cdot 0 = 1,$$

resulta que f é contínua em 0 sse $a = 1$.

Quanto à diferenciabilidade,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx\, e^{2x}}{x} = b$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = 2.$$

Logo f é diferenciável em 0 sse $b = 2$ (e $a = 1$).

Neste caso, $f'(0) = 2$ e a tangente ao gráfico em $(0, f(0))$ é dada por
$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 2x$.

Se $a < 0$, f é diferenciável pois resulta do produto de funções diferenciáveis.
$f'(a) = (4a + 2)e^{2a}$.

Para $a < 0$, a equação da reta tangente ao gráfico em $(a, f(a))$ é dada por
$y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + 2ae^{2a} + f'(a)(x - a) = 1 + 2ae^{2a} + (4a + 2)e^{2a}(x - a)$.

Se $a > 0$, f é diferenciável pois resulta do produto e quociente de funções diferenciáveis.
$f'(a) = -\frac{2}{a^2}\operatorname{sen}^2 a + \frac{2}{a} 2 \operatorname{sen} a \cos a = \frac{2\operatorname{sen} a}{a}\left(-\frac{\operatorname{sen} a}{a} + 2\cos a\right)$.

2. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

a) $x|x|$, b) $e^{-|x|}$, c) $\ln|x|$, d) $e^{x-|x|}$.

RESOLUÇÃO

a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Em $x = 0$, temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} x = 0$$
$$f'_e(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} -x = 0.$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$, a função é também diferenciável para $x = 0$, ou seja é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$.

b) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser dada pela composição da função exponencial que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$, que é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Em $x = 0$, tem-se $f'_e(0) = 1$ e $f'_d(0) = -1$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

c) $f(x) = \ln|x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por ser dada pela composição de ln, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^+$ e $|x|$ que é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (como em b)). Em $x = 0$, $f'_d(0) = 0$, $f'_e(0) = 2$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

3. Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\,\frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

RESOLUÇÃO

Para calcularmos as derivadas laterais, é necessário determinar primeiro $f(0)$. Como f é contínua em 0, $f(0) = \lim_{x\to0} f(x)$. Temos

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

logo

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x\,\frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

e portanto $f(0) = 0$.

(Também podíamos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 0\cdot\frac{1}{1} = 0.)$$

Agora,

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 1,$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

(Nota: f é contínua mas não diferenciável em 0.)

4. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

RESOLUÇÃO

Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e sen também:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x + \cos(f(x))f'(x).$$

Logo, dado que $f(0) = f(\pi) = 0$, temos $g'(0) = f'(\operatorname{sen} 0)\cos 0 + \cos(f(0))f'(0) = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$ e $g'(\pi) = f'(\operatorname{sen}\pi)\cos\pi + \cos(f(\pi))f'(\pi) = -f'(0) + f'(\pi)$. Então,

$$g'(0) + g'(\pi) = 2f'(0) - f'(0) + f'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)\,.$$

5. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\ln x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

RESOLUÇÃO

Do teorema de derivação da função composta, para $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = e^{g(\ln x)}\,(g(\ln x))' = e^{g(\ln x)} g'(\ln x)\frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\varphi'(1) = e^{g(0)} g'(0).$$

Derivando φ', temos

$$\varphi''(x) = e^{g(\ln x)}\frac{1}{x^2}\left(\left(g'(\ln x)\right)^2 - g'(\ln x) + g''(\ln x)\right).$$

Logo,

$$\varphi''(e) = e^{g(1)-2}\left(\left(g'(1)\right)^2 - g'(1) + g''(1)\right).$$

6. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

   RESOLUÇÃO

   Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f, g são diferenciáveis em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x)\\ &= g'(x^4e^{-x})(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x})\\ &= g'(x^4e^{-x})x^3e^{-x}(4-x).\end{aligned}$$

7. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por

$$g(x) = \text{arcos}\left(f(x)\right).$$

   a) Justifique que g é injectiva e, sendo g^{-1} a função inversa de g, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não é limitada.

   RESOLUÇÃO

   a) Uma vez que arcos é diferenciável em $]-1,1[$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}$ com contra-domínio $]-1,1[$, a função composta será também diferenciável em $\mathbb{R}$. Por outro lado, f é bijectiva, logo injectiva, e arcos é também injectiva. Conclui-se que a composta será uma função injectiva.
   Temos

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}.$$

   Logo $g'(2) = -\frac{f'(2)}{\sqrt{1-f(2)^2}} = -2$.
   Do Teorema de derivação da função inversa, temos agora que

$$(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

   Como $g(2) = \text{arcos}(f(2)) = \text{arcos}(0) = \frac{\pi}{2}$, temos $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, ou seja $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2}$.

b) O domínio de g^{-1} é dado pelo contradomínio de g. Como f é sobrejectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ e

$$D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \arccos(]-1,1[) =]0,\pi[.$$

Uma vez que g^{-1} é injectiva e contínua, será monótona, e portanto

$$g^{-1}(0^+) < g^{-1}(x) < g^{-1}(\pi^-)$$

e g^{-1} não terá máximo nem mínimo. Aliás, o contradomínio de g^{-1} é o domínio de g, ou seja, $\mathbb{R}$, e assim g^{-1} não é limitada.

Teoremas de Rolle e Lagrange

8. Mostre que a equação $x^5 + 5x = 5$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.
RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = x^5 + 5x - 5$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = 5(x^4 + 1) > 0$, em $\mathbb{R}$, logo f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e existirá no máximo uma solução da equação acima (ou Teorema de Rolle: se f tivesse dois zeros, então f' teria pelo menos um, como não é esse o caso, f tem no máximo um zero).

Por outro lado, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, logo como f é contínua, conclui-se do Teorema do Valor Intermédio / Bolzano, que f tem pelo menos um zero (aliás $CD_f = \mathbb{R}$).

9. Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções em $\mathbb{R}$.
RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

- f tem pelo menos 3 zeros: Teo. Valor Intermédio (Bolzano) Uma vez que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -1$$

conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que f tem um zero em $]-\infty, 0[$. Por outro lado,

$$f(1) = 3 - e > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

logo, de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]0,1[$ e também terá um zero em $]1,+\infty[$. Conclui-se que f tem pelo menos 3 zeros.

- f tem no máximo 3 zeros: Teo. Rolle
Para vermos que não pode ter mais do que 3 zeros, calculamos as suas derivadas:

$$f'(x) = 6x - e^x, \quad f''(x) = 6 - e^x.$$

Como e^x é injectiva, f'' tem um único zero. Logo, do Teorema de Rolle, f terá no máximo três zeros.

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, mas a derivada de f não se anula em $[-1, 1]$. Justique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

RESOLUÇÃO

É claro que $f(-1) = f(1) = 0$ e que para $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \neq 0$. Não contraria o Teorema de Rolle dado que f não é diferenciável em todos os pontos de $]-1, 1[$ (não é diferenciável em 0).

11. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

RESOLUÇÃO

Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos sse a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle aplicado a g e a g', g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g''(x) = f''(x).$$

Logo f'' tem pelo menos um zero.

12. Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a restrição da função f ao intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ tem necessariamente um máximo.

b) A função f é necessariamente limitada.

c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

RESOLUÇÃO

a) Verdadeira, uma vez que f sendo diferenciável em $]0, 1[$ será também contínua em qualquer intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Weierstrass tem máximo e mínimo no intervalo fechado $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

b) Falsa: por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ verifica $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ e f não é limitada (justifique!).

c) Verdadeira: para $n \geq 2$, f é contínua em $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e diferenciável em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, com $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Logo, do Teorema de Rolle, f' tem um zero em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

13. Use o Teorema de Lagrange num intervalo adequado para provar a seguinte relação:

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \qquad \text{para } x > 1.$$

RESOLUÇÃO

Aplicando o Teorema Lagrange a $\ln x$ em $[1, x]$, temos $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{c_x}$, $\quad 1 < c_x < x$. De $1 < c_x < x$ vem que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{c_x} < 1$, logo (uma vez que $x - 1 > 0$),

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1.$$

14. Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

RESOLUÇÃO

Se $f(n) = (-1)^n$, então $f(n+1) - f(n) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$. Agora, como f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $[n, n+1]$ e diferenciável em $]n, n+1[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Lagrange temos então que existe $c_n \in]n, n+1[$ tal que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \Leftrightarrow f'(c_n) = 2(-1)^{n+1}$$

e concluimos que $f'(c_n)$ é uma sucessão divergente (tem dois sublimites, -2 e 2). Como $n < c_n < n + 1$, temos que $c_n \to +\infty$, logo f' não tem limite no infinito (se tivesse, $f'(c_n)$ seria convergente).

15. a) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ então $L = 0$.

b) Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que h tem uma assíntota à direita em $y = mx + b$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = L$ então $L = m$.

RESOLUÇÃO

a) Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, x+1]$, temos $f(x+1)-f(x) = f'(c_x)$, em que $x < c_x < x+1$. Fazendo $x \to +\infty$, temos $c_x \to +\infty$, logo dado que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = b - b = 0.$$

b) Aplicar a) à função $f(x) = h(x) - mx$.

16. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.
(Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

RESOLUÇÃO

A função g será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto será crescente em $\mathbb{R}^+$ se $g'(x) \geq 0$ para $x > 0$. Temos, para $x > 0$,

$$g'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; xf'(x) \geq f(x) \;\Leftrightarrow\; f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}.$$

Para provar esta desigualdade, aplicamos o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$. Temos que, como $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$$

para algum $c \in]0, x[$. Como f' é crescente, $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$.

17. Supondo que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), [1] mostre que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \qquad \text{para quaisquer } x, y \in [a, b].$$

RESOLUÇÃO

Sejam $x, y \in [a, b]$, com $x < y$, por ex. Aplicando o teorema de Lagrange no intervalo $[x, y]$, temos $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$, para algum $c \in]x, y[$. Como f' é contínua em $]a, b[$ e tem limites laterais em a e b, é limitada em $[a, b]$, logo

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \leq C \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

[1] Diz-se que f é de classe C^1 em $[a, b]$ sse f é contínua em $[a, b]$, f' é contínua em $]a, b[$ e existem $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ (i.e., f' é prolongável por continuidade a $[a, b]$).

Regra de Cauchy

18. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+e^x)}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{x^4}$,

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x \cdot \ln\ln x)$,

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$,

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$,

m) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\left(1-\cos\dfrac{1}{1-x}\right)$,

n) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)^2\left(1-\cos\dfrac{1}{1-x}\right)$,

o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$,

p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \operatorname{sen}\sqrt{x}$,

NOTA: Nas resoluções seguintes, quando escrevemos a igualdade

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{RC}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

estamos a assumir como verificado que o limite apresentado no segundo membro existe em $\overline{\mathbb{R}}$ (mesmo que não seja explicitamente referido). Se $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, então a Regra de Cauchy não é aplicável.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy (uma vez que se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \ln a\cdot a^x - \ln b\cdot b^x = \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}.$$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de Cauchy (duas vezes - uma vez que temos de novo uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+e^x} = 1.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$, é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de Cauchy (uma vez que se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1.$$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{x^4}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y = x^2$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{x^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\arctan(y)}{y^2} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{2y} = +\infty.$$

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\arctan \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y = 1/x$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{\operatorname{sen} y} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{\cos y} = 1.$$

f) $\lim_{x\to 1}(\ln x \cdot \ln\ln x)$ é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 1} \ln x \cdot \ln\ln x = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to 1} -\ln x = 0.$$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

(Nota: a Regra de Cauchy aplicada directamente a $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ não simplifica a questão...)

h) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} e^{-1/x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty.$

(Note que a Regra de Cauchy *não* é aplicável!)

i) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$

(Note que não existe $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'}$ logo a Regra de Cauchy não é aplicável.)

j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy (três vezes - uma vez que obtemos indeterminações $\frac{0}{0}$ e o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3} \overset{RC}{=} \ldots \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x}{6} = \frac{1}{3}.$$

k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (duas vezes - uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{2x} = \overset{RC}{=} lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{2} = +\infty.$$

l) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} 2^x = 0 \cdot 0 = 0.$

m) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{1-x}\right) = 0$, por enquadramento, já que $(x-1)^2 \to 0$, e $0 < 1 - \cos \frac{1}{1-x} < 2$, logo

$$0 < (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right) < 2(x-1)^2.$$

(A Regra de Cauchy *não* é aplicável.)

n) $\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{1-x}\right)$, é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos, fazendo $y = \dfrac{1}{1-x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} = \frac{1}{2}.$$

o) $\lim_{x\to+\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos, fazendo $y = \dfrac{1}{x}$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^+} -\ln y \operatorname{sen} y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y}{-\frac{1}{\operatorname{sen} y}}$$

$$\overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y \cos y} = 0$$

já que $\lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ (ou RC mais uma vez).

19. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

RESOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln\left(x^{\ln\ln x}\right)} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln\ln x \ln x} = e^{\lim_{x\to 1^+}\ln\ln x\ln x}.$$

Vimos no exercício anterior 11.f), $\lim_{x\to 1^+} \ln(\ln x)\ln(x) = 0$ logo

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x} = e^0 = 1.$$

(b) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x-1}\ln x}.$$

Agora, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-1}\ln x = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x-1} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

(c) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x}.$$

Temos que $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x = 0.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

(d) $\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln\ln x}.$$

Agora $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln\ln x = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\ln x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e temos

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\ln x}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x\ln x} = 0$$

logo $\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

já que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = e^{-1}$$

já que, fazendo $y = 1/x$, e pela Regra de Cauchy (já que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} y)}{-\ln y} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}}{-\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-y\,\cos y}{\operatorname{sen} y} = -1.$$

20. Calcule $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$).

RESOLUÇÃO

21. $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos que

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x}.$$

Vamos calcular $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x$, que é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Escrevendo $\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e podemos usar a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &\overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

Pela definição de limite, como $\frac{1}{n} \to 0$, temos agora

$$\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}} = 1.$$

22. Prove por indução matemática que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, se tem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0.$$

RESOLUÇÃO

Para $p = 1$, aplicando a Regra de Cauchy, temos $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Assumindo por hipótese de indução que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$ para um dado $p \in \mathbb{N}$, usamos de novo a Regra de Cauchy para calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)x^p}{e^x} = (p+1)\cdot 0 = 0.$$

Estudo de funções

23. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

d) Estude f quanto a monotonia e extremos.

e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e determine o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO

a) f é diferenciável no ponto 1 uma vez que é dada, numa vizinhança de 1, pela função $\arctan \frac{1}{x}$ que é diferenciável no seu domínio (por ser a composta de uma função trigonométrica inversa com uma função racional). Temos

$$\left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1},$$

logo $f'(1) = -\frac{1}{2}$. A tangente ao gráfico no ponto 1 é a recta

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}.$$

b) Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

resulta que f é contínua em 0 se e só se $a = \frac{\pi}{2}$.

Quanto à diferenciabilidade,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx}{x} = b$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}.$$

Como se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, tentemos usar a regra de Cauchy. Assim, como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} = -\frac{1}{x^2+1} = -1,$$

deduz-se que $f'_d(0) = -1$ e que f é diferenciável em 0 sse $a = \frac{\pi}{2}$ e $b = -1$.

c) Se $a < 0$, então numa vizinhança de a f é dada pela função polinomial $\frac{\pi}{2} - x$, que é diferenciável. Logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$.

Se $a > 0$, então numa vizinhança de a, f é dada pela função $\arctan\frac{1}{x}$, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Concluimos que f é diferenciável em a se $a > 0$ e, portanto, f é diferenciável em $]0, +\infty[$.

Como para $a < 0$, $f'(a) = b = -1$, temos

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para ver se f é de classe C^1, ou seja, se f' é contínua: temos que f' é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (justifique). No ponto 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2+1} = -1 = f'(0).$$

Logo f' é contínua em 0 e portanto é de classe C^1.

d) f é decrescente em $\mathbb{R}$, já que $f'(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$, não tem extremos.

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x} = \arctan(0) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\pi}{2} - x = +\infty$. O contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (justifique).

24. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \arctan\left(e^x + e^{-x} - 1\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$.

b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.

d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

e) Determine o contradomínio de g.

RESOLUÇÃO

a) Se g tem derivada finita em 0, será contínua em 0, logo $g(0) = g(0^+) = g(0^-)$, ou seja,

$$g(0) = 1 + \beta = \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(e^x + e^{-x} - 1\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

logo $\beta = \frac{\pi}{4} - 1$. Por outro lado, g é diferenciável em 0 logo $g'_e(0) = g'_d(0)$ e temos

$$g'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + \alpha x + \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} + \alpha = \alpha + 1,$$

$$g'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(e^x + e^{-x} - 1\right) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \left(e^x + e^{-x} - 1\right)^2} = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy na indeterminação $\frac{0}{0}$) logo $\alpha = -1$.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - x + \frac{\pi}{4} - 1 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(e^x + e^{-x} - 1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

c) g é diferenciável em $\mathbb{R}$ (justifique) e

$$g'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

d) Temos para $x \leq 0$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ para qualquer $x < 0$ e $g'(0) = 0$. Logo g é decrescente em $]-\infty, 0]$.

Para $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Logo g é crescente em $]0, +\infty[$. Conclui-se que 0 é um ponto de mínimo absoluto, usando a continuidade de g em 0.

e) Da alínea anterior temos que $g(0) = \frac{\pi}{4}$ é um mínimo absoluto, logo $g(x) \geq \frac{\pi}{4}$ para qualquer x e $CD_g = g(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$. Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ e g é contínua em $]-\infty, 0]$. Conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[\subset g(\mathbb{R})$.

Logo o contradomínio de g é $CD_g = \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$.

25. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{-\frac{x^2}{2}})$ é uma indeterminação do tipo $(-\infty)\cdot 0$. Escrevendo $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, a que podemos tentar aplicar a Regra de Cauchy. Como,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

podemos concluir que,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Como a função é par, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) A função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis, sendo portanto diferenciável. Para $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -e^{-\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Logo, $f'_d(0) \neq f'_e(0)$ e f não é diferenciável em 0. Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e neste caso

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Usamos a alínea anterior.

Para $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

logo f é crescente em $[0,1]$ e decrescente em $[1,+\infty[$.

Para $x < 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \ \vee \ x > 1) \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x < -1$$
$$f'(-1) = 0$$

logo f é crescente em $]-\infty,-1]$ e decrescente em $[-1,0]$.

Conclui-se que 1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. Como f é decrescente em $[-1,0]$ e crescente em $[0,1]$, temos também que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

d) Temos da alínea anterior que f tem um máximo absoluto em 1, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ e um mínimo absoluto em 0 com $f(0) = 0$, logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Como f é contínua em $[0,1]$, temos também, do Teorema do Valor Intermédio, que $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

26. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{x-1})$ é uma indeterminação do tipo $(-\infty)\cdot 0$. Escrevendo $-xe^{x-1} = \frac{-x}{e^{1-x}}$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ à qual podemos tentar aplicar a Regra de Cauchy. Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{(e^{1-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = 0.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0,$$

em que a penúltima igualdade é justificada a posteriori pela existência do último limite (relembre as condições de aplicação da regra de Cauchy).

b) A função é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ por ser dada nesse conjunto pelo produto de duas funções diferenciáveis: $|x|$ diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $e^{-|x-1|}$ diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (por ser a composta de duas funções: exponencial diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x-1|$ diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$). Em $x=1$:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x|e^{-|x-1|}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{xe^{-x+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} e^{-x+1}(1-x) = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$, tendo em conta a existência do último limite) e da mesma forma,

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x|e^{-|x-1|}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{xe^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} e^{x-1}(1+x) = 2.$$

Logo, $f'_d(1) = 0 \neq f'_e(1) = 2$ e f não é diferenciável em 1.
No ponto 0, pode ver-se (justifique) que $f'_d(0) = e^{-1} \neq f'_e(0) = -e^{-1}$, logo f não é diferenciável em 0, e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (xe^{-x+1})' = e^{-x+1}(1-x), & \text{se } x>1, \\ (xe^{x-1})' = e^{x-1}(1+x), & \text{se } 0<x<1, \\ (-xe^{x-1})' = -e^{x-1}(1+x), & \text{se } x<0. \end{cases}$$

c) Temos (justifique): $f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, estudando o sinal de f' e usando a continuidade de f,

- f crescente em $]-\infty,-1]$ e em $[0,1]$,
- f decrescente em $[-1,0]$ e em $[1,+\infty[$.

Logo, -1 é ponto de máximo, 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como $f(0)=0$ e $f(x)>0$ para $x\neq 0$, 0 é mínimo absoluto. Por outro lado, $f(1)=1$ e $f(-1)=e^{-2}<1$, logo 1 é ponto de máximo absoluto, e consequentemente, -1 é ponto de máximo relativo.

d) Da alínea anterior, temos que $0=f(0)$ é mínimo absoluto de f e $1=f(1)$ é máximo absoluto de f. Logo $f(\mathbb{R})\subset[0,1]$. Como f é contínua em $[0,1]$, do Teorema do Valor Intermédio, $[0,1]\subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $CD_f = f(\mathbb{R}) = [0,1]$.

27. Seja g uma função diferenciável tal que $g(0)=g'(0)=0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2\tan(g(x)) - g(x).$$

Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

RESOLUÇÃO:

Do teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}(\varphi(x))' &= (2\tan(g(x)) - g(x))' \\ &= (2 + 2\tan^2(g(x)))g'(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(2\tan^2(g(x)) + 1).\end{aligned}$$

Logo $\varphi'(0) = 0$. Como $g'(0) = 0$ e g' é estritamente monótona, temos que g' muda de sinal numa vizinhança de 0 (se g' é crescente, $g'(x) < g'(0) = 0$, para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$) e portanto, como $2\tan^2(g(x)) + 1 > 0$ para qualquer x, φ' também muda de sinal numa vizinhança de 0. Como φ é contínua em 0 - já que g é contínua por ser diferenciável, e tan é contínua em $g(0) = 0$ - conclui-se que $\varphi(0)$ é extremo de φ (mínimo, se g' for crescente).

28. Determine os extremos da função $f(x) = \arctan(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função.

RESOLUÇÃO

Temos

$$f'(x) = (\arctan x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}, \qquad f''(x) = (\frac{2x}{1+x^4})' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

Sendo 0 o único ponto crítico de f, ou seja solução de $f'(x) = 0$, e como $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ temos que f é crescente em $]0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$, logo 0 é ponto de mínimo (ou a segunda derivada $f''(0) = 1 > 0$)

Atendendo a que $f(0) = 0$ e f é não negativa, 0 é um mínimo absoluto.

Os pontos de inflexão de f são as soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, uma vez que f'' muda de sinal nestes pontos.

29. Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

RESOLUÇÃO:

Dado que $f \in C^2(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (x^4 e^{-x})' = x^3\, e^{-x}\,(4-x)\,, \qquad f''(x) = x^2\, e^{-x}\,(12 - 8x + x^2)\,,$$

- Monotonia e extremos:
  Os pontos críticos de f, i.e. as solução de $f'(x)=0$, são 0 e 4. Temos

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0,4[,$$

  (justifique) logo a função é estritamente crescente no intervalo $]0,4[$ e estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty,0[$ e $]4,+\infty[$. Conclui-se que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0)=0$ e $f(x)\geq 0$, $\forall x$, ou vendo que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0,$$

  e 4 é um ponto de máximo, relativo uma vez que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4\, e^{-x} = +\infty.$$

- Concavidade e inflexões:
  Temos

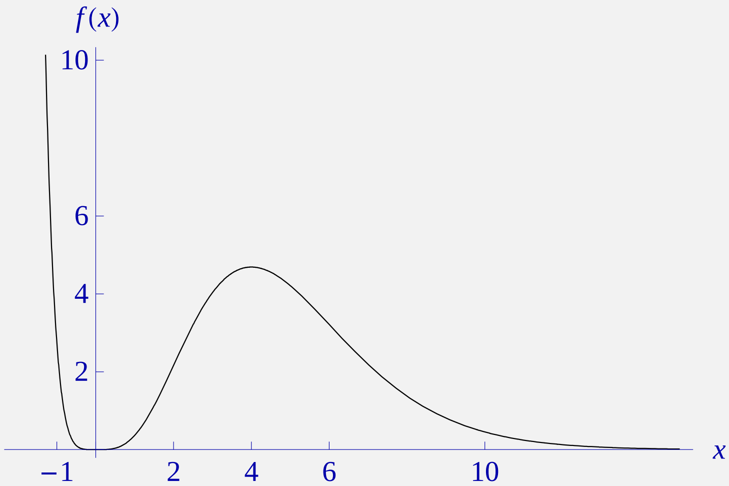
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x = 2 \vee x > 6.$$

  Logo f tem concavidade para cima em $]-\infty,2[$ e em $]6,+\infty[$, e virada para baixo em $]2,6[$ (notem que $f''(0)=0$ mas 0 não é ponto de inflexão dado que f'' não muda de sinal em 0).
- Assíntotas:
  Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $y=0$ é assíntota horizontal à direita. Não há assíntota oblíqua à esquerda já que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3\, e^{-x} = +\infty.$$

  (Não há assíntotas verticais, já que f é contínua em $\mathbb{R}$.)

O gráfico de f pode agora ser esboçado:



Polinómio de Taylor

1. Seja f uma função de classe $C^4(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio de Taylor de grau 4 em a é dado por:

   a) $p_{4,0}(x) = 1 + x^4, \ , a = 0,$

   b) $p_{4,0}(x) = -1 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}, \ a = 0,$

   c) $p_{4,-1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3, \ (n = 4, a = -1),$

   Em cada caso, determine $f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e decida se f tem um ponto de extremo local em a, classificando-o.

   Temos $p_{4,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dfrac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x - a)^4.$

   a) Por comparação de coeficientes com a expressão geral de $p_{4,0}(x)$:
   $f^{(0)}(0) = f(0) = 1, \ f^{(k)}(0) = 0, \ k = 1, 2, 3, \ f^{(4)}(0) = 4! > 0$
   Tem um mínimo em $a = 0$, dado que a primeira derivada não nula é de ordem par e positiva.

   b) Por comparação de coeficientes com a expressão geral de $p_{4,0}(x)$:
   $f^{(0)}(0) = f(0) = -1, \ f^{(k)}(0) = 0, \ k = 1, 2, \ f^{(3)}(0) = 2, \ f^{(4)}(0) = 3!$
   Não tem extremo em a, a primeira derivada não nula é de ordem ímpar.

   c) Temos $p_{4,-1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 = (x + 1)^3 - x = (x + 1)^3 - (x + 1) + 1$. Logo, por comparação de coeficientes,
   $f(-1) = 1, \ f'(-1) = -1, \ f^{(k)}(-1) = 0, \ k = 2, 4, \ f^{(3)}(-1) = 6.$
   (Alternativamente, calcular as derivadas de $p_{4,-1}$ em -1 e usar que $p^{(k)}_{4,-1}(-1) = f^{(k)}(-1)$.)
   Não tem extremo em a, a primeira derivada não nula é de ordem ímpar.

2. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x - 1)^2$, determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ de g.

   Sendo a exponencial uma função indefinidamente diferenciável, em $\mathbb{R}$, temos que g é uma função 3 vezes diferenciável e de classe C^2 em $\mathbb{R}$, com

   $$g(x) = f(e^x), \qquad g'(x) = f'(e^x)\, e^x, \qquad g''(x) = f'\,(e^x)\, e^x + f''(e^x)\, e^{2x}.$$

   Atendendo ao polinómio de Taylor de f, de ordem 2, relativo ao ponto 1 obtemos $f(1) = 2, \ f'(1) = -1, \ f''(1) = 4$, em particular temos

   $$g(0) = f(1) = 2, \qquad g'(0) = f'(1) = -1, \qquad g''(0) = f'\,(1) + f''(1) = 3.$$

Logo,

$$p_2(x) = g(0) + g'(0)\,x + \frac{g''(0)}{2}\,x^2 = 2 - x + \frac{3}{2}\,x^2$$

é o polinómio de Taylor em $a = 0$ de g, de ordem 2.

3. Prove, usando a fórmula de Taylor em $a = 0$ com resto de Lagrange, que se tem

a) $\left| e^{-x} - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right) \right| \leq \dfrac{1}{6}, \quad$ para $x \in [0, 1]$.

b) $\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \right| \leq 0.01, \quad$ para $x \in [0, 1]$.

a) Escrevemos a fórmula de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ da função $f(x) = e^{-x}$ com resto de Lagrange:

$$e^{-x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + r_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + r_2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

em que $r_2(x) = \dfrac{f'''(c)}{3!}x^3 = -\frac{e^{-c}}{3!}\,x^3$, com c entre 0 e x. Então, para $x \in [0, 1]$, temos

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| = |\,r_2(x)| = \frac{e^{-c}}{3!}\,|x|^3 \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

b) Escrevemos a fórmula de Taylor de ordem 4 em $a = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$ com resto de Lagrange : temos $f^{(4)}(0) = f^{(2)}(0) = f(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f'(0) = 1$, logo

$$\operatorname{sen} x = p_4(x) + r_4(x), \quad \text{em que} \quad p_4(x) = p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

e $r_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(c)}{5!}x^3 = \frac{\cos(c)}{5!}\,x^5$, com c entre 0 e x. Temos então que, para $x \in [0, 1]$,

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \right| = |\,r_4(x)| = \frac{|\cos(c)|}{5!}\,|x|^5 \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 0.01.$$

4. Determine $e^{0.1}$ com erro inferior a 10^{-4}, sem usar a calculadora.

Escrevendo a fórmula de Taylor para e^x em $a = 0$, com resto de Lagrange, temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_{n+1}(x)$$

em que $r_{n+1}(x) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}\,x^{n+1}$, com c entre 0 e x. Para estimar o erro em $x = 0.1$, temos

$$|r_{n+1}(0.1)| = \frac{e^c}{(n+1)!}\,10^{-n-1} < \frac{2}{(n+1)!}\,10^{-n-1},$$

para algum c entre 0 e 0.1, logo $e^c < 2$.

Tomando $n = 3$, temos

$$|r_4(0.1)| = \frac{e^c}{4!}\,10^{-4} < 10^{-4}$$

(já que $\frac{e^c}{4!} < 1$). Logo, o polinómio de Taylor de ordem 3 aproxima $e^{0.1}$ com erro inferior 10^{-4}, ou seja, (um)a aproximação pedida é

$$p_3(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} = 1.105 + \frac{5}{3} \times 10^{-4} = 1.1051(6).$$

5. Prove, recorrendo á fómula de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

então f é um polinómio em x de grau menor do que n.

Nas condições dadas, $f \in C^n(\mathbb{R})$. A fórmula de Taylor em $a = 0$ de f, de ordem $n-1$ é dada por

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + r_{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo $f^{(n)}(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a fórmula do resto de Lagrange permite concluir que

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = 0, \qquad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

em particular conclui-se que $f(x)$ coincidirá com $p_{n-1}(x)$ em $\mathbb{R}$ e, assim que f é um polinómio de grau menor que n.