DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 2.Limites e continuidade. Soluções

1. a) Estritamente decrescente, minorada por zero e não é majorada.
   b) Limitada entre 0 e 1, par e não é monótona.
   c) Limitada entre 0 e 1, estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.
   d) Se $a \neq 1$ não é majorada e é minorada por 0, se $a > 1$ é estritamente crescente, e se $a < 1$, estritamente decrescente. Se $a = 1$ é constante (logo é crescente e decrescente).
   e) Não é majorada nem minorada, não é monótona e é par.

2. Sugestão: Pode definir f por ramos.

3. Não.

4. a) $]-2, 2[$
   b) $[0, 1[$
   c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$
   d) $x \leq -1 \vee x \geq 1$
   e) $\cos(1) < x \leq 1$

5. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$, $\arccos(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\frac{9\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$,
   Note que $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha) = \alpha$ se e só se $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6}$.

6. Explore a fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

7. Use a definição das funções hiperbólicas.

8. Resolva x em função de y, establecendo uma eq. de 2º grau em ordem a e^x; ou alternativamente exprima e^x como função das funções hiperbólicas e use a igualdade $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

9. a)0 b)$-\infty$ c)0 d) 2, note que $\operatorname{sen}^2(y) = 1 - \cos^2(y)$, $\forall y$ e) -3, f)0 g) Não existe, pois os limites laterais são distintos. Note que $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$, $\forall \alpha$, h)-1, i)0.

10. a) De forma a garantir que h é contínua em $x = \frac{3\pi}{4}$, pela continuidade da composição de funções, é suficiente que f seja contínua em $-1 = \tan\frac{3\pi}{4}$.
    b) Escolha-se uma função f com limites laterais distintos em -1.

11. a)$+\infty$ b) Não existe. c) 1 d) 1 e) $+\infty$, note que $1 + \operatorname{senh}^2(x) = \cosh^2(x)$, $\forall x$
    f) $\frac{1}{2}$ g) 0 h) $\frac{1}{2}$ i) 0

12. Em $x = 0$ usar a definição de continuidade ou o princípio das funcões enquadradas para estabelecer a existência de limite nesse ponto. Em $x \neq 0$ verificar que os limites relativos aos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são distintos.

13. a)Verifique que para cada $\varepsilon > 0$ fixo se pode escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ ou $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ satisfazendo a condição da def. de limite.
    b) Verifique que para cada $\varepsilon > 0$ fixo se pode escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ou $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ satisfazendo a condição da def. de limite.
    c) Verifique que para cada $L > 0$ fixo e escolhendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{L}}$ ou $\delta < \frac{1}{\sqrt{L}}$ a condição $|x| < \delta \implies |\frac{1}{x^2}| > L$ é satisfeita.
    d) Verifique que para cada $\epsilon > 0$ fixo e escolhendo $L = \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ ou $L > \ln(\frac{1}{\varepsilon})$ a condição $|x| > L \implies |e^{-x}| < \varepsilon$ é satisfeita.

Prolongamento por continuidade,Teorema de Bolzano, Teorema de Weierstrass

14. a) F. Dê um contraexemplo.
    b) V. (Use o prolongamento por continuidade e Teorema de Weierstrass)
    c) V. (Use o Teorema de Bolzano)
    d) F. (Não sendo f contínua, f pode não ter máximo. Dê um contraexemplo.)

15. a) $K = \frac{\pi}{2}$ (justifique)
    b) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (justifique)
    c) $f(\mathbb{R}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sup(f) = \text{máx}(f) = \frac{\pi}{2}$, $\inf(f) = \min(f) = -\frac{\pi}{2}$.
    d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe.

16. a) Verifique que o domínio de h é $[0, 1]$ e que se pode aplicar o Teorema de Weierstrass à função h.
    b) Não (justifique). Também pode considerar o exemplo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ se $x > 0$ e $f(0) = 0$ e verificar que h não tem máximo.

17. $\text{máx}(g) = 1$. Não se pode garantir que g tenha um mínimo global (por exemplo se $f(x) = x$).

18. g é prolongável por continuidade ao ponto 1 porque $\lim_{x\to1} \text{arctg}\frac{1}{|x-1|} = \frac{\pi}{2}$.
    $G(\mathbb{R}) = \arctan(\mathbb{R}^+) \cup G(1) =]0, \frac{\pi}{2}[\cup \{\frac{\pi}{2}\} =]0, \frac{\pi}{2}]$.

19. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
    b) $K = 1$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x)$ se $x \neq 0$ e $F(0) = 0$ é a função prolongamento por continuidade de f ao ponto zero.
    c) Sim. A função F, tem pelo Teo. de Weierstrass um mínimo em $[-a, a]$ e como $F(0)$ não é esse mínimo, pois $F(x) < 0$ se $x < 0$, então o mínimo de F em $[-a, a]$ é igual ao mínimo de f em $[-a, a] \setminus \{0\}$.
    d) $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^+) \cup f(\mathbb{R}^-) =]-\infty, 0[\cup]0, 2[$.

20. (a) Verifique que pode aplicar o Teorema de Bolzano à função $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$ nos intervalos $[-\pi, 0]$e $[0, \pi]$.
(b) Verifique que o se o grau do polinómio é ímpar $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \mp\infty$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que α é um valor entre $p(a)$ e $p(b)$, e aplique o Teorema de Bolzano.

21. Considere a função $h(x) = f(x) - x$ e use o Teorema de Bolzano.