DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
LEIC-T, LEE, LETI, LEGI 1.º Semestre 2024/25

Capítulo 2.Limites e continuidade

*Exercícios recomendados para as aulas práticas da terceira semana (de 23 a 27 de setembro) terão o símbolo *.*

1. Determine se as seguintes funções são limitadas/majoradas/minoradas, e monótonas (crescentes ou decrescentes), indicando, se for o caso, se são pares ou ímpares nos domínios dados, e esboce os seus gráficos:

$$\text{a)}\frac{1}{x} \quad ,x>0 \quad \text{b)}\frac{1}{1+|x|} \ \text{c)}2^{-x},\ x>0 \quad \text{d)}a^x,\ a>0 \quad \text{e)}x^2\cos(x)$$

2. Dê um exemplo de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ímpar, crescente em $[0,1]$ e com contradomínio $[-2,-1[\cup\{0\}\cup]1,2]$

3. Existe alguma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, estritamente crescente cujo contradomínio seja $[0,1]$? Justifique.

4. Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{a)}^*\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{b)}\ln\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right) \ \text{c)}\frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \quad \text{d)}^*\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e)}^*\ln\left(1-\arccos x\right)$$

5. *Calcule $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arctan(\tan(-\frac{\pi}{4}))$, $\arccos(\frac{-\sqrt{3}}{2})$, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\frac{9\pi}{4}))$, $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))$

6. Mostre que, $\forall x\in]-1,1[$ se tem:

   (a) $\cos(\operatorname{arcsen}(x))=\sqrt{1-x^2}$

   (b) $\tan(\operatorname{arcsen} x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Considere as funções seno hiperbólico $\operatorname{senh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, e coseno hiperbólico $\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

   Mostre que, para qualquer $x\in\mathbb{R}$

   (a) $\operatorname{senh}(-x)=-\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(-x)=\cosh(x)$

   (b) $^*\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1$

(c) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$
(d) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$
(e) $\operatorname{senh}(0) = 0 \ \cosh(0) = 1$

8. As funções inversas de senh e da restrição de cosh a $[0, +\infty[$ designam-se, respectivamente por argsenh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e argcosh : $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Deduza que:

$$\operatorname{argsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

9. Calcule, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim_{x\to 0^+} \pi \arccos(1-x)$ b)* $\lim_{x\to 0^+} \ln(\ln(1+x))$ c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen}(x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d)* $\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{sen}^2(\arccos x)}{1+x}$

e)* $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$ f)* $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$ g) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arctan(x)+\pi)}{x^2}$ h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ i) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h(x) = f(\tan x)$.

(a) Em que ponto f terá de ser contínua para garantir que h é contínua em $x = \frac{3\pi}{4}$. Justifique.
(b) Dê um exemplo de uma função f de forma que h não é contínua em $x = \frac{3\pi}{4}$. Justifique.

11. Calcule, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim_{x\to 0} \cosh\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$ c)* $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$ d)* $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$ e)* $\lim_{x\to -\infty} \frac{1+\operatorname{senh}^2(x)}{\cosh(x)}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ g) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})}{2x}$ i) $\lim_{x\to +\infty} e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)$

12. *Seja $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, i.e. $d(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = xd(x)$$

é contínua em $x = 0$ e descontínua em todos os outros pontos.

13. *Prove , usando a definição de limite, que:

a) $\lim_{x\to 3} 3x+1 = 10$ b) $\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{sen} x = 0$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ d) $\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$

Prolongamento por continuidade, Teorema de Bolzano, Teorema de Weierstrass

*Exercícios recomendados para as aulas práticas da quarta semana (de 30 de setembro a 4 de outubro) terão o símbolo **.*

14. **Decida, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

    (a) Se uma função é estritamente decrescente então não é limitada.

    (b) Se $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e f tem limite real quando $x \to 1$ então f é limitada em $[0, 2] \setminus \{1\}$.

    (c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(-2)f(2) < 0$ então a equação $e^{f(x)} - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-2, 2]$.

    (d) Toda a função limitada no intervalo $[0, 1]$ tem máximo nesse intervalo.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1 \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1 \\ K \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x), & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

    (a) Determine K.

    (b) Estude f do ponto de vista da continuidade.

    (c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

    (d) Quais são os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, caso existam?

16. Seja $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio e $h(x) = g(x - x^2)$.

    (a) Mostre que h tem máximo e mínimo no seu domínio

    (b) Se na alínea anterior considerassemos g definida em $[0, +\infty[$ e contínua apenas em $]0, +\infty[$, poderiamos continuar a garantir a existência de máximo e mínimo para h?

17. **Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$. Justifique que a funcão

$$g(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)}$$

tem um máximo global e calcule o valor desse máximo. Pode garantir a existência de um mínimo global? Justifique.

18. **Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x-1|}.$$

Verifique que g é prolongável por continuidade ao ponto 1. Sendo $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine o contradomínio

19. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi}{2+x^2}\right), & \text{se } x > 0 \\ k - \cosh(2x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde k é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante k para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero e defina a função prolongamento.

(c) Seja $k = 1$. Podemos garantir que f tem um mínimo no conjunto da forma $[-a, a] \setminus \{0\}$ com $a > 0$. Justifique

(d) Indique o contradomínio de f.

20. Mostre que

(a) **A equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tem pelo menos duas solucões em $\mathbb{R}$.

(b) Qualquer função polinomial de grau ímpar tem contradomínio $\mathbb{R}$.

21. **Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 1]$, tal que $0 \le f(x) \le 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Prove que f tem pelo menos um ponto fixo, ou seja, que existe um ponto $c \in [0, 1]$ com $f(c) = c$.

22. Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

Mostre que f tem pelo menos um ponto fixo, ou seja, que existe um ponto $c \in [0, 1]$ com $f(c) = c$.

23. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Mostre que f tem máximo em $[0, +\infty[$.