(**** Resolução do teste 1 de 1 de Julho ***)

(** Pergunta 1 **)

```
f[x_] := 1 / ((1 - x) * x) - 1 / (x * (1 + x))
```

(* Para calcular f(x), segundo a fórmula dada,
são necessários 7 passos: 1. y1= 1-x; 2. y2= x* y1 ;
3. y3= 1/y2; 4. y4= 1+x 5. y5= x * y4 . 6. y6= 1/y5 7. y7= y3-y6.
Seja x =10^(-20)= 0.1*10^(-19), então y1= 1, y2=0.1*10^(-19)*y1,
y3 =10^(20) . Ocorre overflow, porque y3 não é representável neste sistema.
Seja x =10^(-10)= 0.1*10^(-9) . Nesse caso ,
y1=fl(1-x)= 1; y2= x y1= 0.1*10^(-9); y3= 1/y2= 0.1*10^(11);
y4=fl(1+x) = 1. y5= x * y4= 0.1*10^(-9); y6= 1/y5 = 0.1*10^(11);
y7= y3-y6= 0.Obtém-se y(x)=0 , porque se dá cancelamento subtractivo. Note
-se que se devia obter um valor próximo de 2,
porque o limite de f(x) , quando x tende para 0, é 2.

Algoritmo alternativo

```
Simplify[f[x]]
```

$$-\frac{2}{-1+x^2}$$

Utilizando a nova fórmula,
são necessários apenas 3 passos : z1 = x^2; z2 = 1 - z1; z3 = 2 / z2.

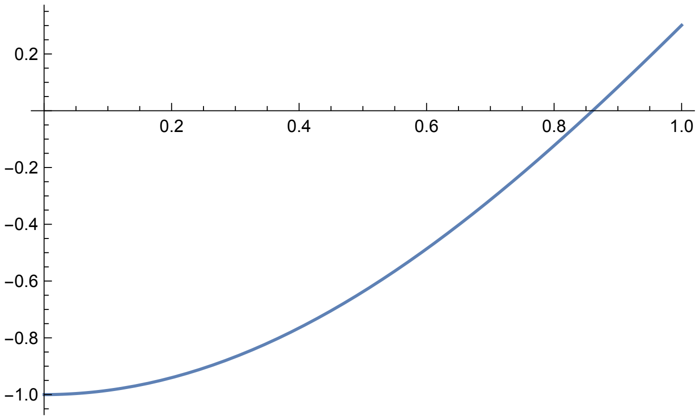
(*Se x=10^(-10), então z1=x^2= 10^-20=0.1 *10^-19;
Segundo passo:z2 =fl(1-x1)=1; Terceiro passo: x3=
f(x)= 2/z2= 2. Trata-se de um valor muito próximo de f(x),
porque o limite de f(x) , quando x tende para 0, é 2.*)

(** Pergunta 2**)

```
f[x_] := x Sin[x] - Cos[x]
```

(*Podemos começar por traçaro gráfico de f em [0,1]:*)

```
Plot[f[x], {x, 0, 1}]
```



```
(* O gráfico sugere que f tem uma raiz em [0.5,1] -
 Intervalo de comprimento igual a 0.5. O teorema do ponto fixo permite-
 nos provar que existe uma única raiz neste intervalo. Para isso,
comecemos por encontrar uma função iteradora,
cujo ponto fixo coincida com a raiz procurada de
 f. Segundo a sugestão do enunciado , a função tem  forma g(x)=
 x + α f(x). Veriquemos que os pontos fixos de g são raizes de f.  g(x)=
  x ⇔ x + α f(x)= x   , ∀α ⇔ f(x)=0.
  Devemos escolher α de tal forma que g satisfaça
  as condições do teorema do ponto fixo em I.

(*** I=[0.5, 1] ***)
```

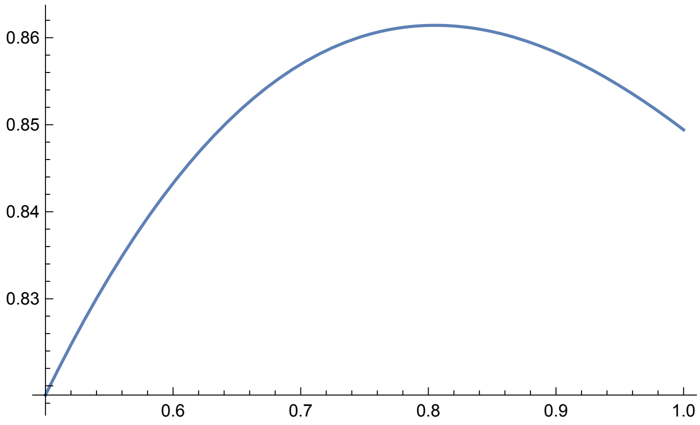
Função iteradora

```
g[x_] := x + alfa * f[x]
```

Derivada :

```
glinha[x_] := 1 + alfa * f'[x]

g[x]

x + alfa (-Cos[x] + x Sin[x])

g[0.5]

0.5 - 0.63787 alfa

(** para que g(0.5) ∈ [0.5, 1],
α deve ser negativo. Experimentemos o valor α=-0.5 **)

alfa = -0.5

-0.5

g[0.5]

0.818935

g[1]

0.849416

(*** Neste caso, as imagens dos extremos do
 intervalo pertencem ao mesmo. Verifiquemos a derivada **)

g'[x]

1 - 0.5 (x Cos[x] + 2 Sin[x])

g'[0.5]

0.301179

g'[1]

-0.111622

(** A derivada de g anula-se no inytervalo I,
logo a função tem um máximo mínimo neste intervalo.
```

```
Plot[g[x], {x, 0.5, 1}]
```



(***** Pelo gráfico, vê-se que $max_{x \in I}$ g(x) ≈0.86 ∈[0.5, 1], logo g([0.5,1]⊂ [0.5, 1] (1a condição do método do ponto fixo.)

(** Precisamos agora de verificar que $max_{x \in I}$| g'(x)|=L<1.

```
g''[x]
```

```
-0.5 (3 Cos[x] - x Sin[x])
```

(**** g'' é negativo em I , logo g' é decrescente em I**)

```
g'[0.5]
```

```
0.301179
```

```
g'[1]
```

```
-0.111622
```

(*** Logo L= $max_{x \in I}$ |g'(x)|=0.301< 1 ***)

(*** Conclusão: pelo teorema do ponto fixo, o método do ponto fixo converge, no caso de alfa=-0.5, e com x0 ∈ [0.5,1] ***)

Seja x0 = 1. As duas primeiras iteradas do método do ponto fixo são :

```
x1 = g[1]
```

```
0.849416
```

```
x2 = g[x1]
```

```
0.860716
```

(**** Estimativa do erro absoluto **)

```
L / (1 - L) (x2 - x1)
```

```
0.00487017
```

(** Pergunta 3**)

```
(**A matriz A é uma matriz tridiagonal que tem a diagonal
  principal preechhida por -4, a diagonal superior por 1,
e a diagonal inferior por -1. Por exemplo, no caso de n=5, temos **)
A = {{-4, 1, 0, 0, 0}, {-1, -4, 1, 0, 0},
   {0, -1, -4, 1, 0}, {0, 0, -1, 4, 1}, {0, 0, 0, -1, 4}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
(*** A matriz A tem a diagonal estritamente dominante, por linhas, porque  a)
          na primeira linha |-4|> |1|, na última linha, b) |-4|> |
   1|; nas restantes linhas, |-4|> |1|+|-1| **)
```

Uma vez que A tem a diagonal estritamente dominante dominante por colunas,
o método de Gauss - Seidel é convergente. Consideremos o caso de n = 3

```
A = {{-4, 1, 0}, {-1, -4, 1}, {0, -1, -4}}
```

{{-4, 1, 0}, {-1, -4, 1}, {0, -1, -4}}

```
b = {-3, -4, -5}
```

{-3, -4, -5}

```
(**** Seja x0 = (1+ϵ, 1, 1)

(*** Primeira iteração do método de Jacobi **)

(* Matriz de iteração do método de Jacobi *)

CC = {{0, 1 / 4, 0}, {-1 / 4, 0, 1 / 4}, {0, -1 / 4, 0}}
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{4}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right\}, \left\{0, -\frac{1}{4}, 0\right\}\right\}$$

```
(**** A norma  1 de Cc é 1/2 ***)

(**** Cálculo de x1

x11 = (-3 - 1) / (-4)
```

1

```
x12 = (-4 + 1 - 1 + ϵ) / (-4)
```

$$\frac{4-\epsilon}{4}$$

In[1]:= `x13 = (-5 + 1) / (-4)`

Out[1]= 1

```
(**** Norma 1 de x1- x0 ***)
```

In[3]:= $1 + \frac{\epsilon}{4}$

Out[3]= $1 + \frac{\epsilon}{4}$

```
(**** Estimativa da norma de x - x1 ***)
```

In[5]:= `NormaC = 1 / 2`

Out[5]= $\frac{1}{2}$

In[6]:= $\frac{5\,\epsilon}{4}$ `* NormaC / (1 - NormaC)`

Out[6]= $\frac{5\,\epsilon}{4}$