



TÉCNICO
LISBOA

Polarização

AGOSTO DE 2015

Nestes apontamentos analisa-se a polarização das ondas electromagnéticas. Dá-se especial ênfase a uma formulação matemática independente de qualquer sistema específico de coordenadas. Sublinha-se que os vectores reais são representados por setas e os vectores complexos por elipses orientadas.

Prof. Carlos R. Paiva

Área Científica
de Telecomunicações

DEEC Instituto Superior Técnico

Índice

1. Introdução	1
2. Vectores complexos	26
3. Representação axial dos vectores complexos	42
Bibliografia	58

Nesta introdução ao estudo da polarização utiliza-se o processo tradicional que fixa um sistema de eixos. Assim, o correspondente tratamento não é independente do sistema de coordenadas escolhido. Nas secções seguintes apresenta-se um outro processo – mais elegante embora também mais abstracto – associado ao conceito de vectores complexos.

1. Introdução

Definição

A *polarização* de uma onda electromagnética é caracterizada pela evolução temporal da extremidade do vector campo eléctrico num determinado ponto do espaço. Se a extremidade se move sobre uma linha recta, a polarização diz-se *linear*. Se a extremidade gera uma circunferência, a polarização é *circular*. E, finalmente, a polarização é *elíptica* quando a extremidade desenha uma elipse.

Primeira Abordagem Matemática

Nesta introdução apresenta-se uma primeira abordagem matemática à polarização. Nesta abordagem fixa-se, à partida, um sistema de eixos. Daí em diante o tratamento matemático é feito manipulando as componentes dos vectores nesse sistema de coordenadas. Todavia, os vectores não são considerados como entidades abstractas. Assim, esta abordagem não é a mais elegante, nem a mais recomendável. O objectivo de a apresentar, aqui na introdução, é duplo:

- Em primeiro lugar, é bastante intuitiva do ponto de vista conceptual e, portanto, adequada como primeira abordagem matemática.
- Em segundo lugar, pretende-se mostrar que – apesar de tudo – trata-se de uma técnica pouco económica, na medida em que requer extensas manipulações algébricas e trigonométricas. Prepara-se, assim, o caminho para uma nova abordagem que é feita na parte central destes apontamentos.

Comecemos, então, por definir a direcção (longitudinal) de propagação da nossa onda como sendo o eixo z . No vácuo (ou no ar) quer o vector campo eléctrico \mathbf{E} quer o vector campo magnético \mathbf{B} residem no plano transversal xy . Seja \mathbf{e}_1 o vector unitário da direcção positiva do eixo x e \mathbf{e}_2 o vector unitário da direcção positiva do eixo y . Tem-se

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

onde \mathbf{e}_3 representa o vector unitário da direcção positiva do eixo z . Sendo \mathbf{k} o vector de onda, será

$$\mathbf{k} = k_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c},$$

onde, como é habitual, se designa por c a velocidade da luz no vácuo, i.e., tem-se (por definição: valor exacto)

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Se as ondas se propagarem num meio isotrópico e homogéneo, de índice de refração n , então

$$\mathbf{k} = nk_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c}.$$

Note-se que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$, em que $k = |\mathbf{k}|$, representa o vector unitário da direcção de propagação da onda, i.e.,

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_3.$$

No domínio do tempo t e num certo ponto z do espaço, o vector campo eléctrico é dado por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_1(z, t) \mathbf{e}_1 + E_2(z, t) \mathbf{e}_2,$$

com (para $A_1 > 0$ e $A_2 > 0$)

$$\begin{cases} E_1(z, t) = A_1 \cos(kz - \omega t + \theta_1), \\ E_2(z, t) = A_2 \cos(kz - \omega t + \theta_2). \end{cases}$$

Antes de prosseguir a nossa análise podemos, desde já, afirmar o seguinte:

$$\begin{array}{|l} \text{polarização} \\ \text{linear} \end{array} \mapsto \begin{array}{|l} A_1 = 0 \Rightarrow \text{polarização linear segundo } y \text{ ou } \mathbf{e}_2 \\ A_2 = 0 \Rightarrow \text{polarização linear segundo } x \text{ ou } \mathbf{e}_1 \end{array}.$$

Prossigamos, então, a nossa análise. Consideremos o ponto $z = 0$. Para simplificar a notação, faz-se $E_1(t) = E_1(z = 0, t)$ e $E_2(t) = E_2(z = 0, t)$. Assim, vem

$$\begin{cases} E_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \theta_1), \\ E_2(t) = A_2 \cos(\omega t - \theta_2). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} E_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \cos(\theta_1) + A_1 \sin(\omega t) \sin(\theta_1), \\ E_2(t) = A_2 \cos(\omega t) \cos(\theta_2) + A_2 \sin(\omega t) \sin(\theta_2). \end{cases}$$

Mas, então, podemos ainda escrever

$$\begin{cases} \frac{E_1(t)}{A_1} \sin(\theta_2) = \cos(\omega t) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\omega t) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2), \\ \frac{E_2(t)}{A_2} \sin(\theta_1) = \cos(\omega t) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \sin(\omega t) \sin(\theta_2) \sin(\theta_1). \end{cases}$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_1(t)}{A_1} \sin(\theta_2) - \frac{E_2(t)}{A_2} \sin(\theta_1) = \cos(\omega t) [\sin(\theta_2) \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)] \right. \\ \left. = \cos(\omega t) \sin(\theta) \right. \end{aligned}$$

onde se introduziu

$$\boxed{\theta = \theta_2 - \theta_1}.$$

Analogamente, viria

$$\frac{E_1(t)}{A_1} \cos(\theta_2) - \frac{E_2(t)}{A_2} \cos(\theta_1) = -\sin(\omega t) \sin(\theta).$$

Obtém-se, portanto,

$$\begin{cases} \left[\frac{E_1(t)}{A_1} \sin(\theta_2) - \frac{E_2(t)}{A_2} \sin(\theta_1) \right]^2 = \cos^2(\omega t) \sin^2(\theta) \\ \left[\frac{E_1(t)}{A_1} \cos(\theta_2) - \frac{E_2(t)}{A_2} \cos(\theta_1) \right]^2 = \sin^2(\omega t) \sin^2(\theta) \end{cases}$$

pelo que, após adicionar ordenadamente estas duas equações, vem

$$\boxed{\text{equação fundamental}} \mapsto \boxed{\left[\frac{E_1(t)}{A_1} \right]^2 + \left[\frac{E_2(t)}{A_2} \right]^2 - 2 \frac{E_1(t)}{A_1} \frac{E_2(t)}{A_2} \cos(\theta) = \sin^2(\theta)}.$$

Vai-se, seguidamente, demonstrar que esta última equação representa uma elipse. Mas, no caso geral, trata-se de uma elipse inclinada – i.e., em que os respectivos eixos principais não coincidem com os eixos x e y . Antes, porém, consideremos alguns casos particulares.

Note-se que esta equação só é válida para $A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$. Mas, como já se viu anteriormente: (i) o caso $A_1 = 0$ corresponde a polarização linear segundo y ; (ii) o caso $A_2 = 0$ corresponde a polarização linear segundo x .

Primeiro exemplo

Suponhamos, a título de primeiro exemplo, que $\theta = \pi/2 + m\pi$ (com $m \in \mathbb{Z}$). Neste caso, a equação reduz-se a

$$\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \mapsto \left[\frac{E_1(t)}{A_1}\right]^2 + \left[\frac{E_2(t)}{A_2}\right]^2 = 1 \mapsto \text{polarização elíptica}$$

e, portanto, trata-se de polarização elíptica. Se, além disso, se tiver $A_1 = A_2 = A$, então a elipse degenera na circunferência

$$\begin{matrix} \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \\ A_1 = A_2 = A \end{matrix} \mapsto [E_1(t)]^2 + [E_2(t)]^2 = A^2 \mapsto \text{polarização circular}$$

e a polarização é, de facto, circular.

Segundo exemplo

Como segundo exemplo de aplicação, consideremos agora o caso em que $\theta = 2m\pi$ (com $m \in \mathbb{Z}$). Então, infere-se que

$$\begin{aligned} \left[\frac{E_1(t)}{A_1}\right]^2 + \left[\frac{E_2(t)}{A_2}\right]^2 - 2\frac{E_1(t)}{A_1}\frac{E_2(t)}{A_2} &= 0 \\ \therefore \left[\frac{E_1(t)}{A_1} - \frac{E_2(t)}{A_2}\right]^2 &= 0 \end{aligned}$$

assim se concluindo que

$$E_2(t) = \varrho E_1(t), \quad \varrho = \frac{A_2}{A_1} > 0.$$

Ou seja: o vector campo eléctrico oscila ao longo da linha recta

$$\boxed{\theta = 2m\pi} \mapsto \boxed{y = \varrho x} \mapsto \boxed{\text{polarização linear}}.$$

Trata-se, obviamente, de polarização linear com uma inclinação

$$\chi = \tan^{-1}(\varrho),$$

em que a linha em questão atravessa o primeiro e terceiro quadrantes de xy .

Terceiro exemplo

O caso em que $\theta = (2m+1)\pi$ (com $m \in \mathbb{Z}$) corresponde, analogamente, a

$$\left[\frac{E_1(t)}{A_1} \right]^2 + \left[\frac{E_2(t)}{A_2} \right]^2 + 2 \frac{E_1(t)}{A_1} \frac{E_2(t)}{A_2} = 0$$

$$\therefore \left[\frac{E_1(t)}{A_1} + \frac{E_2(t)}{A_2} \right]^2 = 0$$

donde

$$E_2(t) = -\varrho E_1(t), \quad \varrho = \frac{A_2}{A_1} > 0$$

e a polarização é linear, com uma inclinação

$$\chi = \pi - \tan^{-1}(\varrho),$$

correspondente à recta

$$\boxed{\theta = (2m+1)\pi} \mapsto \boxed{y = -\varrho x} \mapsto \boxed{\text{polarização linear}}$$

que atravessa o segundo e quarto quadrantes.

Quarto exemplo

Seguidamente, antes de se analisar o caso geral, ainda se vai considerar o seguinte caso: seja $A_1 = A_2 = A$. Neste caso a equação da elipse reduz-se a

$$\boxed{A_1 = A_2 = A} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(x, y) = A^2 \sin^2(\theta)}$$

em que se introduziu a forma quadrática

$$\mathcal{Q}(x, y) = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^T = (x \quad y), \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & 1 \end{pmatrix},$$

em que, portanto,

$$\mathcal{Q}(x, y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\theta).$$

O objectivo é diagonalizar a forma quadrática. Façamos, então, a mudança de variáveis

$(x \equiv E_1, y \equiv E_2) \rightarrow (X, Y)$, tal que

$$\mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{D}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{D}$$

em que

$$\boxed{\text{matriz ortogonal}} \mapsto \boxed{\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No domínio das novas variáveis, a forma quadrática escreve-se

$$\mathcal{Q}(X, Y) = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = (\mathbf{v}^T \mathbf{D}^T) \mathbf{M} (\mathbf{D} \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D}) \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \Lambda \mathbf{v}$$

$$\boxed{\text{matriz diagonal}} \mapsto \boxed{\Lambda = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Porém, para que Λ seja uma matriz diagonal, é necessário que \mathbf{D} seja a matriz diagonalizante da matriz \mathbf{M} . Para esse efeito, as colunas de \mathbf{D} têm de ser constituídas pelos vectores próprios de \mathbf{M} . Vejamos pois. Os valores próprios de \mathbf{M} são as raízes da equação

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 - \cos^2(\theta) = 0$$

$$\boxed{\text{valores próprios}} \mapsto \boxed{\lambda_{\pm} = 1 \pm \cos(\theta)}$$

Os vectores próprios resultam de

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1 - \lambda}{\cos(\theta)}$$

Assim, tira-se que

$$\boxed{\text{vectores ortonormados}} \mapsto \begin{cases} \lambda = 1 + \cos(\theta) \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda = 1 - \cos(\theta) \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = +1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{vectores próprios}} \mapsto \begin{cases} \lambda_+ \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_- \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{matriz diagonalizante}} \mapsto \boxed{D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$v = D^T u \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{mudança de variáveis}} \mapsto \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases} \mapsto \boxed{\text{rotação de } \phi = 45^\circ}$$

$$\Lambda = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_+ = 1 + \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \lambda_- = 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ou seja: os novos eixos (eixos principais) (X, Y) resultam de uma rotação de $\phi = \pi/4$ em relação aos eixos iniciais (x, y) .

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{D}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \phi = \frac{\pi}{4} \mapsto \cos(\phi) = \sin(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos novos eixos a forma quadrática escreve-se

$$\mathcal{Q}(X, Y) = \mathbf{v}^T \Lambda \mathbf{v} = (X \ Y) \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= [1 + \cos(\theta)] X^2 + [1 - \cos(\theta)] Y^2$$

de modo que, neste novo sistema de eixos principais, a elipse tem a equação canónica

$$[1 + \cos(\theta)] X^2 + [1 - \cos(\theta)] Y^2 = A^2 \sin^2(\theta),$$

ou ainda (com $\varrho = A_2/A_1$)

$$\boxed{\begin{matrix} \varrho = 1 \\ A_1 = A_2 = A \end{matrix}} \mapsto \boxed{\frac{X^2}{a_0^2} + \frac{Y^2}{b_0^2} = 1} \mapsto \begin{cases} a_0 = \sqrt{2} A \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \\ b_0 = \sqrt{2} A \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \end{cases}$$

uma vez que se tem

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}.$$

Note-se que se recupera o caso da polarização circular quando, nestas expressões, se faz ainda

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \\ A_1 = A_2 = A \end{array}} \mapsto \boxed{X^2 + Y^2 = A^2} \mapsto \boxed{a = b = A}.$$

A elipse (no caso em que $a_0 \neq b_0$) tem um semi-eixo *maior* (que se costuma designar por) a e um semi-eixo *menor* (que se costuma designar por) b . Note-se que

$$b_0^2 - a_0^2 = 2A^2 \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = 2A^2 \cos(\theta).$$

Assim,

$$\begin{cases} \cos(\theta) > 0 & \Rightarrow b_0 > a_0 \\ \cos(\theta) < 0 & \Rightarrow b_0 < a_0 \end{cases}$$

pelo que

$$\boxed{a_0 \neq b_0} \rightarrow \begin{cases} a = \max\{a_0, b_0\} & \mapsto \text{semi-eixo maior da elipse,} \\ b = \min\{a_0, b_0\} & \mapsto \text{semi-eixo menor da elipse.} \end{cases}$$

Exemplo de aplicação

Antes de se analisar o caso geral vejamos um exemplo numérico de aplicação deste quarto exemplo. Suponhamos, então, que se tem $A_1 = A_2 = A = 1$ e $\theta = 60^\circ$. Neste caso, virá

$$\cos(\theta) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $b_0 > a_0$ e

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{2} A \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067811865\dots \\ b_0 = \sqrt{2} A \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247448713915\dots \end{cases}$$

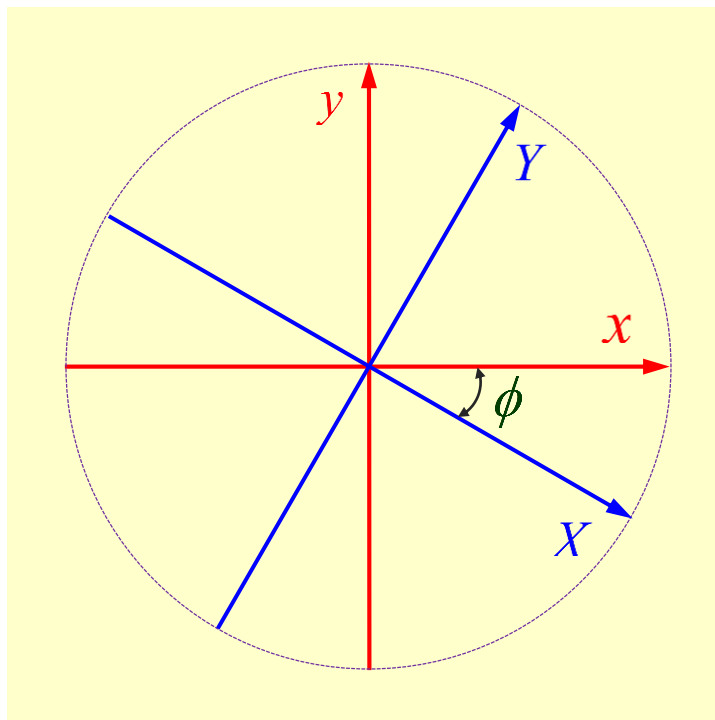
tendo-se, ainda,

$$\left[\begin{array}{l} \text{semi-eixo maior da elipse} \mapsto a = b_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \text{semi-eixo menor da elipse} \mapsto b = a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array} \right.$$

Caso geral

Mas, no caso geral, é necessária uma rotação de um ângulo (tal como se indica na figura anexa)

$$\phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$



Esta rotação corresponde à mudança de variáveis

$$\begin{cases} X = \cos(\phi) x - \sin(\phi) y \\ Y = \sin(\phi) x + \cos(\phi) y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(\phi) X + \sin(\phi) Y \\ y = -\sin(\phi) X + \cos(\phi) Y \end{cases}$$

que transforma a forma quadrática da equação geral da elipse de

$$\mathcal{Q}(x, y) = A_2^2 x^2 + A_1^2 y^2 - 2A_1 A_2 \cos(\theta) xy = A_1^2 A_2^2 \sin^2(\theta)$$

em

$$\boxed{\frac{X^2}{a_0^2} + \frac{Y^2}{b_0^2} = 1} \mapsto \boxed{\mathcal{Q}(X, Y) = b_0^2 X^2 + a_0^2 Y^2 = a_0^2 b_0^2}$$

Com efeito, desta última expressão resulta

$$\mathcal{Q}(x, y) = b_0^2 [\cos(\phi)x - \sin(\phi)y]^2 + a_0^2 [\sin(\phi)x + \cos(\phi)y]^2 = a_0^2 b_0^2$$

o que permite escrever a elipse na forma $f(x, y) = 0$:

$$[a_0^2 \sin^2(\phi) + b_0^2 \cos^2(\phi)]x^2 + [a_0^2 \cos^2(\phi) + b_0^2 \sin^2(\phi)]y^2 + (a_0^2 - b_0^2) \sin(2\phi) - a_0^2 b_0^2 = 0.$$

Esta expressão tem de ser idêntica à equação inicial. Daí resulta que

$$\begin{cases} A_2^2 = a_0^2 \sin^2(\phi) + b_0^2 \cos^2(\phi) \\ A_1^2 = a_0^2 \cos^2(\phi) + b_0^2 \sin^2(\phi) \\ 2A_1 A_2 \cos(\theta) = (b_0^2 - a_0^2) \sin(2\phi) \\ A_1^2 A_2^2 \sin^2(\theta) = a_0^2 b_0^2 \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} A_1^2 + A_2^2 = a_0^2 + b_0^2 \\ A_1^2 - A_2^2 = (a_0^2 - b_0^2) \cos(2\phi) \end{cases}$$

donde

$$a_0^2 - b_0^2 = \frac{A_1^2 - A_2^2}{\cos(2\phi)} = -\frac{2A_1 A_2 \cos(\theta)}{\sin(2\phi)} \Rightarrow \boxed{\tan(2\phi) = \frac{2A_1 A_2 \cos(\theta)}{A_2^2 - A_1^2}},$$

pelo que

$$\boxed{\text{ângulo de rotação}} \mapsto \boxed{-\frac{\pi}{4} \leq \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2A_1 A_2 \cos(\theta)}{A_2^2 - A_1^2} \right] \leq \frac{\pi}{4}}.$$

Por outro lado, vem

$$a_0^2 + b_0^2 = a_0^2 + \frac{A_1^2 A_2^2 \sin^2(\theta)}{a_0^2} = A_1^2 + A_2^2$$

$$\therefore a_0^4 - (A_1^2 + A_2^2) a_0^2 + A_1^2 A_2^2 \sin^2(\theta) = 0$$

donde se infere, pela resolução desta equação biquadrada,

$$\left| \begin{aligned} a_0^2 &= \frac{1}{2} \left[(A_1^2 + A_2^2) \pm \sqrt{(A_1^2 - A_2^2)^2 + 4A_1^2 A_2^2 \cos^2(\theta)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(A_1^2 + A_2^2) \pm (A_1^2 - A_2^2) \sqrt{1 + \tan^2(2\phi)} \right] \\ &= \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \left[1 \pm \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 + A_2^2} \sec(2\phi) \right] \end{aligned} \right|$$

donde

$$\boxed{A^2 = \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \left[1 + \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 + A_2^2} \sec(2\phi) \right]}$$

Agora, como $b_0^2 = (A_1^2 + A_2^2) - a_0^2$, vem

$$\boxed{B^2 = \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \left[1 - \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 + A_2^2} \sec(2\phi) \right]}$$

Assim,

$$\boxed{\text{semi - eixos principais da elipse com } a > b} \mapsto \boxed{\begin{aligned} a &= \max \{ A, B \} \\ b &= \min \{ A, B \} \end{aligned}}$$

Note-se, porém, que a_0 e b_0 têm de ser escolhidos através do critério

$$a_0^2 - b_0^2 = (a_0 + b_0)(a_0 - b_0) = \frac{A_1^2 - A_2^2}{\cos(2\phi)} = \frac{(A_1 + A_2)(A_1 - A_2)}{\cos(2\phi)}$$

Como

$$2\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \cos(2\phi) \geq 0,$$

infere-se que

$$\boxed{A_1 \neq A_2} \mapsto \boxed{\operatorname{sgn}(a_0 - b_0) = \operatorname{sgn}(A_1 - A_2)}.$$

Tem-se

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

Conclui-se, desta forma, que

$$\boxed{\text{determinação de } a_0 \text{ e de } b_0} \mapsto \begin{cases} A_1 > A_2 \Rightarrow a_0 = a > b_0 = b \\ A_1 < A_2 \Rightarrow a_0 = b < b_0 = a \end{cases}$$

onde o caso especial em que $A_1 = A_2 = A$ foi tratado anteriormente (quarto exemplo).

Em síntese: no caso geral deve proceder-se a uma rotação de ϕ para encontrar os eixos principais da elipse. Tem-se, para $A_1 \neq A_2$,

$$\boxed{\operatorname{sgn}(a_0 - b_0) = \operatorname{sgn}(A_1 - A_2)} \mapsto \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2A_1 A_2 \cos(\theta)}{A_2^2 - A_1^2} \right] \leq \frac{\pi}{4} \\ A^2 = \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \left[1 + \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 + A_2^2} \sec(2\phi) \right] \\ B^2 = \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \left[1 - \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 + A_2^2} \sec(2\phi) \right] \end{cases}.$$

Ou seja: os três parâmetros (A_1, A_2, θ) permitem calcular os três parâmetros (a, b, ϕ) . Note-se que, se se fizer

$$\boxed{A_2 = \rho A_1},$$

podemos reescrever as três equações anteriores exclusivamente em função de dois parâmetros: $(\rho, \theta) \mapsto (a, b, \phi)$. Recordar-se, aqui, que

$$\boxed{a_0 \neq b_0} \rightarrow \begin{cases} a = \max\{a_0, b_0\} \mapsto \text{semi-eixo maior da elipse,} \\ b = \min\{a_0, b_0\} \mapsto \text{semi-eixo menor da elipse.} \end{cases}$$

Com efeito, a polarização é caracterizada pela forma da elipse – não pelo seu tamanho. A área \mathcal{A} da elipse é

$$\boxed{\text{área da elipse}} \mapsto \boxed{\mathcal{A} = \pi ab}.$$

NOTA – Quando a elipse se reduz a uma circunferência, com $a=b$, a área reduz-se à fórmula sobejamente conhecida

$$\boxed{\text{área do círculo}} \mapsto \boxed{\mathcal{A} = \pi a^2}.$$

A polarização da onda é a mesma se se fizer $a \mapsto \kappa a$ e $b \mapsto \kappa b$. A única coisa que se altera é o tamanho da elipse – mas não a sua forma:

$$\mathcal{A} = \pi ab \mapsto \mathcal{A} = \pi \kappa^2 ab.$$

Em síntese:

$$\boxed{\begin{matrix} A_1 \neq A_2 \\ \varrho \neq 1 \end{matrix}} \mapsto \boxed{\begin{matrix} -\frac{\pi}{4} \leq \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2\varrho \cos(\theta)}{\varrho^2 - 1} \right] \leq \frac{\pi}{4} \\ \alpha^2 = \frac{1+\varrho^2}{2} \left[1 + \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} \sec(2\phi) \right] \\ \beta^2 = \frac{1+\varrho^2}{2} \left[1 - \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} \sec(2\phi) \right] \\ a = A_1 \max \{ \alpha, \beta \}, \quad b = A_1 \min \{ \alpha, \beta \} \\ \left[\begin{array}{l} A_1 > A_2 \Rightarrow a_0 = a > b_0 = b \\ A_1 < A_2 \Rightarrow b_0 = a > a_0 = b \end{array} \right. \end{matrix}}.$$

Na verdade, a forma da elipse é determinada por um parâmetro conhecido por *excentricidade*. Este parâmetro é designado pela letra ϵ e é definido como segue.

$$\boxed{\text{excentricidade da elipse de polarização}} \mapsto \boxed{0 \leq \epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1}$$

O caso da polarização circular corresponde a $a=b$ e, conseqüentemente, a $\epsilon=0$. Como é óbvio, a excentricidade não é influenciada pelo valor de A_1 .

Antes de terminar esta introdução vai-se indicar a melhor forma de programar as equações desta abordagem matemática da polarização. Façamos

$$\boxed{\Omega = \omega t \in [0, 2\pi]} \mapsto \boxed{\begin{matrix} E_1(t) = x(\Omega) = A_1 \cos(\Omega - \theta_1) \\ E_2(t) = y(\Omega) = A_2 \cos(\Omega - \theta_2) \end{matrix}}.$$

Então, a curva (mais precisamente: elipse, circunferência ou segmento de recta) gerada pela polarização é obtida para $0 \leq \Omega \leq 2\pi$. Os dados de entrada são: $\{A_1, A_2, \theta_1, \theta_2\}$.

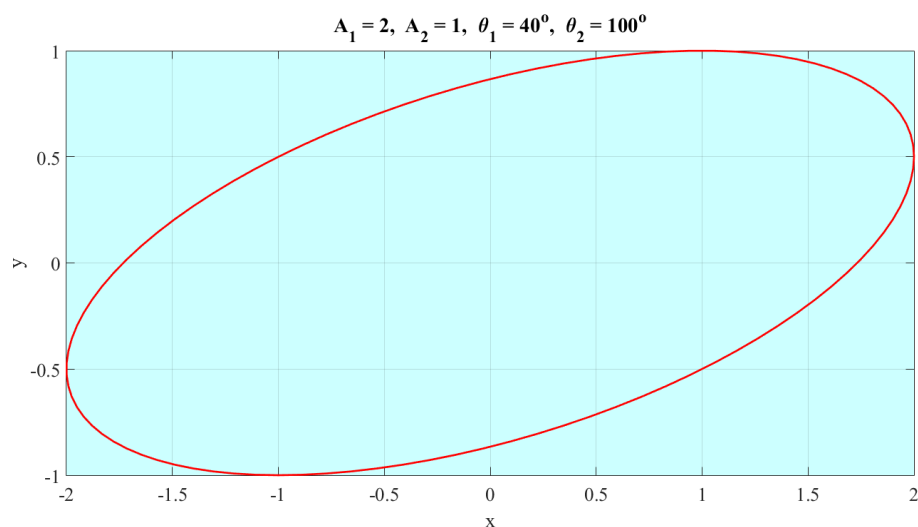
Programa MATLAB®

Um programa simples, que resolve este problema, poder ser o que – a seguir – se apresenta. Consideram-se os seguintes valores: $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $\theta_1 = 40^\circ$ e $\theta_2 = 100^\circ$. O correspondente ângulo de rotação é (com $\theta = \theta_2 - \theta_1 = 60^\circ$)

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2A_1 A_2 \cos(\theta)}{A_2^2 - A_1^2} \right] = -16.8450^\circ.$$

Tem-se, ainda, $a_0 = a = 2.0743$ e $b = b_0 = 0.8350$.

Um programa MATLAB® para desenhar a elipse pode ser o que se lista a seguir. A figura seguinte mostra o gráfico produzido por este programa. Note-se, todavia, que este programa não desenha os eixos principais.



MATLAB®

↳

```

A1=2; A2=1;
theta_1=40; theta_2=100;
theta_min=0; theta_max=360; N=100;
Omega = linspace(theta_min,theta_max,N);
x = A1*cosd(Omega - theta_1);
y = A2*cosd(Omega - theta_2);
plot(x,y,'r','LineWidth',2)
axis equal
axis([-A1 A1 -A2 A2])
title('A_1=2, A_2=1, \theta_1=40^{o}, \theta_2=100^{o}')
xlabel('x')
ylabel('y')
grid on
ax = gca;
ax.Color = [0.8, 1.0, 1.0];
ax.FontSize = 20;
ax.FontName = 'serif';

```

Apresenta-se, de seguida, um novo programa MATLAB® que, além de desenhar a elipse de polarização, também traça os eixos principais.

```

% Este programa traça a elipse de polarização e os respectivos
% eixos principais
%
% Carlos R. Paiva
%
% Agosto de 2015
%
close all
clear all
%
A1=4; A2=2; theta_1=30; theta_2=90; % dados de entrada do programa
%
theta=theta_2-theta_1; rho=A2/A1;
%
phi=0.5*atand((2*rho*cosd(theta)/(rho^2-1))); % ângulo de rotação
%
alpha=0.5*(1+rho^2)*(1+(1-rho^2)/(1+rho^2)*secd(2*phi));

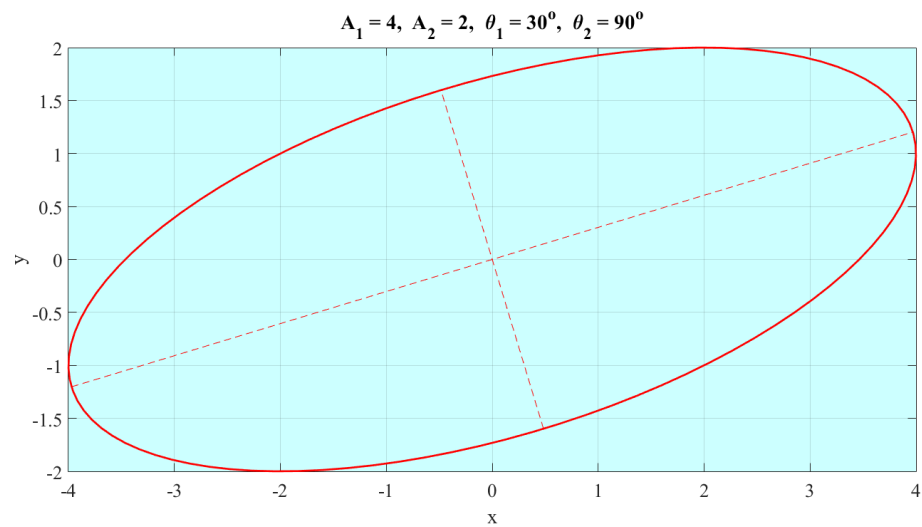
```

```

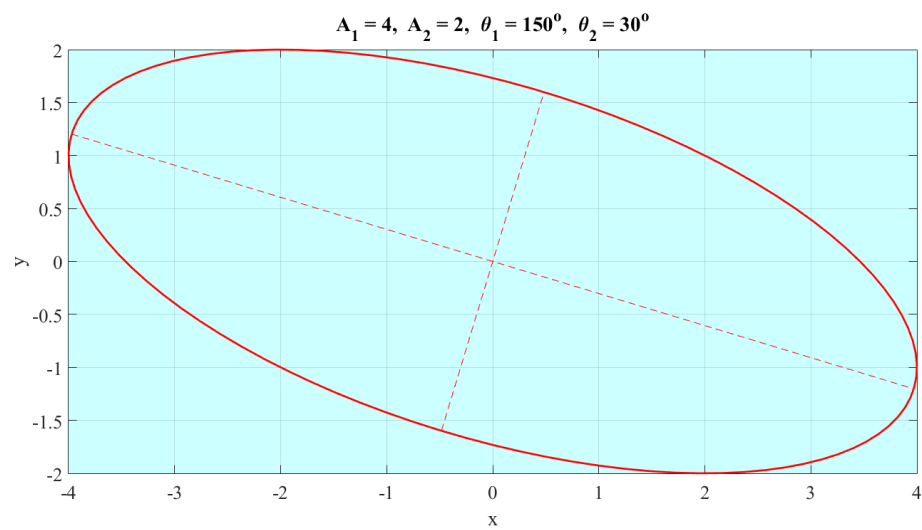
beta=0.5*(1+rho^2)*(1-(1-rho^2)/(1+rho^2)*secd(2*phi));
a_square=max(alpha,beta); b_square=min(alpha,beta);
a=A1*sqrt(a_square); b=A1*sqrt(b_square); % semi-eixos principais
%
if A1 > A2
    a0=a; b0=b;
else
    a0=b; b0=a;
end
%
% Coordenadas dos eixos principais
%
xa=cosd(phi)*a0; ya=-sind(phi)*a0;
xb=sind(phi)*b0; yb=cosd(phi)*b0;
%
%
% Desenha a ellipse
%
Omega=linspace(0,360,100);
x=A1*cosd(Omega-theta_1);
y=A2*cosd(Omega-theta_2);
plot(x,y,'r','LineWidth',2) % desenha a ellipse
%
% Propriedades do gráfico
%
axis equal
axis([-A1 A1 -A2 A2])
title('A_1 = 2, A_2 = 4, \theta_1 = 30^{o}, \theta_2 = 90^{o}')
xlabel('x')
ylabel('y')
grid on
ax=gca;
ax.Color=[0.8,1.0,1.0];
ax.FontSize=20;
ax.FontName='serif';
%
hold on
%
% Traça os eixos principais da ellipse
%
plot([-xa xa],[-ya ya],'--r')
plot([-xb xb],[-yb yb],'--r')

```

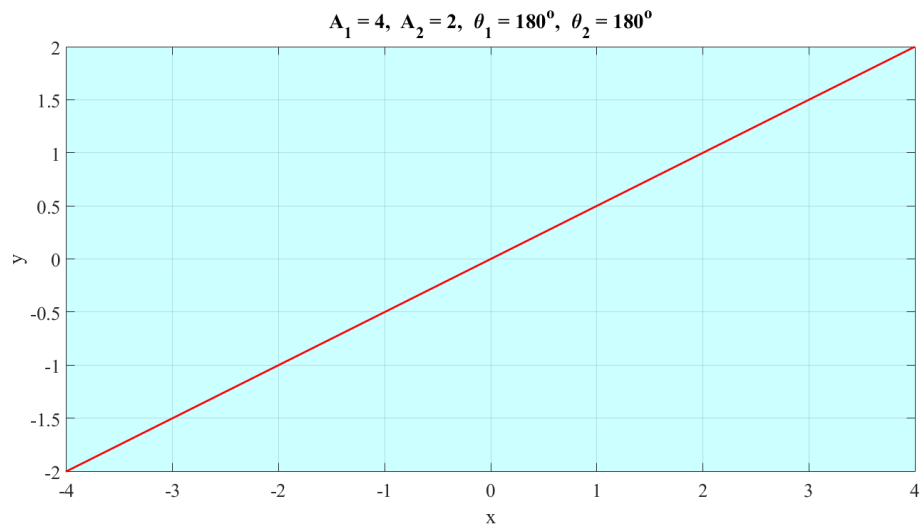
O gráfico resultante deste programa apresenta-se na figura seguinte.



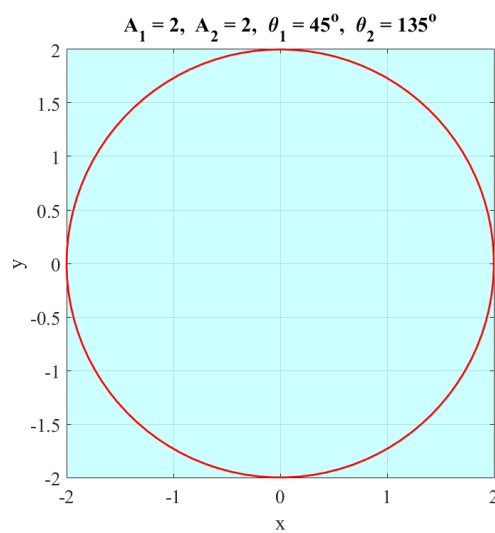
Vejamos, agora, outro exemplo: $A_1 = 4, A_2 = 2, \theta_1 = 150^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ$.



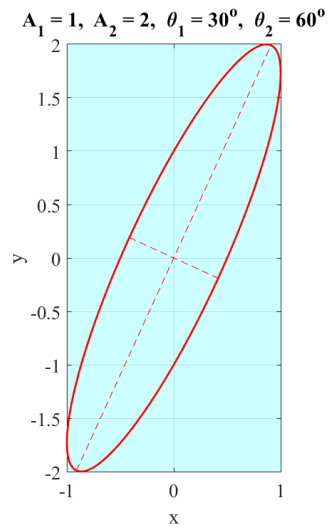
Na próxima figura considerou-se: $A_1 = 4$, $A_2 = 2$ e $\theta_1 = \theta_2 = 180^\circ$.



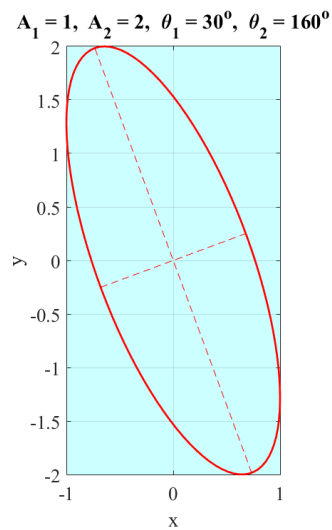
Agora faz-se: $A_1 = A_2 = 2$, $\theta_1 = 45^\circ$ e $\theta_2 = 135^\circ$.



Outro exemplo: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_2 = 60^\circ$.



Um último exemplo: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_2 = 160^\circ$.



Porém, não existe qualquer perda de informação se se fizer $A_1 = 1$, $A_2 = \rho$, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$:

$$\boxed{\Omega \in [0, 2\pi]} \mapsto \boxed{\begin{matrix} x(\Omega) = \cos(\Omega) \\ y(\Omega) = \rho \cos(\Omega - \theta) \end{matrix}}.$$

Ou seja: a polarização da onda fica completamente caracterizada pelo par (ρ, θ) , com $\rho \geq 0$. Na realidade, perde-se um único caso: $E_1 = 0$ e $E_2 \neq 0$ (correspondente à polarização linear segundo y).

A seguir apresenta-se a lista dos casos em que a polarização ou é linear ou é circular. No caso da polarização linear a inclinação χ é medida em relação ao eixo x no sentido directo (contrário ao dos ponteiros do relógio). As inclinações $\chi = 0$ e $\chi = \pi$ correspondem ambas a $y = 0$ (i.e., a polarização linear segundo x). No caso da polarização circular faz-se $A_1 = A_2 = A$.

$$\boxed{\rho = 0} \mapsto \boxed{y = 0} \mapsto \boxed{\chi = 0} \mapsto \boxed{\text{polarização linear segundo } x}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \rho = 1 \\ \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \end{matrix}} \mapsto \boxed{x^2 + y^2 = A^2} \mapsto \boxed{\text{polarização circular}}$$

$$\boxed{\theta = 2m\pi} \mapsto \boxed{y = \rho x} \mapsto \boxed{\chi = \tan^{-1}(\rho)} \mapsto \boxed{\text{polarização linear}}$$

$$\boxed{\theta = (2m+1)\pi} \mapsto \boxed{y = -\rho x} \mapsto \boxed{\chi = \pi - \tan^{-1}(\rho)} \mapsto \boxed{\text{polarização linear}}$$

$$\boxed{\rho = \infty} \mapsto \boxed{x = 0} \mapsto \boxed{\chi = \frac{\pi}{2}} \mapsto \boxed{\text{polarização linear segundo } y}$$

Todos os restantes casos, não incluídos nesta lista, correspondem a polarização elíptica.

Podemos introduzir, então, um número complexo $\zeta \in \mathbb{C}$, tal que

$$\zeta = x + iy = \rho e^{i\theta} = \rho [\cos(\theta) + i \sin(\theta)],$$

para definir a polarização da onda. O centro do plano complexo, $\rho = 0$, corresponde a polarização linear segundo x . Quando $\rho \rightarrow \infty$ aproximamo-nos do caso limite em que a polarização é novamente linear – mas agora segundo y . Todos os restantes pontos têm uma polarização como a que se acabou de caracterizar na lista anterior. Note-se que

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\omega t) = \Re\{\exp(-i\omega t)\} \\ y(t) = \rho \cos(\theta - \omega t) = \Re\{\zeta \exp(-i\omega t)\} \end{cases}$$

donde

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \Re\{\zeta\} + \Im\{\zeta\} \tan(\omega t).$$

Ou seja:

- A polarização *linear* ocorre no eixo real: $\mathcal{L} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Im\{\zeta\} = 0\}$.
- A polarização *circular* ocorre em dois pontos: $\mathcal{C} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta = \pm i\}$.
- Nos restantes pontos a polarização é *elíptica*: $\mathcal{E} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta \neq \pm i \ \& \ \Im\{\zeta\} \neq 0\}$.

Existem dois pontos do conjunto \mathcal{L} que merecem referência especial: $\zeta = \pm 1$. O ponto $\zeta = 1$ corresponde a uma polarização linear a 45° . O ponto $\zeta = -1$ corresponde a uma polarização linear a 135° . Com efeito,

$$\begin{cases} \zeta = 1 \quad \mapsto \quad \chi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}, \\ \zeta = -1 \quad \mapsto \quad \chi = \pi - \tan^{-1}(1) = \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Deve sublinhar-se, todavia, que a polarização não se resume – nos casos \mathcal{C} e \mathcal{E} – à forma da curva (circunferência ou elipse). Com efeito, a polarização nestes dois casos (i.e., da polarização não linear) só fica completamente definida depois de se indicar a *orientação*.

Definição – A *orientação* da polarização – nos casos das polarizações circular e elíptica – refere-se ao sentido de percurso da curva de polarização ao longo do tempo. Se o polegar da mão direita aponta na direcção de propagação da onda quando os restantes dedos (da mão direita) apontam na direcção do movimento da extremidade do vector campo eléctrico, então a polarização diz-se com orientação *direita*. No caso de se usar a mão esquerda, a orientação é *esquerda*. Para um observador que veja a onda a aproximar-se, a polarização é *esquerda* (resp., *direita*) quando o sentido do movimento da extremidade do vector campo eléctrico for o do movimento (resp., contrário ao) dos ponteiros do relógio.

Vejam, então, os dois pontos do conjunto \mathcal{C} : o que distingue as polarizações circulares correspondentes a $\zeta = \pm i$? O ponto $\zeta = i$ corresponde a ter-se ($\rho = 1, \theta = \pi/2$), pelo que

$$\boxed{\zeta = i} \mapsto \boxed{\begin{matrix} x(\Omega) = \cos(\Omega) \\ y(\Omega) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Omega\right) = \sin(\Omega) \end{matrix}} \mapsto \boxed{\begin{matrix} \frac{dx}{d\Omega} = -\sin(\Omega) \\ \frac{dy}{d\Omega} = \cos(\Omega) \end{matrix}}.$$

Mas então, no primeiro quadrante (em que $0 < \Omega < \pi/2$), tem-se

$$\frac{dx}{d\Omega} < 0, \quad \frac{dy}{d\Omega} > 0.$$

Isto é suficiente para provar que, neste caso, a polarização é direita. Analogamente, viria

$$\boxed{\zeta = -i} \mapsto \boxed{\begin{matrix} x(\Omega) = E_1(t) = \cos(\Omega) \\ y(\Omega) = E_2(t) = \cos\left(\Omega - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(\Omega) \end{matrix}} \mapsto \boxed{\begin{matrix} \frac{dx}{d\Omega} = -\sin(\Omega) \\ \frac{dy}{d\Omega} = -\cos(\Omega) \end{matrix}}$$

pelo que, no primeiro quadrante,

$$\frac{dx}{d\Omega} < 0, \quad \frac{dy}{d\Omega} < 0,$$

de modo que, neste caso, a polarização é esquerda. Em síntese:

$$\left[\begin{array}{l} \zeta = i \quad \mapsto \quad \text{polarização circular direita,} \\ \zeta = -i \quad \mapsto \quad \text{polarização circular esquerda.} \end{array} \right.$$

Vejamos, agora, dois outros casos sobre a circunferência $\varrho=1$: $\zeta = \exp(\pm i \pi/4)$. Em ambos os casos a polarização é elíptica com os eixos principais rodados de um ângulo $\phi = \pi/4$.

$$\boxed{\zeta = \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} x(\Omega) = \cos(\Omega) \\ y(\Omega) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) \end{array}} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} \frac{dx}{d\Omega} = -\sin(\Omega) \\ \frac{dy}{d\Omega} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \Omega\right) \end{array}}$$

$$\boxed{\zeta = \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} x(\Omega) = \cos(\Omega) \\ y(\Omega) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) \end{array}} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} \frac{dx}{d\Omega} = -\sin(\Omega) \\ \frac{dy}{d\Omega} = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \Omega\right) \end{array}}$$

Consideremos, então, o movimento da extremidade do vector para $0 < \Omega < \pi/4$. No primeiro caso é

$$\frac{dx}{d\Omega} < 0, \quad \frac{dy}{d\Omega} > 0$$

e a polarização é direita. No segundo caso é

$$\frac{dx}{d\Omega} < 0, \quad \frac{dy}{d\Omega} < 0$$

e a polarização é esquerda. Ou seja:

$$\left[\begin{array}{l} \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \mapsto \quad \text{polarização elíptica direita,} \\ \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \quad \mapsto \quad \text{polarização elíptica esquerda.} \end{array} \right.$$

Mais geralmente, prova-se que: (i) o conjunto \mathfrak{D} dos pontos com polarização direita corresponde a $\Im\{\zeta\} > 0$; (ii) o conjunto \mathfrak{E} dos pontos com polarização esquerda corresponde a $\Im\{\zeta\} < 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D} = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \Im \{ \zeta \} > 0 \} \mapsto \text{polarização (circular ou elíptica) direita} \\ \mathcal{E} = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \Im \{ \zeta \} < 0 \} \mapsto \text{polarização (circular ou elíptica) esquerda} \end{array} \right.$$

Note-se que

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \{ \zeta = i \}, \\ \mathcal{E} \cap \mathcal{D} = \{ \zeta = -i \}. \end{array} \right.$$

Um vector real do espaço euclidiano tridimensional pode ser representado por uma seta. Porém, um vector complexo não é representável por uma seta: um vector complexo é representável por uma elipse orientada. Por essa razão, os vectores complexos são a representação matemática mais adequada para estudar a polarização.

2. Vectores complexos

Definição

A polarização será agora definida com base num *vector complexo*

$$\boxed{\text{vector complexo}} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2}$$

em que $\mathbf{E}_1 = \Re \{ \mathbf{E}_0 \}$ e $\mathbf{E}_2 = \Im \{ \mathbf{E}_0 \}$ são *vectores reais*. Note-se que \mathbf{E}_0 é *constante* (não depende do tempo) e *uniforme* (não depende do ponto do espaço considerado). A variação espaço-temporal do vector campo eléctrico é dada por

$$\boxed{\text{vector real campo eléctrico}} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i \omega t) \}},$$

em que

$$\boxed{\text{vector complexo}} \mapsto \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]}.$$

Assim, vem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) &= \Re \{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) [\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \} \\ &= \mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \mathbf{E}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \end{aligned}$$

Abordagem Matemática Geral

Sublinhe-se que: (i) $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3$; (ii) $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$.

O vector complexo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ tem uma variação espacial

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) [\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \\ &= [\mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{E}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + i [\mathbf{E}_1 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{E}_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Porém, o (verdadeiro) vector campo eléctrico é um vector real dado por

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp[i \Phi(\mathbf{r}, t)] \right\} \\ &= \Re \left\{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) [\cos(\Phi) + i \sin(\Phi)] \right\} \\ &= \mathbf{E}_1 \cos(\Phi) - \mathbf{E}_2 \sin(\Phi). \end{aligned} \right.$$

A fase $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é dada por

$$\boxed{\text{fase da onda}} \mapsto \boxed{\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k \zeta - \omega t},$$

onde se introduziu a coordenada espacial ζ ,

$$\boxed{\Theta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{r})} \mapsto \boxed{\zeta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = r \cos(\Theta)},$$

com $r = |\mathbf{r}|$. Supõe-se fixada uma origem \mathbf{O} do sistema de coordenadas. Sendo \mathbf{P} o ponto de observação da onda, representa-se por $\mathbf{r} = \overline{\mathbf{OP}}$ o vector posição. Como é habitual, $k = |\mathbf{k}|$ e $\hat{\mathbf{k}}$ representa o vector unitário correspondente ao *vector de onda* \mathbf{k} , i.e., tem-se

$$\boxed{\text{vector de onda unitário}} \mapsto \boxed{\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}}.$$

Nestas condições, podemos escrever

$$\boxed{\mathbf{E}_\omega(\zeta, t) = \mathbf{E}_1 \cos[\Phi(\zeta, t)] - \mathbf{E}_2 \sin[\Phi(\zeta, t)]}.$$

Antes de prosseguir é conveniente esclarecer alguns aspectos importantes relacionados com o vector complexo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2$. Em primeiro lugar, tem-se

$$\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + i(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + i(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2.$$

Como $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$|\mathbf{E}_1| = \sqrt{|\mathbf{E}_1|^2} = \sqrt{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1}, \quad |\mathbf{E}_2| = \sqrt{|\mathbf{E}_2|^2} = \sqrt{\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2}.$$

Além disso, como o produto interno é simétrico, tem-se

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1.$$

No caso dos vectores reais, temos então

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \mapsto \begin{cases} \mathbf{E}_1^2 = |\mathbf{E}_1|^2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \geq 0, \\ \mathbf{E}_2^2 = |\mathbf{E}_2|^2 = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 \geq 0. \end{cases}$$

Inferre-se, portanto, que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{o quadrado de um vector complexo} \\ \text{é um número complexo} \end{array}} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_0^2 = (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) + 2i(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \in \mathbb{C}}.$$

Ou seja: não faz sentido atribuir ao número (em geral) complexo \mathbf{E}_0^2 o significado (como no caso dos vectores reais) de ser o quadrado do comprimento de \mathbf{E}_0 . Com efeito, se se calcular

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 - i\mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2,$$

verifica-se que, para vectores complexos, faz sentido definir

$$|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 \neq (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) + 2i(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_0^2.$$

Portanto, o comprimento do vector complexo \mathbf{E}_0 é dado por

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{comprimento} \\ \text{do vector } \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C} \end{array}} \mapsto \boxed{|\mathbf{E}_0| = \sqrt{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*} = \sqrt{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2} > 0}.$$

Note-se, ainda, que

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0 = (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) \times (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) = i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) + i(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1) = i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) - i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_1) \equiv 0.$$

Podemos dizer então que, para quaisquer $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$\boxed{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0 = 0},$$

tal como no caso dos vectores reais.

Porém, de

$$\mathbf{E}_\omega(\zeta, t) = \mathbf{E}_1 \cos[\Phi(\zeta, t)] - \mathbf{E}_2 \sin[\Phi(\zeta, t)],$$

resulta que

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\omega \times \mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \sin(\Phi) \\ \mathbf{E}_\omega \times \mathbf{E}_2 = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \cos(\Phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{E}_1)^2 = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2 \sin^2(\Phi) \\ (\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{E}_2)^2 = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2 \cos^2(\Phi) \end{cases}$$

donde

<p style="text-align: center;">equação da cónica descrita pelo vector $\mathbf{E}_\omega(\zeta, t)$ num ponto $\zeta = \zeta_0$ ao longo do tempo</p>	\mapsto	$(\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{E}_1)^2 + (\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{E}_2)^2 = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2$
--	-----------	--

Esta última equação é uma equação do segundo grau em $\mathbf{E}_\omega(\zeta, t)$. E, portanto, a equação de $\mathbf{E}_\omega(\zeta, t)$ é uma *cónica*. Falta saber de que tipo de cónica se trata (elipse, parábola, hipérbole ou cónica degenerada). Para o saber, também resulta de

$$\mathbf{E}_\omega(\zeta, t) = \mathbf{E}_1 \cos[\Phi(\zeta, t)] - \mathbf{E}_2 \sin[\Phi(\zeta, t)]$$

que se tem

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_\omega|^2 &= \mathbf{E}_\omega^2 = [\mathbf{E}_1 \cos(\Phi) - \mathbf{E}_2 \sin(\Phi)]^2 \\ &= [\mathbf{E}_1 \cos(\Phi) - \mathbf{E}_2 \sin(\Phi)] \cdot [\mathbf{E}_1 \cos(\Phi) - \mathbf{E}_2 \sin(\Phi)] \\ &= \mathbf{E}_1^2 \cos^2(\Phi) + \mathbf{E}_2^2 \sin^2(\Phi) - 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \sin(\Phi) \cos(\Phi). \end{aligned}$$

Logo, tendendo a que

$$\sin(2\Phi) = 2 \sin(\Phi) \cos(\Phi)$$

e, ainda,

$$\cos(2\Phi) = \cos^2(\Phi) - \sin^2(\Phi) = 1 - 2 \sin^2(\Phi) = 2 \cos^2(\Phi) - 1$$

$$\therefore \begin{cases} \sin^2(\Phi) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\Phi)] \\ \cos^2(\Phi) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\Phi)] \end{cases}$$

podemos, então, concluir que

$ \mathbf{E}_\omega ^2 = \mathbf{E}_\omega^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) \cos(2\Phi) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \sin(2\Phi)$

Conclusão: A cónica em causa é uma *elipse* pela simples razão de que o comprimento $|\mathbf{E}_\omega|$ do vector real instantâneo $\mathbf{E}_\omega(\zeta, t)$ é, de acordo com a última equação, um comprimento sempre finito. Esta é a mesma conclusão da secção anterior (i.e., a curva descrita pela extremidade do vector campo eléctrico é a chamada *elipse de polarização*). Mas, agora, a equação da elipse foi deduzida com toda a generalidade, sem recurso a qualquer sistema particular de coordenadas.

Notando, agora, que

$$\cos(2\Phi + \theta) = \cos(2\Phi)\cos(\theta) - \sin(2\Phi)\sin(\theta),$$

é possível escrever

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_\omega|^2 = \mathbf{E}_\omega^2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2)\cos(2\Phi) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)\sin(2\Phi) \\ &= a + b\cos(2\Phi)\cos(\theta) - b\sin(2\Phi)\sin(\theta) \\ &= a + b\cos(2\Phi + \theta) \end{aligned}$$

com (designa-se por \mathcal{G} o ângulo entre os dois vectores reais \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2)

$$\boxed{\mathcal{G} = \sphericalangle(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} \mapsto \begin{cases} a = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2), \\ b\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2), \\ b\sin(\theta) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = |\mathbf{E}_1||\mathbf{E}_2|\cos(\mathcal{G}). \end{cases}$$

Assim,

$$\mathbf{E}_\omega^2 = a + b\cos(2\Phi + \theta) = a \left[1 + \frac{b}{a}\cos(2\Phi + \theta) \right] = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) [1 + \kappa\cos(2\Phi + \theta)],$$

em que

$$\kappa = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2)^2 + 4\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2^2 \cos^2(\vartheta)}}{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2} = \frac{\sqrt{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2 - 4\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2^2 \sin^2(\vartheta)}}{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2}.$$

Logo, sendo ϑ o ângulo entre os vectores (reais) $\mathbf{E}_1 = \Re\{\mathbf{E}_0\}$ e $\mathbf{E}_2 = \Im\{\mathbf{E}_0\}$, infere-se que

$$\boxed{\text{quadrado da amplitude do vector campo eléctrico}} \mapsto \boxed{|\mathbf{E}_\omega|^2 = \mathbf{E}_\omega^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)[1 + \kappa \cos(2\Phi + \theta)]}$$

onde se introduziu o novo parâmetro

$$\boxed{\kappa = \sqrt{1 - \frac{4\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2^2}{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2} \sin^2(\vartheta)}}.$$

No caso geral, tem-se $|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2$ e

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_0|^2 &= \sqrt{(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2)^2 + 4(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)^2} \\ &= \sqrt{(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2)^2 + 4\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2^2 \cos^2(\vartheta)} \\ &= \sqrt{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2 - 4\mathbf{E}_1^2\mathbf{E}_2^2 \sin^2(\vartheta)} \end{aligned}$$

pelo que

$$\boxed{p = 2 \frac{|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2|}{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2}} \mapsto \boxed{\kappa = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{|\mathbf{E}_0|^2} = \sqrt{1 - p^2}}$$

uma vez que

$$|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}_1| |\mathbf{E}_2| \sin(\vartheta).$$

A polarização será *linear* quando $|\mathbf{E}_\omega| = 0$ para certos valores da fase $\Phi = \Phi(\zeta, t)$. Mas isso só é possível quando $\vartheta = 2m\pi$, para $m \in \mathbb{Z}$. Efectivamente, neste caso é $\sin(\vartheta) = 0$, $\kappa = 1$ e, portanto,

$$\boxed{p = 0} \mapsto \boxed{|\mathbf{E}_\omega|^2 = \mathbf{E}_\omega^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)[1 + \cos(2\Phi + \theta)]} \mapsto \boxed{\text{polarização linear}}.$$

Assim, $|\mathbf{E}_\omega| = 0$ para $2\Phi + \theta = (2m+1)\pi$.

Por outro lado, a polarização é *circular* se o comprimento $|\mathbf{E}_\omega|$ for constante, i.e., não depender de Φ . Isso acontece quando se tem $\kappa = 0$ o que implica ter-se $\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2$, $\vartheta = 90^\circ$ e $\kappa = 0$. Neste caso, então, tem-se

$$\boxed{p=1} \mapsto \boxed{|\mathbf{E}_\omega|^2 = \mathbf{E}_\omega^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) = \mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2} \mapsto \boxed{\text{polarização circular}}.$$

Podemos, em síntese, escrever a classificação das polarizações como segue.

polarização linear	$\mapsto p=0 \ \& \ \kappa=1$	$\mapsto \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0$
polarização circular	$\mapsto p=1 \ \& \ \kappa=0$	$\mapsto \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \ \& \ \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 $
polarização elíptica	$\mapsto 0 < p < 1 \ \& \ 1 > \kappa > 0$	\mapsto restantes casos

Como se viu anteriormente,

$$\mathbf{E}_0^2 = (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) + 2i(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2).$$

Assim, a polarização circular corresponde a ter-se $\mathbf{E}_0^2 = 0$ pois, neste caso, os vectores \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 são perpendiculares ($\vartheta = \pi/2$) e têm o mesmo comprimento, i.e., $\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2$.

$$\boxed{\text{polarização circular}} \mapsto \boxed{p=1} \mapsto \boxed{\begin{matrix} \mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2 = 0 \\ |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| \end{matrix}} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_0^2 = 0}.$$

A polarização é linear quando $\sin(\vartheta) = 0$, i.e., quando $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0$. Mas, notando que

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* &= (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) \times (\mathbf{E}_1 - i\mathbf{E}_2) \\ &= -i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) + i(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_1) \\ &= -i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) - i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \\ &= -2i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = -2i(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)},$$

conclui-se que a polarização é linear quando $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0$, i.e., quando $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = 0$.

$$\boxed{\text{polarização linear}} \mapsto \boxed{p = 0} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = 0}$$

classificação das polarizações em função do vector complexo \mathbf{E}_0	\mapsto	polarização linear $\mapsto \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = 0$ polarização circular $\mapsto \mathbf{E}_0^2 = 0$ polarização elíptica $\mapsto \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* \neq 0 \ \& \ \mathbf{E}_0^2 \neq 0$
--	-----------	--

O parâmetro p pode ser considerado como o comprimento do seguinte vector real:

$$\boxed{\mathbf{p} = 2 \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2} = i \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*}{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*} \in \mathbb{R}^3} \mapsto \boxed{0 \leq p = |\mathbf{p}| = \sqrt{1 - \kappa^2} \leq 1}$$

Para a polarização elíptica ou circular, o vector \mathbf{p} é ortogonal ao plano onde se encontra a curva (cónica) da polarização (elipse ou circunferência). Este vector é nulo no caso da polarização linear.

Vamos dar, agora, alguns exemplos.

Primeiro exemplo – Consideremos que se tem

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2), \quad |\mathbf{E}_0|^2 = 1, \quad \mathbf{E}_0^2 = 0, \quad \kappa = 0, \quad p = 1.$$

Além disso,

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mp i (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \Rightarrow \mathbf{p} = \pm \mathbf{e}_3 = \pm \hat{\mathbf{k}}.$$

Neste caso é $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 / \sqrt{2}$ e $\mathbf{E}_2 = \pm \mathbf{e}_2 / \sqrt{2}$. Tem-se $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$, $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$ e $\mathbf{E}_0^2 = 0$. A polarização é, portanto, circular.

Segundo exemplo – Seja

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1+i\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u}^2 > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso é $\mathbf{E}_1 = \mathbf{u}/\sqrt{1+\alpha^2}$ e $\mathbf{E}_2 = \alpha\mathbf{u}/\sqrt{1+\alpha^2}$. Tem-se $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mathbf{0}$. A polarização, neste caso, é linear pois $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Note-se que

$$|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = \mathbf{u}^2 > 0, \quad \mathbf{E}_0^2 = \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + i \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right) \mathbf{u}^2 \neq 0, \quad |\mathbf{E}_0^2| = \mathbf{u}^2 > 0, \quad \kappa = 1.$$

Terceiro exemplo – Façamos

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{u}} \pm i \hat{\mathbf{v}}), \quad \hat{\mathbf{u}}^2 = \hat{\mathbf{v}}^2 = 1, \quad \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \neq 0, \quad \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}.$$

Neste caso é $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{u}}/\sqrt{2}$ e $\mathbf{E}_2 = \pm \hat{\mathbf{v}}/\sqrt{2}$. Tem-se $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$. A polarização é elíptica, com

$$|\mathbf{E}_0| = 1, \quad \mathbf{E}_0^2 = \pm i (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \neq 0, \quad |\mathbf{E}_0^2| = |\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}| \neq 0, \quad 0 < \kappa = |\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}| < 1.$$

Vem, ainda,

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mp i (\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \Rightarrow \mathbf{p} = \pm \sin(\vartheta) \mathbf{e}_3 = \pm \sin(\vartheta) \hat{\mathbf{k}},$$

onde $0 < \vartheta = \angle(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \angle(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) < 90^\circ$.

Vectores complexos: porquê?

Vamos explicar, de seguida, a razão pela qual a polarização de uma onda é mais adequadamente estudada através de vectores complexos do que através de vectores reais.

Um vector real, do espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , é naturalmente representado geometricamente por uma seta. A seta que representa $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3$ tem um comprimento $\ell \{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \} = |\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)| \geq 0$. Note-se que, só no caso da polarização circular, é que o comprimento $\ell > 0$ é sempre o mesmo em todos os instantes. Só na polarização linear é que

há instantes em que $\ell = 0$. Mas, tanto na polarização linear como na polarização elíptica, o comprimento ℓ varia ao longo de um período $T = 1/f = 2\pi/\omega$.

$$\left[\begin{array}{l} \ell \{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \} = |\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)| \in \mathbb{R}_0^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} \\ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \text{seta em } \mathbb{R}^3 \text{ de comprimento } \ell \text{ variável no tempo} \end{array} \right.$$

Não é suficiente dar um único vector $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, t = t_0) \in \mathbb{R}^3$ para caracterizar a polarização. A polarização só é conhecida quando se conhece

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a polarização é uma linha} \\ \text{ou conjunto de vectores} \\ \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3 \end{array}} \mapsto \boxed{\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq t \leq T = \frac{2\pi}{\omega} \right\}}.$$

Um vector complexo do espaço tridimensional \mathbb{C}^3 não pode ser representado por uma seta. A sua representação geométrica mais apropriada é por uma *ellipse orientada*. Aqui a palavra *ellipse* é utilizada *lato sensu*, i.e., pode ser uma de três coisas: (i) uma *ellipse stricto sensu*, com um semi-eixo maior a e um semi-eixo menor b , tais que $a > b$; (ii) uma circunferência, quando $a = b > 0$; (iii) um segmento de recta quando $a > 0$ e $b = 0$. Note-se que, sendo

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{excentricidade da} \\ \text{elipse de polarização} \end{array}} \mapsto \boxed{0 \leq \epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1},$$

se tem: (i) $0 < \epsilon < 1$, para uma *ellipse stricto sensu*; (ii) $\epsilon = 0$, para uma circunferência; (iii) $\epsilon = 1$, para um segmento de recta de comprimento a (mas, obviamente, com $b = 0$).

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3 \mapsto \ell(\mathbf{E}_0) = |\mathbf{E}_0| = \sqrt{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2} > 0 \\ \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \mapsto \text{elipse } \textit{lato sensu} \text{ orientada no plano } \mathbb{R}^2 \text{ da polarização} \end{array} \right.$$

Note-se que, para uma onda TEM (*transverse electromagnetic wave*), a *ellipse lato sensu* pertence a um plano da polarização que é perpendicular em relação ao vector de onda \mathbf{k} . Mesmo no caso da polarização linear o segmento de recta (em que a *ellipse* degenera) pertence ao plano da polarização que é normal a \mathbf{k} . Com efeito, esse plano é determinado não só por $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3$ mas também por $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3$.

Orientação da polarização

A orientação da *ellipse* é algo de que ainda não se falou nesta secção. Mas, tal como se viu na secção anterior, uma polarização caracterizada pelo número

$$\zeta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

tem uma orientação associada. Essa informação, que caracteriza a orientação, diz-nos qual a localização de ζ no plano complexo – no caso de não se tratar da polarização linear pois, nesse caso, a localização é $\Im\{\zeta\} = 0$. Assim, caso $\Im\{\zeta\} \neq 0$, tem-se

$$\left[\begin{array}{ll} \text{polarização direita} & \mapsto \zeta \in \mathfrak{D}, \\ \text{polarização esquerda} & \mapsto \zeta \in \mathfrak{E}. \end{array} \right.$$

Em síntese: a polarização de uma onda pode ser definida ou (i) pela classe infinita $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ ou (ii) por um único vector $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3$. Do ponto de vista matemático é, portanto, obviamente mais simples a descrição da polarização em termos de vectores complexos.

Vamos, agora, abordar a questão matemática da orientação da elipse de polarização. A definição de orientação pode ser traduzida matematicamente através do vector

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^3.$$

Mais precisamente,

$$\left[\begin{array}{ll} \text{polarização linear} & \mapsto \mathbf{E}_\omega \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} = 0 \\ \text{polarização não-linear} & \mapsto \mathbf{E}_\omega \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} \neq 0 \end{array} \right.$$

em que por polarização não-linear pretende-se dizer polarização circular ou elíptica. A definição matemática de orientação é, então, a que se apresenta a seguir.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{orientação da} & \mapsto \\ \text{polarização} & \end{array} \right. \left[\begin{array}{ll} \text{polarização direita} & \mapsto \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\mathbf{E}_\omega \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} \right) > 0 \\ \text{polarização esquerda} & \mapsto \hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\mathbf{E}_\omega \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} \right) < 0 \end{array} \right.$$

Notando que

$$\Phi(\zeta, t) = k\zeta - \omega t \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\omega \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial \Phi},$$

e, ainda, que

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_1 \cos(\Phi) - \mathbf{E}_2 \sin(\Phi) \\ \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial \Phi} = -\mathbf{E}_1 \sin(\Phi) - \mathbf{E}_2 \cos(\Phi) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{E}_\omega \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial \Phi} = -(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) [\sin(\Phi) \cos(\Phi) + \sin^2(\Phi)] \\ = -(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \left\{ \frac{1}{2} \sin(2\Phi) + \frac{1}{2} [1 - \sin(2\Phi)] \right\} \\ = -\frac{1}{2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \end{cases}$$

infere-se, então, que se tem

$$\boxed{\mathbf{E}_\omega \times \frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} = \frac{\omega}{2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)}$$

Deste modo, a classificação da orientação das polarizações reduz-se ao quadro seguinte.

orientação da polarização	↦	polarização direita ↦ $\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) > 0$
		polarização esquerda ↦ $\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) < 0$

Notando que se tem

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = -2i (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) \Rightarrow \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \frac{i}{2} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*)$$

este quadro ainda pode ser reescrito como segue.

orientação da polarização	\mapsto	polarização direita	$\mapsto i \left[\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*) \right] > 0$
		polarização esquerda	$\mapsto i \left[\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*) \right] < 0$

Notemos, entretanto, que (como se definiu anteriormente)

$$\mathbf{p} = 2 \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2} = i \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*}{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*} \in \mathbb{R}^3 .$$

Portanto, ainda se pode definir a orientação através deste vector real.

orientação da polarização	\mapsto	polarização direita	$\mapsto \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p} > 0$
		polarização esquerda	$\mapsto \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p} < 0$

Exemplo de aplicação

Consideremos, então, o seguinte exemplo de aplicação. Seja

$$\mathbf{E}_0 = \pm i \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 \right) .$$

Neste caso, vem

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mp i \left[\mathbf{E}_0 \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0^*) \right] = \mp i \left[(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{E}_0^* \right] = \mp i \left[(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \hat{\mathbf{k}} \right]$$

$$\therefore \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mp i |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{k}} \Rightarrow i \left[\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*) \right] = \pm |\mathbf{E}_0|^2 .$$

Tem-se, também,

$$\mathbf{p} = \pm \hat{\mathbf{k}} .$$

Conclui-se, assim, que

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_0 = i(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0) \quad \mapsto \quad \text{polarização circular direita,} \\ \mathbf{E}_0 = -i(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0) \quad \mapsto \quad \text{polarização circular esquerda.} \end{array} \right.$$

Comparação entre formalismos

Vamos, agora, estabelecer a relação entre o formalismo dos vectores complexos (analisado nesta secção) e o formalismo baseado nas coordenadas (analisado na secção anterior).

De modo a conduzir uma tal comparação, faz-se (com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$)

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_1 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_2 = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \end{array} \right.$$

$$\therefore \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) + i(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2)$$

donde

$$\left[\begin{array}{l} \zeta_1 = a_1 + i b_1 \in \mathbb{C} \\ \zeta_2 = a_2 + i b_2 \in \mathbb{C} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\mathbf{E}_0 = \zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_\omega(\zeta, t) = \Re \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(k\zeta - \omega t)] \} = \Re \{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) \exp[i(k\zeta - \omega t)] \} \\ \quad = \Re \{ (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) [\cos(k\zeta - \omega t) + i \sin(k\zeta - \omega t)] \} \\ \quad = \mathbf{E}_1 \cos(k\zeta - \omega t) - \mathbf{E}_2 \sin(k\zeta - \omega t) \end{array} \right.$$

Logo, para $\zeta = 0$ e, cometendo o abuso de linguagem

$$\mathbf{E}_\omega(t) = \mathbf{E}_\omega(\zeta = 0, t),$$

vem [convém, aqui, não confundir $\mathbf{E}_1 = \Re \{ \mathbf{E}_0 \}$ com $E_1(t)$ ou $\mathbf{E}_2 = \Im \{ \mathbf{E}_0 \}$ com $E_2(t)$]

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_\omega(t) = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{E}_2 \sin(\omega t) \\ \quad = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) \cos(\omega t) + (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2) \sin(\omega t) \\ \quad = E_1(t) \mathbf{e}_1 + E_2(t) \mathbf{e}_2 \end{array} \right.$$

$$\therefore \left[\begin{array}{l} E_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = A_1 \cos(\omega t) \cos(\theta_1) + A_1 \sin(\omega t) \sin(\theta_1), \\ E_2(t) = a_2 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t) = A_2 \cos(\omega t) \cos(\theta_2) + A_2 \sin(\omega t) \sin(\theta_2). \end{array} \right.$$

Nestas condições, obtém-se

$$\begin{cases} a_1 = A_1 \cos(\theta_1) \\ b_1 = A_1 \sin(\theta_1) \end{cases} \mapsto \boxed{\zeta_1 = a_1 + ib_1 = A_1 \exp(i\theta_1)}$$

$$\begin{cases} a_2 = A_2 \cos(\theta_2) \\ b_2 = A_2 \sin(\theta_2) \end{cases} \mapsto \boxed{\zeta_2 = a_2 + ib_2 = A_2 \exp(i\theta_2)}$$

pelo que

$$\boxed{\zeta = \varrho \exp(i\theta) = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{A_2}{A_1} \exp[i(\theta_2 - \theta_1)]} \Rightarrow \begin{cases} \varrho = A_2 / A_1 \\ \theta = \theta_2 - \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \end{cases}$$

Note-se, todavia, que não basta o conhecimento de $\tan(\theta)$ para determinar *univocamente* o ângulo $0 \leq \theta < 2\pi$, i.e., para encontrar a correcta localização do número complexo ζ no plano complexo. Tem de se considerar

$$\boxed{\varrho = |\zeta|} \mapsto \boxed{\varrho = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{a_1^2 + b_1^2}}} \quad \boxed{\theta = \arg\{\zeta\}} \mapsto \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{A_1 A_2} \\ \sin(\theta) = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{A_1 A_2} \end{cases}$$

Ou seja, o número complexo ζ é dado por

$$\boxed{\zeta = \varrho [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + i \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}}$$

Esta última equação permite fazer a comparação entre o formalismo desta secção e o formalismo da secção anterior. Note-se, contudo, que esta comparação exige que os vectores reais \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 (introduzidos nesta secção) residam no plano xy da secção anterior.

NOTA – Como é habitual, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_3$, onde

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

representa a base ortonormada (i.e., ortogonal e normada) do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Também, como é costume, o triedro $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ é direito, i.e.,

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Note-se que o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 é um espaço vectorial quadrático (i.e., munido de uma forma quadrática), tal que

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathcal{Q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\mathbf{v}|^2,$$

i.e.,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3), \quad |\mathbf{v}|^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{v} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

com \mathbf{I} representando a matriz identidade de terceira ordem.

A polarização é completamente determinada por um vector complexo. A representação gráfica de um vector complexo é uma elipse orientada. Nesta secção determinam-se, a partir do vector complexo, os eixos principais bem como as dimensões dos semi-eixos (maior e menor) desta elipse. Esta determinação dá origem à chamada representação axial do vector complexo.

3. Representação axial dos vectores complexos

Definição

No caso da polarização elíptica *stricto sensu* o vector complexo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2$ é representado por uma elipse orientada. A representação axial deste vector complexo consiste na determinação dos eixos principais e dos semi-eixos (maior a e menor b) da elipse exclusivamente a partir de $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2$.

Mais precisamente: chama-se *representação axial* do vector complexo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2$ ao vector complexo $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + i \mathbf{F}_2$, tal que $|\mathbf{F}_1| = a$ e $|\mathbf{F}_2| = b$, com $\mathbf{F}_1 = \Re\{\mathbf{F}_0\}$ e $\mathbf{F}_2 = \Im\{\mathbf{F}_0\}$.

Na polarização circular é $a = b$ e $\mathbf{E}_0^2 = 0$, de modo que a representação axial é desnecessária.

Representação Axial

Na secção anterior a definição matemática da polarização baseou-se no seguinte vector complexo:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3 \quad \mapsto \quad \mathbf{E}_0^2 = (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) + 2i(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \in \mathbb{C}.$$

A polarização é circular quando $\mathbf{E}_0^2 = 0$ e, neste caso, não é necessária a representação axial.

Por essa razão a análise desta secção só se aplica aos restantes casos: $\mathbf{E}_0^2 \neq 0$.

Definição matemática

Define-se a representação axial do vector $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ como sendo o novo vector complexo

$$\boxed{\text{representação axial do vector } \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3} \quad \mapsto \quad \boxed{\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + i \mathbf{F}_2 \in \mathbb{C}^3}$$

tal que

$$\boxed{\xi = \sqrt{\mathbf{E}_0^2} \in \mathbb{C}} \quad \mapsto \quad \boxed{\mathbf{F}_0 = \frac{|\xi|}{\xi} \mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3}$$

quando se tem $\xi^2 = \mathbf{E}_0^2 \neq 0$.

É importante salientar, em primeiro lugar, que os vectores complexos \mathbf{F}_0 e \mathbf{E}_0 se relacionam através do número complexo ζ , tal que

$$\frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{E}_0} = \zeta = \frac{|\xi|}{\xi} \in \mathbb{C}.$$

Suponhamos, então, que

$$\xi = \xi' + i \xi'' \in \mathbb{C}, \quad \xi' = \Re\{\xi\} \in \mathbb{R}, \quad \xi'' = \Im\{\xi\} \in \mathbb{R}.$$

Nestas condições, vem

$$\xi = r e^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + i r \sin \varphi, \quad r = |\xi| = \sqrt{(\xi')^2 + (\xi'')^2}, \quad \varphi = \arg\{\xi\} = \tan^{-1}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right).$$

Assim,

$$\zeta = \frac{|\xi|}{\xi} = \frac{r}{r \exp(i\varphi)} = e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi) \Rightarrow \begin{cases} |\zeta| = 1, \\ \arg\{\zeta\} = -\varphi. \end{cases}$$

Mas então, o vector real instantâneo associado a \mathbf{F}_0 é

$$\mathbf{F}(\zeta, t) = \Re\{\mathbf{F}_0 \exp[i\Phi(\zeta, t)]\} \in \mathbb{R},$$

enquanto que, associado a \mathbf{E}_0 , temos

$$\mathbf{E}(\zeta, t) = \Re\{\mathbf{E}_0 \exp[i\Phi(\zeta, t)]\} \in \mathbb{R}.$$

Em ambos os casos, tal como se viu na secção anterior,

$$\Phi(\zeta, t) = k\zeta - \omega t$$

representa a fase da onda. Vamos provar, então, que os vectores complexos \mathbf{E}_0 e \mathbf{F}_0 são representados geometricamente pela mesma elipse orientada (i.e., têm a mesma polarização).

Vejamus. Como $\mathbf{F}_0 = \zeta \mathbf{E}_0 = \exp(-i\varphi) \mathbf{E}_0$, resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\zeta, t) &= \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp(-i\varphi) \exp[i\Phi(\zeta, t)] \right\} \\ &= \Re \left\{ (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2) [\cos(\Phi - \varphi) + i\sin(\Phi - \varphi)] \right\} \\ &= \mathbf{E}_1 \cos(\Phi - \varphi) - \mathbf{E}_2 \sin(\Phi - \varphi). \end{aligned}$$

Donde

$$\boxed{\zeta = 0} \mapsto \begin{cases} \mathbf{E}(t) \equiv \mathbf{E}(\zeta = 0, t) \\ \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{F}(\zeta = 0, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{E}_2 \sin(\omega t) \\ \mathbf{F}(t) = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t + \varphi) + \mathbf{E}_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

de forma que

$$\boxed{\mathbf{F}(t) = \mathbf{E}\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)}.$$

Conclusão: os vectores \mathbf{E}_0 e \mathbf{F}_0 têm, efectivamente, a mesma polarização; são representados pela mesma elipse orientada. A única diferença é que a extremidade de $\mathbf{F}(t)$ não percorre em simultâneo com $\mathbf{E}(t)$ a mesma elipse orientada. Por exemplo: em $t=0$, é $\mathbf{F}(0) = \mathbf{E}(\varphi/\omega)$. Por outras palavras: a representação axial refere-se, como não podia deixar de ser, à mesma elipse orientada.

Comecemos por notar, desde já, que

$$|\xi|^2 = |\xi| |\xi| = |\xi^2| = |\mathbf{E}_0^2|.$$

Na secção anterior definiu-se um número κ , com $0 \leq \kappa \leq 1$, tal que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{relação entre os} \\ \text{parâmetros } \xi \in \mathbb{C} \\ \text{e } \kappa, p \in \mathbb{R} \end{array}} \mapsto \boxed{0 \leq \kappa = \frac{|\mathbf{E}_0^2|}{|\mathbf{E}_0|^2} = \frac{|\xi|^2}{|\xi^2|} = \sqrt{1 - p^2} \leq 1}.$$

Mas então, vem

$$\mathbf{F}_0^2 = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_0 = \frac{|\xi|^2}{\xi^2} \mathbf{E}_0^2 = \frac{|\xi|^2}{\xi^2} \xi^2 = |\xi|^2 = |\mathbf{E}_0^2| > 0$$

já que se descarta o caso em que $\mathbf{E}_0^2 = 0$. Ora, por outro lado, é

$$\mathbf{F}_0^2 = (\mathbf{F}_1 + i\mathbf{F}_2)^2 = (\mathbf{F}_1 + i\mathbf{F}_2) \cdot (\mathbf{F}_1 + i\mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1^2 - \mathbf{F}_2^2) + 2i(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2).$$

Infere-se, assim, que

$$(\mathbf{F}_1^2 - \mathbf{F}_2^2) + 2i(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = |\mathbf{E}_0^2| > 0.$$

Deste modo, tem-se necessariamente

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{F}_1^2 - \mathbf{F}_2^2 = |\mathbf{E}_0^2| > 0 \\ \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = 0 \end{array}}$$

pelo que

$$\boxed{\begin{array}{l} a = |\mathbf{F}_1| = |\Re\{\mathbf{F}_0\}| \\ b = |\mathbf{F}_2| = |\Im\{\mathbf{F}_0\}| \end{array}} \mapsto \boxed{a^2 = |\mathbf{F}_1|^2 > b^2 = |\mathbf{F}_2|^2}$$

onde, portanto,

$$\left[\begin{array}{l} a \mapsto \text{semi-eixo maior da elipse orientada de } \mathbf{E}_0, \\ b \mapsto \text{semi-eixo menor da elipse orientada de } \mathbf{E}_0. \end{array} \right.$$

É, assim, possível calcular a elipticidade (ou relação axial)

$$\boxed{\text{elipticidade}} \mapsto \boxed{e = \frac{b}{a}}$$

bem como a excentricidade (não confundir com elipticidade)

$$\boxed{\text{excentricidade}} \mapsto \boxed{\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}$$

da elipse de polarização. Tem-se, obviamente,

$$\epsilon = \sqrt{1 - e^2}, \quad e = \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Sublinhe-se que os vectores reais

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{eixos principais} \\ \text{da elipse} \end{array}} \mapsto \left[\begin{array}{l} \mathbf{F}_1 = \Re\{\mathbf{F}_0\} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{F}_2 = \Im\{\mathbf{F}_0\} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

definem os eixos principais da elipse pois $\mathbf{F}_1 \perp \mathbf{F}_2$. Mais: como $a = |\mathbf{F}_1|$ e $b = |\mathbf{F}_2|$, o vector \mathbf{F}_1 define a direcção do eixo maior e o vector \mathbf{F}_2 define a direcção do eixo menor.

Tal como já referido anteriormente, a área \mathcal{A} da elipse é dada pela simples expressão

$$\boxed{\text{área da elipse}} \mapsto \boxed{\mathcal{A} = \pi a b}.$$

Já o perímetro \mathcal{P} da elipse é dado por uma expressão (muito) mais complicada:

$$\boxed{\text{perímetro da elipse}} \mapsto \boxed{\mathcal{P} = 4a E(\epsilon)}.$$

Nesta expressão, $E(\epsilon)$ representa o integral elíptico completo de segunda espécie:

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2(\theta)} d\theta.$$

Em MATLAB[®] este integral é obtido, na *Symbolic Math Toolbox*, através da instrução

$$\boxed{\text{MATLAB}^{\text{®}}}$$

```

>> syms m
>> ellipticE(m)

```

Pode fazer-se, e.g.

```

>> format long
>> ellipticE(0.5)

```

$$\mapsto \begin{array}{l} \text{ans} = \\ 1.350643881047676 \end{array}$$

Note-se que no caso de uma circunferência – em que $\epsilon = 0$ – obtém-se simplesmente

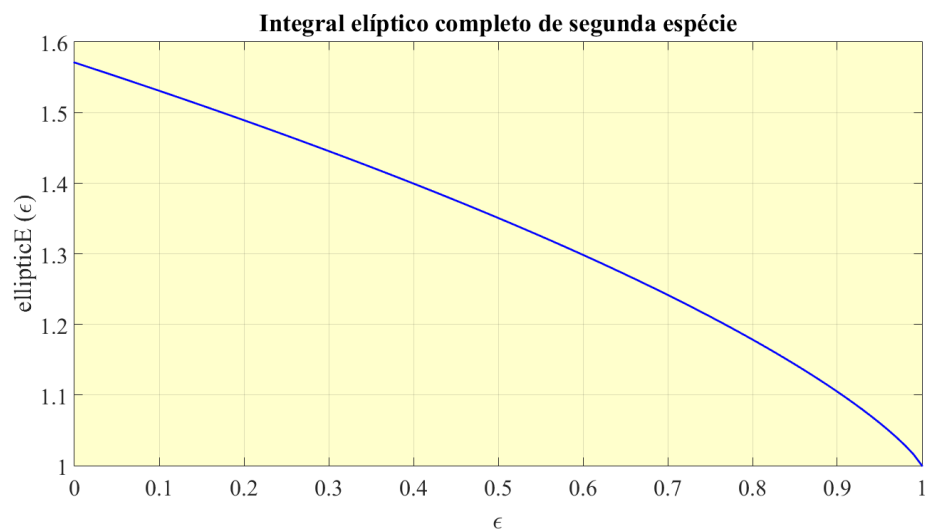
$$E(0) = \frac{\pi}{2} \mapsto \mathcal{P} = 2\pi a,$$

como é bem conhecido. Para obter o gráfico de $E(\epsilon)$, no intervalo $0 \leq \epsilon \leq 1$, podemos fazer


```

MATLAB® ↦ [ e_min=0; e_max=1; N=100;
              e=linspace(e_min,e_max,N);
              plot(e,ellipticE(e),'b','LineWidth',2)
              axis([e_min e_max 1.0 1.6])
              title('Integral elíptico completo de segunda espécie')
              xlabel('\epsilon')
              ylabel('ellipticE(\epsilon)')
              grid on
              ax = gca;
              ax.Color=[1.0,1.0,0.8];
              ax.FontSize=20;
              ax.FontName='serif';
            ]

```



Exemplo de aplicação – utilização de coordenadas (caso geral)

Sendo $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base ortonormada de \mathbb{R}^3 , consideremos o seguinte exemplo de aplicação:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}_1 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{E}_2 = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right] \mapsto \boxed{\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3}.$$

Logo, no caso geral, será

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ \mathbf{E}_1^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{cases} \quad [\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.]$$

O caso particular da polarização linear corresponde a $\mathbf{E}_1 = 0$ ou, alternativamente, a $\mathbf{E}_2 = q\mathbf{E}_1$ em que $q \in \mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{\text{polarização linear}} \mapsto \boxed{\mathbf{E}_2 = q\mathbf{E}_1} \mapsto \begin{cases} b_1 = q a_1, \\ b_2 = q a_2, \\ b_3 = q a_3, \end{cases}$$

de forma a obter $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0$ (neste caso).

Notemos que, em geral, se tem

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \boxed{\mathbf{S} = |\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) > 0}.$$

Nestas condições, vem (caso geral)

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) + 2i(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \\ = [(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] + 2i(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ = R \exp(i\Psi) = R \cos(\Psi) + i R \sin(\Psi) \end{cases} \mapsto \begin{cases} R = |\mathbf{E}_0^2| \\ \Psi = \arg\{\mathbf{E}_0^2\} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} R = \sqrt{(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2)^2 + 4(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)^2} = \sqrt{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2 - 4(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2} \\ = (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) \sqrt{1 - \frac{4(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2}{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2}} = S \sqrt{1 - \frac{4(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2}{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2}}, \\ \tan(\Psi) = \frac{2 \tan(\Psi/2)}{1 - \tan^2(\Psi/2)} = \frac{2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2} = \frac{2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)/(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1)}{1 - (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2)/(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1)}, \end{cases}$$

donde

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{|\mathbf{E}_0^2|}{|\mathbf{E}_0|^2} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}} = \sqrt{1 - \frac{4(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^2}{(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)^2}} = \sqrt{1 - p^2}, \\ p = 2 \frac{|\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2|}{\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2} = \frac{2}{\mathbf{S}} |\mathbf{E}_1| |\mathbf{E}_2| \sin(\vartheta) = \frac{2}{\mathbf{S}} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \sin(\vartheta), \\ \tan\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1^2} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \end{array} \right.$$

Tem-se, também,

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \boxed{\mathbf{R} = \sqrt{\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \right]^2 + 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}}.$$

Desta forma, infere-se que

$$\boxed{\xi = \sqrt{\mathbf{E}_0^2} = \sqrt{\mathbf{R}} \exp\left(i \frac{\Psi}{2}\right) \in \mathbb{C}}.$$

No caso da polarização linear, tem-se

$$\mathbf{E}_2 = q \mathbf{E}_1 \Rightarrow \mathbf{E}_0^2 = \left[(1 - q^2) + 2iq \right] (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

donde se infere que

$$\boxed{\text{polarização linear}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = (1 + q^2) (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \\ \tan\left(\frac{\Psi}{2}\right) = q. \end{array} \right.$$

No caso geral, vem

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} \kappa = \frac{|\mathbf{E}_0^2|}{|\mathbf{E}_0|^2} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}} \\ = \frac{\sqrt{\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \right]^2 + 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \end{array}}.$$

No caso particular da polarização linear, em que $\mathbf{E}_2 = q \mathbf{E}_1$, é

$$\boxed{\text{polarização linear}} \mapsto \boxed{\mathbf{S} = (1 + q^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}.$$

Logo, como já se tinha discutido previamente,

$$\boxed{\text{polarização linear}} \mapsto \boxed{\mathbf{R} = \mathbf{S}} \mapsto \boxed{\kappa = 1} \mapsto \boxed{p = 0}.$$

Na caso particular da polarização circular, tem-se $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ e $\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2$, pelo que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$. Mas, então, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ neste caso e, conseqüentemente,

$$\boxed{\text{polarização circular}} \mapsto \left[\begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{S} = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \end{array} \right] \mapsto \boxed{\kappa = 0} \mapsto \boxed{p = 1}.$$

Portanto, no caso geral,

$$\boxed{\mathbf{F}_0 = \frac{|\xi|}{\xi} \mathbf{E}_0 = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R} \exp\left(i \frac{\Psi}{2}\right)} \mathbf{E}_0 = \exp\left(-i \frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_0}.$$

Ou seja,

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + i \mathbf{F}_2 = \left[\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \right] (\mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2) \\ = \left[\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_1 + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_2 \right] + i \left[\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_2 - \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_1 \right] \end{array} \right]$$

donde se tira que

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \left[\begin{array}{l} \mathbf{F}_1 = \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_1 + \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{F}_2 = \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_2 - \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{E}_1 \end{array} \right].$$

Ou, ainda,

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \begin{cases} \mathbf{F}_1 = \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \left[\mathbf{E}_1 + \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \mathbf{E}_2 \right] \\ \mathbf{F}_2 = \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right) \left[\mathbf{E}_2 - \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \mathbf{E}_1 \right] \end{cases}.$$

Conclui-se, portanto, que

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \begin{cases} a^2 = |\mathbf{F}_1|^2 = \mathbf{F}_1^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) \cos(\Psi) + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \sin(\Psi) \\ b^2 = |\mathbf{F}_2|^2 = \mathbf{F}_2^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) \cos(\Psi) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \sin(\Psi) \end{cases}$$

onde se atendeu a que

$$\begin{cases} \sin(\Psi) = 2 \sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right), \\ \cos^2\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\Psi)], \\ \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Psi)]. \end{cases}$$

No caso da polarização circular, é $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$ e $\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2 = 0$, donde

$$\boxed{\text{polarização circular}} \mapsto a^2 = b^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) = \mathbf{E}_1^2 \mapsto a = b = |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|.$$

Sendo $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ o vector de onda, designemos – como é costume – por $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ o correspondente vector unitário, com $k = |\mathbf{k}|$. Façamos, então,

$$\boxed{\text{vector de onda unitário}} \mapsto \hat{\mathbf{k}} = \cos(\alpha) \mathbf{e}_1 + \cos(\beta) \mathbf{e}_2 + \cos(\gamma) \mathbf{e}_3,$$

onde $\hat{\mathbf{k}}$ é definido pelos *co-senos directores*, tais que

$$\boxed{\text{co-senos directores}} \mapsto \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1}{k} = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \\ \cos(\beta) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2}{k} = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \\ \cos(\gamma) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3}{k} = \frac{k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\hat{\mathbf{k}}^2 = \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1}$$

A orientação da polarização, por sua vez, é definida como segue:

$$\boxed{\text{orientação da polarização}} \mapsto \begin{cases} \text{polarização direita} & \mapsto \mathcal{O} > 0 \\ \text{polarização esquerda} & \mapsto \mathcal{O} < 0 \end{cases}$$

Nesta definição introduziu-se o parâmetro orientação, tal que

$$\boxed{\text{parâmetro da orientação}} \mapsto \boxed{\mathcal{O} = \hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)}$$

Tem-se

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3,$$

daí que

$$\boxed{\text{caso geral}} \mapsto \boxed{\mathcal{O} = (a_2 b_3 - a_3 b_1) \cos(\alpha) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cos(\beta) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cos(\gamma)}$$

Programa MATLAB®

Apresenta-se, de seguida, um programa MATLAB® que desenha a elipse de polarização a partir de uma única informação – a do vector complexo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$. Este programa admite que ambos os vectores reais $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ se encontram no plano $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e que se tem $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_3$. A variação temporal com $\Omega = \omega t$ é dada por

$$\mathbf{E}_\omega(\zeta, \Omega) = \mathbf{E}_1 \cos(k\zeta - \Omega) - \mathbf{E}_2 \sin(k\zeta - \Omega).$$

Considerando o ponto $\zeta = 0$ e fazendo, por abuso de notação, $\mathbf{E}_\omega(\Omega) = \mathbf{E}_\omega(\zeta = 0, \Omega)$, vem

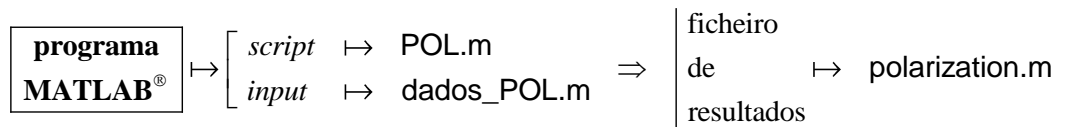
$$\mathbf{E}_\omega(\Omega) = \mathbf{E}_1 \cos(\Omega) + \mathbf{E}_2 \sin(\Omega).$$

Introduzindo, então,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_2 = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{E}_\omega(\Omega) = E_1(\Omega) \mathbf{e}_1 + E_2(\Omega) \mathbf{e}_2 \mapsto \begin{cases} E_1(\Omega) = a_1 \cos(\Omega) + b_1 \sin(\Omega), \\ E_2(\Omega) = a_2 \cos(\Omega) + b_2 \sin(\Omega), \end{cases}$$

é possível geral a curva (ou segmento de recta) da polarização fazendo $0 \leq \Omega \leq 2\pi$.

O programa que se segue tem duas partes: um *script* (programa principal) e um *ficheiro de dados* (necessário para fornecer os dados de entrada para o programa principal). Quando o programa corre produz um gráfico e um *ficheiro de resultados*.



POL.m

```
% PROPAGAÇÃO & ANTENAS
%
% Carlos R. Paiva
%
% 23 -- Agosto -- 2015
%
% Este é o script POL.m
%
% Este programa destina-se a visualizar a polarização de uma onda
% EM, dados os vectores reais E1 = a1*e1+a2*e2 e E2 = b1*e1+b2*e2,
% calculando os eixos maior e menor da elipse (de polarização)
%
close all
clear all

dados_POL;
```

```
% Setas dos vectores E1 e E2
X=[a1 b1];
Y=[a2 b2];

% Produtos interno e externo entre E1 e E2
E_dot=dot(E1,E2)
E_cross=cross(E1,E2)

% Orientação da polarização
e3=[0 0 1];
orientation=dot(e3,E_cross)

% Grandezas auxiliares
E0=E1+1i*E2
z1=dot(E1,E1)-dot(E2,E2);
z2=2*E_dot;
E0_square=z1+1i*z2
zeta=sqrt(E0_square)
csi=abs(zeta)/zeta
F0=csi*E0;
F1=real(F0)
F2=imag(F0)
a=sqrt((dot(F1,F1)))
b=sqrt((dot(F2,F2)))
eccentricity=sqrt(1-b^2/a^2)
area=pi*a*b

% Máximo e mínimo da variação do parâmetro omega
omega_min=0;
omega_max=2*pi;

% Traça a curva de polarização
omega=linspace(omega_min,omega_max,n_max);
x=a1*cos(omega)+b1*sin(omega);
y=a2*cos(omega)+b2*sin(omega);
plot(x,y,'b')
axis equal
axis off
hold on

% Traça os eixos maior e menor da elipse
X_prime=[F1(1) F2(1)];
Y_prime=[F1(2) F2(2)];
compass(X_prime,Y_prime,'b')
c1=F1(1); c2=F1(2);
d1=F2(1); d2=F2(2);
plot([-c1 0],[-c2 0],'--b')
plot([-d1 0],[-d2 0],'--b')
```



```

% Traça os vectores E1 e E2
compass(X,Y,'r')
plot([-a1 0],[-a2 0],'--r')
plot([-b1 0],[-b2 0],'--r')

% Marca o centro da elipse
plot(0,0,'ok','MarkerFaceColor','b','MarkerSize',8)

% Resultados apresentados no ficheiro «polarization.m»
fid = fopen('polarization.m','w');
fprintf(fid,'%28s\n','Resultados do programa POL.m')
fprintf(fid,'%340s\n\n','Autoria: Carlos R. Paiva, Agosto de 2015')
fprintf(fid,'%20s\n','The polarization is:')
fprintf(fid,'%33s\n','Right-handed, if ORIENTATION > 0;')
fprintf(fid,'%32s\n','Left-handed, if ORIENTATION < 0.')
fprintf(fid,'%41s\n\n','For linear polarization, ORIENTATION = 0.')
fprintf(fid,'ORIENTATION = %5.4f\n\n',orientation)
fprintf(fid,'%20s\n','The ECCENTRICITY is:')
fprintf(fid,'%33s\n','e = 0, for circular polarization;')
fprintf(fid,'%39s\n','0 < e < 1, for elliptical polarization;')
fprintf(fid,'%31s\n\n','e = 1, for linear polarization.')
fprintf(fid,'ECCENTRICITY = %5.4f\n\n',eccentricity)
fclose(fid);

```

dados_POL.m

```

% PROPAGAÇÃO & ANTENAS
%
% Carlos R. Paiva
%
% 23 -- Agosto -- 2015
%
% Este é o ficheiro de INPUT para o script POL.m
%

% Números de pontos a calcular
n_max=1000;

% Vector real E1
a1=-1;
a2=3;
E1=[a1 a2 0];
E1_square=dot(E1,E1);

```

```
% Vector real E2
b1=3;
b2=-1;
E2=[b1 b2 0];
E2_square=dot(E2,E2);
```

polarization.m

Resultados do programa POL.m

Autoria: Carlos R. Paiva, Agosto de 2015

The polarization is:
Right-handed, if ORIENTATION > 0;
Left-handed, if ORIENTATION < 0.
For linear polarization, ORIENTATION = 0.

ORIENTATION = -8.0000

The ECCENTRICITY is:
e = 0, for circular polarization;
0 < e < 1, for elliptical polarization;
e = 1, for linear polarization.

ECCENTRICITY = 0.8660

Na página seguinte apresenta-se o gráfico produzido por este programa. Os dados específicos correspondem aos contidos no *ficheiro de dados* ou *input*.

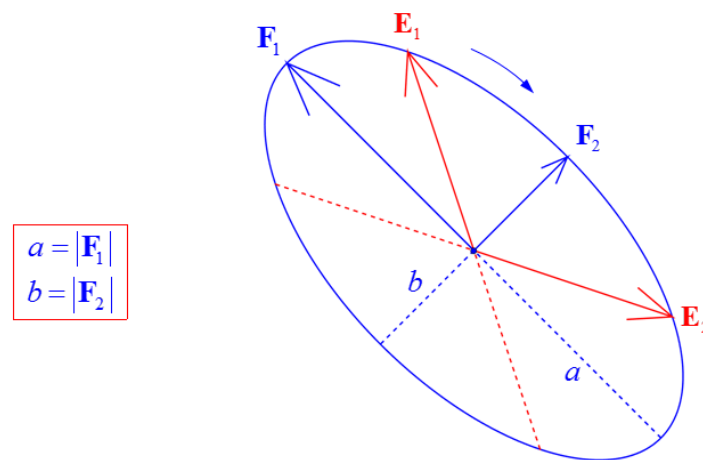
Sublinhe-se, todavia, que o programa apenas cria a curva de polarização bem como os segmentos de recta (eixos ou vectores).

Os comentários que acompanham o gráfico foram inseridos através do programa MathType do PowerPoint (Microsoft Office). Note-se que o gráfico foi introduzido no PowerPoint através de uma imagem criada no MATLAB em formato TIFF image (*.tif).

Polarização elíptica esquerda

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2 \mapsto \begin{cases} \mathbf{E}_1 = 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{E}_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \neq 0 \\ \mathbf{E}_0^2 \neq 0 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \text{Polarização} \\ \text{elíptica} \end{matrix}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2) < 0 \mapsto \text{Polarização elíptica esquerda}$$



Apresenta-se, aqui, uma pequena lista bibliográfica sobre polarização.

Bibliografia

Lista bibliográfica

- Ismo V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1992 (Chapter 1, pp. 1—16)
- Hollis C. Chen, *Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate-Free Approach*. Singapore: McGraw-Hill, 1985 (Chapter 3, pp. 89—122)
- Jin Au Kon, *Electromagnetic Wave Theory*. Cambridge, MA: EMW Publishing, 2005 (Section 1.2, pp. 42—55)
- Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics, Second Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2012 (Section 4.4, pp. 146—166)
- Bahaa E. A. Saleh and Malvin Carl Teich, *Fundamentals of Photonics, Second Edition*. Hoboken, NJ: Wiley, 2007 (Chapter 6, pp. 197—242)
- Florian Scheck, *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*. Berlin: Springer, 2012 (Sections 4.2.2, 4.2.3, pp. 205—213)
- Keigo Iizuka, *Elements of Photonics – Vol. I: In Free Space and Special Media*. New York: Wiley, 2002 (Chapters 6—7, pp. 362—503)