

# Mecânica Computacional - PB 02

Note Title

3/9/2021

## 1.5 Problema 7

Considere o problema,

$$-u''(x) + u(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

o qual se pretende resolver pelo método dos elementos finitos.

- Obtenha a formulação fraca do problema.
- Escreva as expressões para a matriz de rigidez e o vetor de forças e explique como são obtidas.
- Estabeleça o sistema de equações a resolver para uma malha de 4 elementos lineares.
- Resolva-o e compare com a solução exata. ( $u_{\text{exato}} = -0.269e^x - 0.735e^{-x} + 1$ )
- Resolva o mesmo problema utilizando dois elementos quadráticos. Compare a solução obtida com as anteriores

(7a)

$$r(u) = -u'' + u - 1$$

Pelo método dos resíduos ponderados:  $\left[ \int r(u) \cdot v \, dx = 0 \right]$

$$\int_0^1 (-u''v + uv - v) \, dx = 0, \quad \forall v \text{ admissível}$$

Utilizando integração por partes:  $\left[ \int f'g = (fg)' - \int fg' \right]$

$$\int_0^1 (u'v' + uv - v) \, dx + [-u'v]_0^1 = 0, \quad \forall v \text{ admissível}$$

Sendo as condições de fronteira essenciais (e homogêneas), a função de teste é nula na fronteira:  $v(1) = v(0) = 0$

$$\int_0^1 (u'v' + uv - v) \, dx - u'(1)v(1) \cancel{=} 0 + u'(0)v(0) \cancel{=} 0 = 0, \quad \forall v \text{ admissível}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (u'v' + uv) \, dx = \int_0^1 v \, dx, \quad \forall v \text{ admissível}$$

(7b)

- Escreva as expressões para a matriz de rigidez e o vetor de forças e explique como são obtidas.

→ sistema de equações lineares que nos permitem obter a solução aproximada do problema.

Método de Galerkin:

Aproximações de  $u$  e  $v$  utilizando o mesmo conjunto de funções, com um certo número  $N$  de incógnitas

$$u_N = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i$$

$$v_N = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) v_j$$

$N$  - número de incógnitas

$v_j$  - grãos de liberdade

$\phi_i$  - funções de base

permite Cfs

linearmente independentes essenciais

globais

contínuas

$$\int_0^1 (u'v' + uv) \, dx = \int_0^1 v \, dx, \quad \forall v \text{ admissível}$$

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^N \phi_j' u_j \sum_{i=1}^N \phi_i' v_i + \sum_{j=1}^N \phi_j' u_j \sum_{i=1}^N \phi_i' v_i - \int_0^1 \sum_{i=1}^N \phi_i' v_i = 0, \quad \forall v_i$$

$$u_N' = \sum_{j=1}^N \phi_j' u_j$$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \left( (\phi_i' \phi_j') + (\phi_j' \phi_i) \right) du - \int_0^1 \phi_i' du \right] = 0, \quad \forall v_i$$

$$v_N' = \sum_{i=1}^N \phi_i' v_i$$

(simétrica)  $K_{ij}^G$

$$K_{ij}^G = K_{ji}^G = \int_0^1 (\phi_i' \phi_j' + \phi_j' \phi_i) du$$

$f_i^G$

$$f_i^G = \int_0^1 \phi_i' du$$

Matriz de rigidez global

Vector de fuerza global

$$\sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^N K_{ij}^G u_j - f_i^G \right] v_i = 0, \quad \forall v_i$$

$$\rightarrow \left( \sum_{j=1}^N K_{1j}^G u_j - f_1^G \right) v_1 + \dots + \left( \sum_{j=1}^N K_{Nj}^G u_j - f_N^G \right) v_N = 0, \quad \forall v_i$$

$$\Rightarrow (K_{11}^G u_1 - f_1^G + \dots + K_{1N}^G u_N - f_1^G) v_1 + \dots + (K_{N1}^G u_1 - f_N^G + \dots + K_{NN}^G u_N - f_N^G) v_N = 0, \quad \forall v_i$$

Matriz de rigidez de um elemento (utilizando coordenadas locais)

$$K_{ij}^e = \int_0^h (\phi_i' \phi_j' + \phi_j' \phi_i) d\bar{x}$$

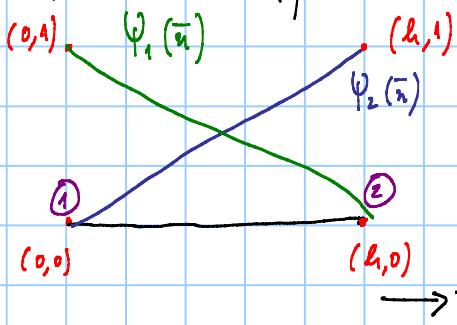
Vector de fuerza local

$$f_i^e = \int_0^h \phi_i' d\bar{x}$$

7c)

- c) Estabeleça o sistema de equações a resolver para uma malha de 4 elementos lineares.

Particulares funções de base,  $\psi_i$ :

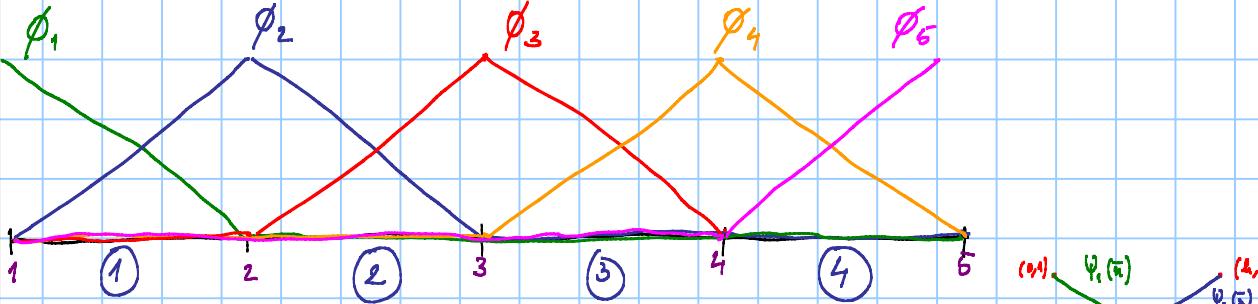


Parcialmente interpolatória:  $\psi_i^e(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Partição da unidade:  $\sum_{i=1}^n \psi_i^e(u) = 1$

Elemento linear:  $\psi_1(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h}$

$$\psi_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h}$$



$$K_{ij}^e = \int_0^h (\phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j) d\bar{u}$$

$$f_i^e = \int_0^h \phi_i d\bar{u}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(\bar{u}) &= 1 - \frac{\bar{u}}{h} \\ \psi_2(\bar{u}) &= \frac{\bar{u}}{h} \end{aligned}$$

$$K_{11}^e = \int_0^h (\psi_1' \psi_1' + \psi_1 \psi_1) d\bar{u} = \int_0^h \left[ \left( -\frac{1}{h} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\bar{u}}{h} \right)^2 \right] d\bar{u}$$

$$= \int_0^h \left( \frac{1}{h^2} + 1 - \frac{2\bar{u}}{h} + \frac{\bar{u}^2}{h^2} \right) d\bar{u} = \left[ \left( \frac{1}{h^2} + 1 \right) \bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{h} + \frac{\bar{u}^3}{3h^2} \right]_0^h$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{h^2} + 1 \right) h - \frac{h^2}{h} + \frac{h^3}{3h^2} \right] = \frac{1}{h} + h - h + \frac{h}{3} = \frac{1}{h} + \frac{h}{3} //$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e = \int_0^h (\psi_1' \psi_2' + \psi_1 \psi_2) d\bar{u} = \int_0^h \left[ -\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} + \left( 1 - \frac{\bar{u}}{h} \right) \left( \frac{\bar{u}}{h} \right) \right] d\bar{u}$$

$$= \int_0^h \left( -\frac{1}{h^2} + \frac{\bar{u}}{h} - \frac{\bar{u}^2}{h^2} \right) d\bar{u} = \left[ -\frac{\bar{u}}{h^2} + \frac{\bar{u}^2}{2h} - \frac{\bar{u}^3}{3h^2} \right]_0^h = -\frac{1}{h} + \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$K_{22}^e = \int_0^h (\psi_2' \psi_2' + \psi_2 \psi_2) d\bar{u} = \int_0^h \left[ \left( -\frac{1}{h} \right)^2 + \left( \frac{\bar{u}}{h} \right)^2 \right] d\bar{u} = \left[ \frac{\bar{u}^2}{h} + \frac{\bar{u}^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{1}{h} + \frac{h}{3}$$

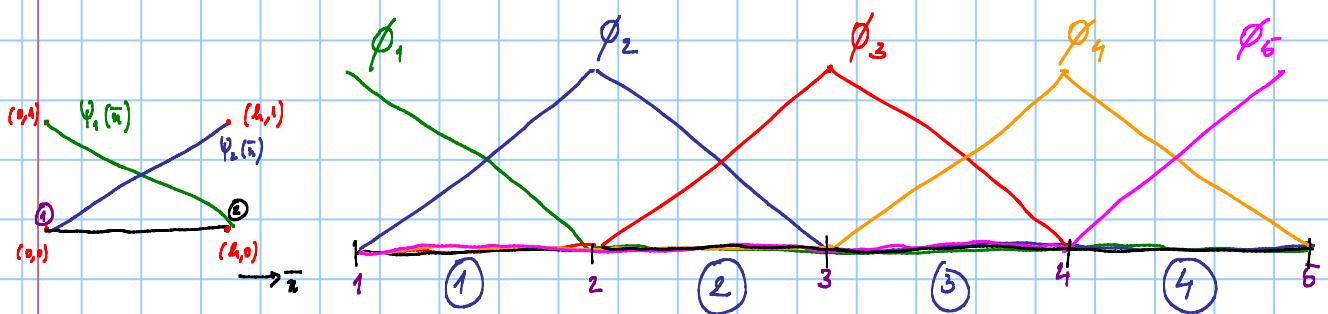
$$f_1^e = \int_0^h \phi_1 d\bar{u} = \int_0^h \left( 1 - \frac{\bar{u}}{h} \right) d\bar{u} = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$$

$$f_2^e = \int_0^h \phi_2 d\bar{u} = \int_0^h \frac{\bar{u}}{h} d\bar{u} = \frac{h}{2}$$

$$h = \frac{1}{4}$$

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \Rightarrow K^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow K^e = \begin{bmatrix} \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} \end{bmatrix}$$

$$f^e = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix} \Rightarrow f^e = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$



Ligações entre global e local faz-se através da  
matriz de conectividade / topologia da malha

	1	2	→ local
1	1	2	
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	

global

## Assemblagem

$$K_{ij}^G = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \quad f_i^G = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} + f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow K^e = \begin{bmatrix} \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} \end{bmatrix} \quad f^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^G u_j = f_i^G$$

$$u_1 = u_5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} + R_1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} + R_5 \end{bmatrix}$$

7d)

d) Resolva-o e compare com a solução exata. ( $u_{exato} = -0.269e^x - 0.735e^{-x} + 1$ )

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{8} + R_1 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} + R_5 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} & 0 \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} \\ 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} \mu_2 \approx 0,0857 \\ \mu_3 \approx 0,1137 \\ \mu_4 \approx 0,0857 \end{array} \right]$$

Solução exata

(PB02 - sol.Exacta.m)

 $\rightarrow \text{dfsol} =$  $\exp(1-x)/(\exp(1)+1) - \exp(x)/(\exp(1)+1)$ 

$$\mu_2 = \mu\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,0853 \quad \mu_3 = \mu\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,1132 \quad \mu_4 = \mu\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0,0853$$