Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - MEMec, LENO - versão A

10 de Novembro de 2018 - 9 horas

I (6 val.)

1. Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{(n+1)\,3^n + 5^{n+1}}{n^2 + n \ + 7^n}\,, \qquad v_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!n^n}{2^{n^2}}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões u_n e v_n.

(ii) A sucessão $w_n = (-1)^n u_n + \operatorname{arctg} v_n$ é limitada? Justifique e diga se tem sublimites.

Resolução.

(i)

$$\lim u_n = \lim \frac{(n+1)\,3^n + 5^{n+1}}{n^2 + n \ + 7^n} = \lim \frac{5^n}{7^n}\frac{\frac{(n+1)}{(5/3)^n} + 5}{\frac{n^2}{7^n} + \frac{n}{7^n} + 1} = 0\frac{0+5}{0+0+1} = 0$$

uma vez que da escala de sucessões

$$\lim \frac{(n+1)}{(5/3)^n} = 0\,, \qquad \lim \frac{n^2}{7^n} = 0\,, \qquad \lim \frac{n}{7^n} = 0\,.$$

$$\lim v_n = \lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!n^n}{2^{n^2}}} = \lim \frac{\frac{(2n+2)!(n+1)^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(2n)!n^n}{2^{n^2}}} =$$

$$= \lim \frac{(n+1)^2(2n+1)}{2\,4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{n^3}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0.1.1.e = 0$$

(ii) Tem-se que $-u_n \leq (-1)^n u_n \leq u_n$. Como a sucessão u_n é convergente para 0, a sucessão $(-1)^n u_n$ é convergente para 0. Sendo v_n uma sucessão convergente para 0, $\operatorname{arctg} v_n$ converge para $\operatorname{arctg} 0 = 0$. A sucessão w_n é convergente, pois é representada pela soma de duas sucessões convergentes, logo w_n é uma sucessão limitada. Sendo a sucessão w_n convergente para 0, o conjunto dos sublimites de w_n é assim $\{0\}$.

∎

2. Considere a sucessão de termos positivos definida por

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que a sucessão x_n é decrescente.

(ii) A sucessão x_n é convergente? Justifique e determine se existir o limite da sucessão.

Resolução.

(i) $x_2 = 1/2 < x_1$. Pretende-se provar que $x_{n+1} - x_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja que a sucessão é decrescente. Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $x_2 - x_1 \leq 0$. Mostre-se que se $x_{m+1} - x_m \leq 0$ então $x_{m+2} - x_{m+1} \leq 0$.

$$x_{m+2} - x_{m+1} = \frac{(x_{m+1} - x_m) + x_{m+1}x_m(x_m - x_{m+1})}{(1 + x_m^2)(1 + x_{m+1}^2)} = \frac{(x_{m+1} - x_m)(1 - x_{m+1}x_m)}{(1 + x_m^2)(1 + x_{m+1}^2)} < 0,$$

pois $x_{m+1} - x_m \leq 0$ da hipótese de indução e $1 - x_{m+1}x_m = 1 - \frac{x_m^2}{1+x_m^2} > 0$.

(ii) Uma vez que a sucessão x_n é decrescente e de termos positivos, tem-se $0 < x_n \leq x_1 = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Como a sucessão é monotóna e limitada, então a sucessão x_n é convergente, represente-se o limite de x_n por x.
Toda a subsucessão de x_n é convergente, em particular $x_{n+1} \to x$. Por outro lado a sucessão $\frac{x_m}{1+x_m^2}$ também é convergente e o seu limite é $\frac{x}{1+x^2}$, vindo

$$x = \frac{x}{1 + x^2} \Rightarrow x = 0$$

∎

II (14 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|e^{-x^2/2}, & \text{se } x \leq 0. \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right), & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

(i) A função f é contínua em $x = 0$? Justifique.

(ii) Defina a função derivada de f.

(iii) Analise a monotonia de f em $\mathbb{R}^-$. A função f tem extremos relativos em $\mathbb{R}^-$? Justifique.

(iv) Conclua se a função f tem inversa quando restrita a $[-4, -2]$ e determine, se existir, a derivada da função inversa em $f(-3)$.

Resolução.

(i) A função f não é contínua em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \neq f(0) = 0$$

(ii) Para $x < 0$ a função f é diferenciável pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis. Para $x > 0$ a função f é diferenciável pois resulta da soma, quociente e composição de funções diferenciáveis. Em $x = 0$ como a função f não é contínua também não é diferenciável.

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x^2/2}(1 - x^2), & \text{se } x < 0. \\ \dfrac{e^x(x - 1) + 1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^2}, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

(iii)

$$f'(x) = -e^{-x^2/2}(1 - x^2), \quad f'(x) < 0 \quad \text{em} \quad x \in]-1, 0[\quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \quad \text{em} \quad x \in]-\infty, -1[$$

Assim f é estritamente decrescente em $]-1, 0[$ e estritamente crescente em $]-\infty, -1[$. Como $f'(-1) = 0$, $f(-1) = e^{-1/2}$ é um máximo local.

(iv) Como f é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$, f é injetiva então a função f tem inversa quando restrita a $[-4,-2]$ e sendo f diferenciável em -3 então a função inversa, g, de f quando restrita a $[-4,-2]$ é diferenciável em $f(-3)=3e^{-9/2}$. Tem-se $g'(3e^{-9/2})=\dfrac{1}{f'(-3)}=\dfrac{e^{9/2}}{8}$.

■

2. Seja a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que existe $f''(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. A equação

$$f(x)=0$$

pode ter em $\mathbb{R}$ mais que duas soluções? Justifique.

Resolução. Por absurdo, sem perda de generalidade, suponhamos que f tem três zeros em $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<b<c$. Aplicando o teorema de Rolle a f nos intervalos $[a,b]$ e $[b,c]$, uma vez que a função é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, existem $d\in]a,b[$ e $e\in]b,c[$ tais que $f'(d)=f'(e)=0$. Aplicando o teorema de Rolle agora a f' no intervalo $[d,e]$, uma vez que a função f' é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, existe $\xi\in]d,e[$ tal que $f''(\xi)=0$, o que contraria $f''(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Assim a afirmação é verdadeira. ■

3. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2-\operatorname{sen} x},\qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2-\operatorname{sen} x}=\frac{0}{0}.\qquad \text{da regra de Cauchy, } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2-\operatorname{sen} x}=0,$$

pois

$$\lim_{x\to 0}\frac{\big(1-\cos(x^2)\big)'}{(x^2-\operatorname{sen} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}(x^2)}{2x-\cos x}=\frac{0}{-1}=0$$

(ii)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^0=1$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)}$$

tem-se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0$$

pois da regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

■

4. Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funções contínuas em $[a,b]$ com derivadas f',g' tais que existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$|f'(x)|\le\alpha|g'(x)|\quad,\ x\in]a,b[$$

(i) Se $g'(x)\neq 0$ para $x\in]a,b[$ mostre a desigualdade

$$|f(b)-f(a)|\le\alpha|g(b)-g(a)|.$$

(ii) Se a condição indicada em (i) for omitida, a desigualdade indicada em (i) continua sempre a verificar-se? Justifique.

Resolução.

(i) Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b]$ com derivadas f', g' e $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a, b[$ então existe $\beta \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

como

$$|f'(\beta)| \leq \alpha |g'(\beta)|$$

ou seja

$$|\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)})| \leq \alpha$$

tem-se

$$|f(b) - f(a)| \leq \alpha |g(b) - g(a)| \, .$$

(ii) Se a condição indicada em (i) for omitida, a desigualdade indicada em (i) só se verifica, se existir $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$, $f(b) = f(a)$ e $g(b) = g(a)$

▪