TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - LERC, LEGI, LEE, LEIC-T - versão A   8 de Junho de 2015 - 9:00h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I (12 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

i) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\,dx$,   ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$ iii) $\displaystyle\int_0^1 2x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Resolução. (i) Da formula de Barrow tem-se $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\,dx \;, = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3}\right]_1^e = \frac{2}{3}(\sqrt{2^3}-1)$.

(ii) A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)(x+1)}\,dx = A\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + B\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx + C\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

e da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)(x+1)}\,dx = A\left[\ln|x+1|\right]_0^1 + B/2\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 + C\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$2 = (A+B)x^2 + (B+C)x + A + C,$$

vindo que

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=2. \end{cases}$$

Obtém-se $A=1,\ B=-1,\ C=1,$

$$\int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)(x+1)}\,dx = \left[\ln|x+1|\right]_0^1 - 1/2\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 + \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \ln\sqrt{2} + \pi/4\,.$$

(iii) Integrando por partes,

$$\int_0^1 2x\operatorname{arctg} x\,dx = \left[x^2\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

■

2. Seja a função

$$G(x) = \int_1^{x^2} x\,\operatorname{sen}(\ln t)\,dt\,, \qquad x\in\mathbb{R}^+\,.$$

i) Defina a função derivada de G.

ii) Determine, usando a mudança de variável $\ln t = u$, o valor de $G(e)$.

Resolução.

i) A função $F(x) = \int_1^x \operatorname{sen}\ln t\, dt$ é um integral indefinido cujo integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ e portanto F é diferenciável do teorema fundamental do cálculo. Como $G(x) = xF(x^2) = \int_1^{x^2} x\ \operatorname{sen}(\ln t)\, dt$, resulta do produto e composição de funções diferenciáveis, G é também diferenciável em $\mathbb{R}^+$. A função derivada de G é definida por $G' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e

$$G'(x) = F(x^2) + 2x^2 \operatorname{sen}(\ln x^2)\,.$$

ii) $G(e) = \int_1^{e^2} e\ \operatorname{sen}(\ln t)\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $\ln t = u$, tem-se

$$\int_1^{e^2} e\ \operatorname{sen}(\ln t)\, dt = e \int_0^2 e^u \operatorname{sen} u\, du$$

Integrando por partes

$$\int_0^2 e^u \operatorname{sen} u\, du = [-e^u \cos u]_0^2 + \int_0^2 e^u \cos u\, du = (-e^2 \cos(2) + 1) + [e^u \operatorname{sen} u]_0^2 - \int_0^2 e^u \operatorname{sen} u\, du$$

tem-se

$$\int_0^2 e^u \operatorname{sen} u\, du = 1/2(e^2(\operatorname{sen}(2) - \cos(2)) + 1)$$

vindo

$$\int_1^{e^2} e\ \operatorname{sen}(\ln t)\, dt = e \int_0^2 e^u \operatorname{sen} u\, du = e/2(e^2(\operatorname{sen}(2) - \cos(2)) + 1)$$

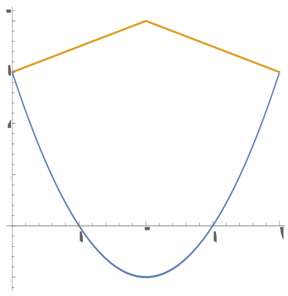
▪

3. Calcule a área da região plana limitada pelas linhas definidas pelas equações

$$y = x^2 - 8x + 15\,, \qquad y = 4 - \frac{|x-4|}{2}\ .$$

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região em questão



Estabelecendo para $x < 4$, $x^2 - 8x + 15 = 4 + \frac{x-4}{2}$ tem-se $x = 2$, e pela simetria da figura relativamente a $x = 4$, obtém-se a seguinte expressão para a área da região plana

$$2\int_2^4 4 + \frac{x-4}{2} - (x^2 - 8x + 15)\ dx\ = 2\int_2^4 (-x^2 + \frac{17}{2}x - 13)\ dx = .$$

vindo, da fórmula de Barrow,

$$2\int_2^4 (-x^2 + \frac{17}{2}x - 13)\ dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{17}{4}x^2 - 13x\right]_2^4 = 2\left[x(-\frac{x^2}{3} + \frac{17}{4}x - 13)\right]_2^4 = \frac{38}{3}\,.$$

▪

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f uma função contínua em $[a, b]$ e g uma função integrável positiva em $[a, b]$. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Resolução. Sendo f uma função contínua em $[a,b]$, do teorema de Weierstrass f tem máximo (M) e minimo (m) em $[a,b]$. Por outro lado, como f uma função contínua em $[a,b]$, f é também integrável à Riemann em $[a,b]$, sendo fg igualmente integrável em $[a,b]$, uma vez que g uma função integrável em $[a,b]$.
Como g é uma função positiva em $[a,b]$ e da relação anterior, tem-se $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ para $x \in [a,b]$. Integrando, obtém-se

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$$

como $\int_a^b g(x)\,dx > 0$,

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in [m;M]\,.$$

Do teorema de Bolzano, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c)$$

■

II (8 val.)

1. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes e determine a soma de uma delas:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{4^{n-1}} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3+e^n} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1}\,.$$

Resolução. *i)* A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{4^{n-1}}$ é convergente, pois é representada pela adição de duas séries geométricas convergentes, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{4^{n-1}} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

onde a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica convergente de razão $R = 1/2 < 1$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ é uma série geométrica convergente de razão $R = 1/4 < 1$.
O valor da soma desta série pode ser obtida,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{4^{n-1}} = 8\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 4\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}\,.$$

ii) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ é convergente do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1^3}{e^{n+1}} \Big/ \frac{n^3}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

Uma vez que $\frac{3+n^3}{e^n} < \frac{n^3}{e^n}$, do critério geral de comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n^3}{e^n}$ é convergente.

iii) Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1}$ e $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^3} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+\,.$$

Do critério de comparação as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet conergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 3/2 > 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+1}$ é também convergente.

▪

2. Considere a série de potências
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\,2^{n-1}}.$$
Determine o maior intervalo aberto onde a série converge absolutamente.

Resolução.

Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\,2^{n-1}}}{\frac{1}{(n+1)\,2^n}} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{(n+1)}{n} = 2$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\,2^{n-1}}$ converge absolutamente se $|x+1| < 2$, i.e $-3 < x < 1$. O intervalo de convergência da série $]-3, 1[$ é o maior intervalo aberto onde a série converge absolutamente.

▪

3. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $h(0) = 1$ e $h'(x) > 0$, $x \in$. Estude a natureza e tipo de convergência da série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{h(n+1)} \operatorname{tg}(\frac{1}{n(n+1)}).$$

Resolução. Como $h'(x) > 0$, $x \in$, a função h é estritamente crescente. Como $h(0) = 1$, $h(n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\dfrac{h(n)}{h(n+1)} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
As séries de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(\frac{1}{n(n+1)}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são ambas convergentes, do critério de comparação, uma vez que $\lim a_n/b_n \in \mathbb{R}^+$ (consequência de em $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$).
Como $\dfrac{h(n)}{h(n+1)} \operatorname{tg}(\frac{1}{n(n+1)} < \operatorname{tg}(\frac{1}{n(n+1)}$, do critério geral de comparação, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{h(n+1)} \operatorname{tg}(\frac{1}{n(n+1)}).$$

é convergente e a sua convergência é absoluta, uma vez que é uma série de termos positivos.

▪