TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - LERC, LEGI, LEE, LEIC-T - versão B

11 de Abril de 2015 - 9 horas

I (6 val.)

1. Considere a sucessão de termos positivos definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+2)}{4} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que a sucessão a_n é monótona.

(ii) Verifique que a sucessão a_n é convergente.

(iii) Determine o limite da sucessão $a_n + \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

Resolução.

(i) $a_2 = 3/4 < a_1$. Pretende-se provar que $a_{n+1} - a_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja que a sucessão é estritamente decrescente. Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $a_2 - a_1 < 0$. Para $n = m$, mostre-se que se $a_{m+1} - a_m < 0$ então $a_{m+2} - a_{m+1} < 0$.

$$a_{m+2} - a_{m+1} = \frac{a_{m+1}^2 - a_m^2 + a_{m+1} - a_m}{4} = \frac{(a_{m+1} - a_m)(a_{m+1} + a_m) + a_{m+1} - a_m}{4} < 0,$$

pois $a_{m+1} - a_m < 0$ da hipótese de indução e $a_{m+1} + a_m > 0$ (sucessão de termos positivos).

(ii) Uma vez que a sucessão a_n é estritamente decrescente e determos positivos, tem-se $0 < a_n < a_1 = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Como a sucessão é monotóna e limitada, então é convergente.

(iii) A sucessão a_n é convergente, represente-se o limite de a_n por a.
Toda a subsucessão de a_n é convergente, em particular $a_{n+1} \to a$. Por outro lado a sucessão $\dfrac{a_n(a_n+2)}{4}$ também é convergente e o seu limite é $\dfrac{a^2+2a}{4}$, vindo

$$a = \frac{a^2+2a}{4} \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0$$

Concluindo-se que $a = 0$ uma vez que $0 < a_n < 1$. Por outro lado,

$$\lim \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{2+1/n}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0}+1} = 1$$

obtendo-se

$$\lim\left(a_n + \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = 0 + 1 = 1$$

■

2. Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{n! + 2n^n}{n^3 + 3^n + n^n}\,, \qquad v_n = \frac{(2n)!\, n^n}{(3n)!}\,, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determine, caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões u_n, v_n e $\sqrt[n]{v_n}$.

Resolução.

$$\lim u_n = \lim \frac{n! + 2n^n}{n^3 + 3^n + n^n} = \lim \frac{\frac{n!}{n^n} + 2}{\frac{n^3}{n^n} + \frac{3^n}{n^n} + 1} = \frac{0+2}{0+0+1} = 2$$

uma vez que da escala de sucessões

$$\lim \frac{3^n}{n^n} = 0\,, \qquad \lim \frac{n!}{n^n} = 0\,, \qquad \lim \frac{n^3}{n^n} = 0\,.$$

$$\lim v_n = \lim \frac{(2n)!\, n^n}{(3n)!} = 0.$$

uma vez que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{(2n+2)!\,(n+1)^{n+1}}{(3n+3)!}}{\dfrac{(2n)!\,n^n}{(3n)!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{(2+2/n)(2+1/n)}{3(3+2/n)(3+1/n)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{e} \qquad \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

com

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4\,e}{27} < 1\,.$$

No caso da sucessão $\sqrt[n]{v_n}$, tem-se

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \sqrt[n]{v_n}\,.$$

usando os cálculos anteriores, conclui-se que

$$\lim \sqrt[n]{v_n} = \frac{4\,e}{27}\,.$$

▪

II (14 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x\,e^x)\,, & \text{se } x \leq 0. \\ \ln(1+x^2)\,, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

(i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. Determine o limite da sucessão $f(\frac{1-n}{n+1})$.

(ii) Determine $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$. A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

(iii) Defina a função derivada de f.

(iv) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

(v) Indique os intervalos de monotonia e analise a existência de extremos locais da restrição de f a $]-\infty, 0]$.

(vi) Considere a função f restrita a $\mathbb{R}^+$. Determine a derivada da função inversa dessa restrição em 1..

Resolução.

(i) A função é contínua em $\mathbb{R}$, pois para $x > 0$, a função é contínua resultante do produto e composição de funções elementares (por isso contínuas). Para $x < 0$, a função é contínua resultante da composição da função logarítmica com um polinómio (ambas funções elementares). Para $x = 0$, tem-se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(x\, e^x) = f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x^2) = \ln 1$$

Como $\lim \frac{1-n}{n+1} = -1$,sendo a função f contínua em $x = -1$, da definição de continuidade segundo Heine, tem-se, em particular, que

$$\lim f(\frac{1-n}{n+1}) = f(-1) = \operatorname{arctg}(-e^{-1})$$

(ii)

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0\,.1 = 0$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arctg}(x\, e^x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \frac{\operatorname{arctg}(x\, e^x)}{xe^x} = e^0\,.1$$

A função não é diferenciável em $x = 0$, pois embora as derivadas lateriais, $f'_e(0), f'_d(0)$ existam, $f'_e(0) \neq f'_d(0)$. Para $x > 0$ a função é diferenciável, pois resulta da composição de funções diferenciáveis. Para $x < 0$ a função é diferenciável, pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis.

(iii) $f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)e^x}{1+x^2\, e^{2x}}\,, & \text{se } x < 0. \\ \dfrac{2x}{1+x^2}\,, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

(iv) Como a função f é diferenciável em $x = 1$, a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de coordenadas (1,f(1)) é

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \ln 2 + x - 1\,.$$

(v) Tem-se para $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^x}{1+x^2\, e^{2x}}$ e $f'(-1) = 0$.
Para $-1 \leq x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow\ f$ é uma função crescente.
Para $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow\ f$ é uma função decrescente.
Concluindo-se que $f(-1) = \operatorname{arctg}(-e^{-1})$ é minimo local.

(vi) Para $\mathbb{R}^+$ tem-se $f'(x) > 0$ concluindo-se que f restrita a $\mathbb{R}^+$ é uma função estritamente crescente. Consequentemente f é injectiva e tem inversa. Representemos por g a função inversa. $f(\sqrt{e-1}) = 1$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(\sqrt{e-1})} = \frac{e}{2\sqrt{e-1}}.$$

▪

2. Mostre que a equação

$$4x + e^x = 0$$

tem solução em $\mathbb{R}$ e que essa solução é única.

Resolução. Seja $f(x) = 4x + e^x$, a função é contínua em $\mathbb{R}$, como $f(-1)\,.\,f(0) = (-4+e^{-1}).e < 0$, aplicando o teorema de Bolzano à função f no intervalo $[-1, 0]$, existe pelo menos um zero da função f nesse intervalo ou seja a equação $4x + e^x = 0$ tem pelo menos uma solução. Uma vez que a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 4 + e^x > 0$, a função sendo estritamente crescente é injetiva ou seja só se anula uma vez no máximo. Conclui-se assim que a solução da equação $4x + e^x = 0$ é única. ▪

3. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}.$$

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}. \qquad \text{da regra de Cauchy} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x} = 1,$$

pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\operatorname{sen} x))'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{x}} == \lim_{x\to 0} \cos x \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \cos 0 \,.1 = 1$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x} = e^0 = 1}$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{x}}$$

tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} x)}{x} = 1$$

pois da regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1 + \operatorname{arctg} x))'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 + \operatorname{arctg} x} = 1$$

■

4. Seja $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que

$$g\left(\frac{1}{n+1}\right) = g\left(\frac{1}{n+2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Admitindo que existe

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \ ,$$

indique o valor desse limite. Justifique.

Resolução.

Sendo função g é diferenciável em $]0,1[$, aplicando o teorema de Rolle à função g no intervalo $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, uma vez que

$$g\left(\frac{1}{n+1}\right) = g\left(\frac{1}{n+2}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

existe $c_n \in]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ tal que

$$g'(c_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Por outro lado a sucessão $c_n \in]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ converge para zero, do teorema das sucessões enquadradas, uma vez que $\frac{1}{n+2} < c_n < \frac{1}{n+1}$ e $\lim \frac{1}{n+2} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$.
Admitindo que existe

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \ ,$$

usando a definição de Heine, em particular para a sucessão c_n, concluí-se

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim g'(c_n) = 0$$

■