Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

13 de Abril de 2013 - 9 horas

I (7 val.)

1. (4 val.) Considere a sucessão u_n definida em $[0,2]$

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é monótona.

(ii) A sucessão é convergente? Justifique e determine, se possível, o limite da sucessão u_n.

(iii) A sucessão $u_n + v_n$ em que

$$v_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n + 1}$$

é uma sucessão limitada? Justifique.

Resolução.

(i) $u_2 = 2 - \frac{1}{u_1} = 2 - \frac{1}{2} < u_1$ Queremos provar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, através da indução matemática:

- $n = 1$: $u_2 - u_1 = -\frac{1}{2} < 0$.
- Para $n = m$, pretende-se provar, que se $u_{m+1} - u_m < 0$ então $u_{m+2} - u_{m+1} < 0$. Da definição de sucessão u_n, tem-se

  $$u_{m+2} - u_{m+1} = -\frac{1}{u_{m+1}} + \frac{1}{u_m} = \frac{u_{m+1} - u_m}{u_{m+1}u_m} < 0$$

  o quociente anterior é negativo, uma vez que a sucessão tem os seus termos positivos e da hipótese de indução, $u_{m+1} - u_m < 0$. Tem-se assim que $u_{m+2} - u_{m+1} < 0$.

Pelo princípio de indução matemática $u_{n+1} - u_n < 0, \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$, isto é, a sucessão u_n é estritamente decrescente.

(ii) Da alínea anterior, u_n é monótona, como também é limitada, $(0 \geq u_n \leq 2)$ a sucessão é convergente. Seja $x = \lim u_n$. Como u_{n+1} é uma subsucessão de u_n, u_{n+1} é também convergente para x. Por outro lado a sucessão $2 - \dfrac{1}{u_n}$ é igualmente convergente pois resulta da adição e quociente de sucessões convergentes, sendo $\lim(2 - \dfrac{1}{u_n}) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

Uma vez que $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

(iii) A sucessão u_n é limitada, pois $0 \leq u_n \leq 2$. A sucessão v_n converge para 0, poís

$$\lim(\frac{\sqrt{n}}{3^n + 1}) = \lim(\frac{\sqrt{n}}{3^n})(\frac{1}{1 + 3^{-n}}) = 0, \quad \text{da escala de sucessões, pois } \frac{\sqrt{n}}{3^n} \to 0.$$

Sendo a sucessão v_n convergente é também limitada. A adição de sucessões limitadas é uma sucessão limitada, assim $u_n + v_n$ é uma sucessão limitada. ▪

2. (3 val.) Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões

$$(i) \qquad a_n = \frac{n^n}{(n+1)! - n!}, \qquad\qquad (ii) \qquad a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}.$$

Resolução.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)! - (n+1)!}}{\dfrac{n^n}{(n+1)! - n!}} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)!(n+2-1)}}{\dfrac{n^n}{n!(n+1-1)}} =$$

$$\lim \frac{(n+1)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{\dfrac{(n+1)!(n+1)}{n!n}} = \lim \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1, \quad a_n \to +\infty.$$

Seja $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}} = \lim \frac{\dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!}}{\dfrac{22^n(n+1)^2(n!)^2}{2^n(n!)^2}} =$$

$$\lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2} = 2 = \lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}}.$$

■

II (13 val.)

1. (7 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-(x-2)^2}, & \text{se } x \geq 0. \\ x \operatorname{arctg}(x^2 - x), & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.

(ii) Considere a sucessão $x_n = \frac{1}{n}$ e determine, caso exista, o limite da sucessão $f(x_n)$.

(iii) A função f é diferenciável em $x = 0$?. Defina a função derivada de f.

(iv) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de coordenadas $(2, f(2))$.

(v) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f em $]0, \infty[$.

Resolução.

(i) Para $x = 0$,

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{arctg}(x^2 - x) = 0$$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} xe^{-(x-2)^2} = 0$$

Logo, $f(0) = f(0^-) = f(0^+)$ sendo a função contínua no ponto zero.
Para $x > 0$, a função é contínua em cada ponto, uma vez que resulta do

produto e composição de funções elementares.
Para $x < 0$, a função também é contínua em cada ponto, uma vez que resulta do produto e composição de funções elementares.

(ii) Sendo a função f contínua no ponto zero e $f(0) = 0$ e a sucessão $x_n = \frac{1}{n}$ convergindo para zero, através da continuidade segundo Heine, o limite da sucessão $f(x_n)$ é $f(0) = 0$.

(iii) Para verificar se f diferenciável em 0, determinemos $f'_d(0)$ e $f'_e(0)$. Temos

$$\begin{aligned} f'_e(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x \operatorname{arctg}(x^2 - x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(x^2 - x) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-(x-2)^2}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{-(x-2)^2} = e^{-4}. \end{aligned}$$

Logo f não é diferenciável em 0, pois $f'_d(0) \neq f'_e(0)$.

Para $x > 0$, a função é diferenciável em cada ponto, uma vez que resulta do produto e composição de funções elementares.
Para $x < 0$, a função também é diferenciável em cada ponto, uma vez que resulta do produto e composição de funções elementares.

$$f'(x) = \begin{cases} (1 + 4x - 2x^2)e^{-(x-2)^2}, & \text{se } x > 0. \\ \operatorname{arctg}(x^2 - x) + x\dfrac{2x - 1}{1 + (x^2 - x)^2}, & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(iv) Como a função f é diferenciável em $x = 2$, a equação da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de coordenadas $(2, f(2))$ é a seguinte:

$y = f(2)+f'(2)(x-2) = 2+(x-2) = x,$ uma vez que $f(2) = 2,\ f'(2) = 1.$

(v) Estudamos o sinal de f' em $]0, +\infty[$, onde $f'(x) = (1 + 4x - 2x^2)e^{-(x-2)^2}$. Temos $e^{-(x-2)^2} > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Quanto ao polinómio $1 + 4x - 2x^2$, temos $1 + 4x - 2x^2 > 0$ para qualquer $0 < x < 1 + \sqrt{3/2}$ e $1 + 4x - 2x^2 < 0$ para qualquer $x > 1 + \sqrt{3/2}$. A função é assim e crescente em $]0, 1 + \sqrt{3/2}]$

e decrescente em $[1+\sqrt{3/2},+\infty[$. $f'(x)=0$, para $x=1+\sqrt{3/2}$, sendo $f(1+\sqrt{3/2})$ um máximo absoluto em $]0,+\infty[$.

▪

2. (3.0 val.) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(x^2+1)}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0}(x+1)^{1/x}\ .$$

Resolução.

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(x^2+1)}=0/0,(ind.)$$

da regra de Cauchy, uma vez que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\ln(x^2+1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\dfrac{2x}{x^2+1}}=1/2.$$

donde vem $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(x^2+1)}=1/2$, uma vez que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

(ii) $\lim_{x\to 0}(x+1)^{1/x}=1^{\infty}$, (ind.)
assim

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{1/x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

e, uma vez que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$$

e da regra de Cauchy, pois

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+x)\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

donde vem

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e^1$$

▪

3. (1 val.) Considere a equação polinomial $4x^5+2x-4=0$. Justifique se a equação tem solução em $[0,1]$.

Resolução. Seja $f(x)=4x^5+2x-4$, f é contínua em $[0,1]$, pois é a restrição

de uma função polinomial.
Uma vez que $f(0) = -4$ e $f(1) = 2$, sendo $f(0)f(1) < 0$, do teorema de Bolzano vem que existe pelo menos um zero da função f em $]0, 1[$. ▪

4. (2.0 val.) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$b^2 f(a) = a^2 f(b).$$

Mostre que a equação

$$xf'(x) - 2f(x) = 0$$

tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}^+$.

Resolução. Tem-se

$$b^2 f(a) = a^2 f(b) \Rightarrow \frac{f(a)}{a^2} = \frac{f(b)}{b^2}$$

Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. Como g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ e $g(a) = g(b)$ do teorema de Rolle existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$.
Ora

$$g'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$$

vindo

$$\underset{c \in]a,b[}{\exists} \quad g'(c) = 0 \Rightarrow cf'(c) - 2f(c) = 0, \quad \text{pois} \quad c \neq 0$$

▪