TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - LERC, LEGI, LEE, LEIC-T - versão A

11 de Abril de 2015 - 9 horas

I (6 val.)

1. Considere a sucessão de termos positivos definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{(a_n + 4)\, a_n}{6} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que a sucessão a_n é monótona.

(ii) Verifique que a sucessão a_n é convergente.

(iii) Determine o limite da sucessão $a_n + \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$.

Resolução.

(i) $a_2 = 5/6 < a_1$. Pretende-se provar que $a_{n+1} - a_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja que a sucessão é estritamente decrescente. Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $a_2 - a_1 < 0$. Para $n = m$, mostre-se que se $a_{m+1} - a_m < 0$ então $a_{m+2} - a_{m+1} < 0$.

$$a_{m+2} - a_{m+1} = \frac{a_{m+1}^2 - a_m^2 + a_{m+1} - a_m}{6} = \frac{(a_{m+1} - a_m)(a_{m+1} + a_m) + a_{m+1} - a_m}{6} < 0,$$

pois $a_{m+1} - a_m < 0$ da hipótese de indução e $a_{m+1} + a_m > 0$ (sucessão de termos positivos).

(ii) Uma vez que a sucessão a_n é estritamente decrescente e determos positivos, tem-se $0 < a_n < a_1 = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Como a sucessão é monotóna e limitada, então é convergente.

(iii) A sucessão a_n é convergente, represente-se o limite de a_n por a.
Toda a subsucessão de a_n é convergente, em particular $a_{n+1} \to a$. Por outro lado a sucessão $\frac{a_n(a_n+4)}{6}$ também é convergente e o seu limite é $\frac{a^2+4a}{6}$, vindo

$$a = \frac{a^2 + 4a}{6} \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0$$

Concluindo-se que $a = 0$ uma vez que $0 < a_n < 1$. Por outro lado,

$$\lim \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

obtendo-se

$$\lim \left(a_n + \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1} + n}\right) = 0 + e^3 = e^3$$

∎

2. Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{2^n + n^2 + 2n!}{n^3 + n^n + 1}, \qquad v_n = \frac{(n!)^2\, n^n}{(3n)!}, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determine, caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões u_n, v_n e $\sqrt[n]{v_n}$.

Resolução.

$$\lim u_n = \lim \frac{2^n + n^2 + 2n!}{n^3 + n^n + 1} = \lim \frac{\frac{2^n}{n^n} + \frac{n^2}{n^n} + \frac{2n!}{n^n}}{\frac{n^3}{n^n} + 1 + \frac{1}{n^n}} = \frac{0+0+0}{0+1+0} = 0$$

uma vez que da escala de sucessões

$$\lim \frac{2^n}{n^n} = 0 \ , \qquad \lim \frac{n!}{n^n} = 0 \, , \qquad \lim \frac{n^a}{n^n} = 0 \ \ (a = 2, 3).$$

$$\lim v_n = \lim \frac{(n!)^2 \, n^n}{(3n)!} = 0.$$

uma vez que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2 \, (n+1)^{n+1}}{(3n+3)!}}{\dfrac{(n!)^2 \, n^n}{(3n)!}} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{(1+1/n)^2}{3(3+2/n)(3+1/n)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n , \qquad \text{e} \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

com

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e}{27} < 1 \, .$$

No caso da sucessão $\sqrt[n]{v_n}$, tem-se

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \sqrt[n]{v_n} \, .$$

usando os cálculos anteriores, conclui-se que

$$\lim \sqrt[n]{v_n} = \frac{e}{27} \, .$$

▪

II (14 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left((x+1)e^x\right), & \text{se } x \leq -1. \\ \sqrt{1+x^2}\,, & \text{se } x > -1; \end{cases}$$

(i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. Determine o limite da sucessão $f(-\frac{2n-1}{n+1})$.

(ii) A função f é diferenciável em $x = -1$? Justifique.

(iii) Defina a função derivada de f.

(iv) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

(v) Indique os intervalos de monotonia e analise a existência de extremos locais da restrição de f a $]-\infty, -1]$.

(vi) Considere a função f restrita a $\mathbb{R}^+$. Determine a derivada da função inversa dessa restrição em 2.

Resolução.

(i) A função é contínua em $\mathbb{R}$, pois para $x > -1$, a função é contínua resultante do produto e composição de funções elementares (por isso contínuas). Para $x < -1$, a função é contínua resultante da composição da função logarítmica com um polinómio (ambas funções elementares). Para $x = -1$, tem-se

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \operatorname{arctg}\left((x+1)\, e^x\right) = f(0) = 0 \neq \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{2}$$

Ou seja a função não é contínua em$x = -1$.
Como $\lim -\frac{2n-1}{n+1} = -1$,sendo a função f contínua em $x = -2$, da definição de continuidade segundo Heine, tem-se, em particular, que

$$\lim f(-\frac{2n-1}{n+1}) = f(-2) = \operatorname{arctg}(-e^{-2})$$

(ii) A função não é diferenciável em $x = -1$, pois a função não é contínua em $x = -1$. Para $x > -1$ a função é diferenciável, pois resulta da composição de funções diferenciáveis. Para $x < -1$ a função é diferenciável, pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis.

(iii) $f' : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)e^x}{1+(x+1)^2\, e^{2x}}\,, & \text{se } x < -1. \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, & \text{se } x > -1; \end{cases}$$

(iv) Como a função f é diferenciável em $x = 1$, a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de coordenadas (1,f(1)) é

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \sqrt{2} + x - 1\,.$$

(v) Tem-se para $x < -1$, $f'(x) = \dfrac{(x+2)e^x}{1+(x+1)^2\, e^{2x}}$ e $f'(-2) = 0$.
Para $-2 \leq x < -1$, $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ é uma função crescente.
Para $x < -2$, $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f$ é uma função decrescente.
Concluindo-se que $f(-2) = \operatorname{arctg}(-e^{-2})$ é minimo local.

(vi) Para $\mathbb{R}^+$ tem-se $f'(x) > 0$ concluindo-se que f restrita a $\mathbb{R}^+$ é uma função estritamente crescente. Consequentemente f é injectiva e tem inversa. Representemos por g a função inversa.
$f(\sqrt{3}) = 2$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

■

2. Mostre que a equação

$$e^x + 3x = 0$$

tem solução em $\mathbb{R}$ e que essa solução é única.

Resolução. Seja $f(x) = e^x + 3x$, a função é contínua em $\mathbb{R}$, como $f(-1)\,.\,f(0) = (e^{-1} - 3).e^0 < 0$, aplicando o teorema de Bolzano à função f no intervalo $[-1, 0]$, existe pelo menos um zero da função f nesse intervalo ou seja a equação $e^x + 3x = 0$ tem pelo menos uma solução. Uma vez que a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = e^x + 3 > 0$, a função sendo estritamente crescente é injetiva ou seja só se anula uma vez no máximo. Conclui-se assim que a solução da equação $e^x + 3x = 0$ é única. ■

3. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$(i)\;\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \qquad (ii)\;\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)^x.$$

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}. \qquad \text{da regra de Cauchy,} \quad \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 1,$$

pois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

(ii)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)^x = e$$

de facto, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)}$$

tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

pois da regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})}{1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{1+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})} = 1$$

■

4. Seja $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que

$$g\left(\frac{1}{n+1}\right) = g\left(\frac{1}{n+2}\right), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Admitindo que existe

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \ ,$$

indique o valor desse limite. Justifique.

Resolução. Sendo função g é diferenciável em $]0,1[$, aplicando o teorema de Rolle à função g no intervalo $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, $n\in\mathbb{N}$, uma vez que

$$g\left(\frac{1}{n+1}\right) = g\left(\frac{1}{n+2}\right), \qquad n\in\mathbb{N},$$

existe $c_n \in]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ tal que

$$g'(c_n) = 0, \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Por outro lado a sucessão $c_n \in]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ converge para zero, do teorema das sucessões enquadradas, uma vez que $\frac{1}{n+2} < c_n < \frac{1}{n+1}$ e $\lim \frac{1}{n+2} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$.
Admitindo que existe

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \ ,$$

usando a definição de Heine, em particular para a sucessão c_n, concluí-se

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim g'(c_n) = 0$$

■