TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - LERC, LEGI, LEE, LEIC-T - versão A

9 de Abril de 2016 - 9 horas

I (6 val.)

1. Considere a sucessão definida por

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{3a_n - 4}{a_n - 1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Verifique, por indução matemática, que $a_n > 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sabendo que a sucessão a_n é decrescente, mostre que esta é convergente e determine o seu limite.

Resolução.

(i) Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $a_1 = 3 > 2$. Para $n = m$, mostre-se que se $a_m > 2$ então $a_{m+1} > 2$.

$$a_{m+1} = \frac{3a_m - 4}{a_m - 1} = \frac{3a_m - 3}{a_m - 1} + \frac{-1}{a_n - 1} = 3 + \frac{-1}{a_n - 1}$$

Assim, da hipótese de indução, sendo $a_m > 2$, tem-se $\frac{1}{a_m-1} < 1$ vindo $\frac{-1}{a_m-1} > -1$ ou seja $a_{m+1} > 3 - 1 = 2$.

(ii) A sucessão a_n sendo monótona e limitada é convergente, dado que de (i), e como a_n é decrescente tem-se $2 < a_n \leq a_1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja a_n é também limitada. Representando o limite de a_n por a.
Toda a subsucessão de a_n é convergente, em particular $a_{n+1} \to a$. Por outro lado a sucessão $\frac{3a_n-4}{a_n-1}$ também é convergente e o seu limite é $\frac{3a-4}{a-1}$, vindo

$$a = \frac{3a - 4}{a - 1}$$

Concluindo-se que $a = 2$.

■

2. Considere as sucessões x_n e y_n definidas por

$$x_n = \frac{3^n + n!\,(4n+1)}{n!\,(2n+2) + 4^n}\,, \qquad y_n = \sqrt[n]{\frac{3^n n^2}{n!}}\,, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine, caso existam, os limites das sucessões x_n e y_n.

(ii) Será que a sucessão $z_n = (-1)^n\,(x_n + y_n)$ é convergente? Justifique.

Resolução.

(i)

$$\lim x_n = \lim \frac{3^n + n!\,(4n+1)}{n!\,(2n+2) + 4^n} = \lim \frac{\frac{3^n}{n!}\frac{1}{n} + \left(4 + \frac{1}{n}\right)}{\left(2 + \frac{2}{n}\right) + \frac{4^n}{n!}\frac{1}{n}} = 4/2 = 2\,,$$

uma vez que da escala de sucessões

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0\,, \qquad a = 3, 4\,.$$

Seja

$$v_n = \frac{3^n n^2}{n!}\,.$$

Tem-se

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \sqrt[n]{v_n} = \lim y_n\,.$$

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{3^n n^2}{n!}} = \lim \frac{3.3^n (n+1)^2 n!}{(n+1)n! 3^n n^2} = \lim \frac{3(n+1)}{n^2} = \lim 3\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0\,.$$

(ii) A sucessão $z_n = (-1)^n(x_n + y_n)$ não é convergente, uma vez que, as subsucessões de z_{2n} e z_{2n-1} embora, sendo convergentes em $\mathbb{R}$ contudo $\lim z_{2n} \neq \lim z_{2n-1}$, concluindo-se que o conjunto dos sublimites de z_n é o conjunto $\{-2, 2\}$.

▪

II (14 val.)

1. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e definidas por

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln(2) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{arctg}\left(x^2 + 1\right).$$

(i) Será que a função $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < 0 \\ g(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}\,,$$

tem limite no ponto 0? Justifique.

(ii) Calcule $f'(x)$ e verifique que f é estritamente crescente no seu domínio.

(iii) Identifique o contra-domínio de f. Se $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ designa a inversa de f, qual será a derivada de f^{-1} no ponto $f(0)$?

(iv) Calcule $g'(x)$ e identifique o único ponto do gráfico de g onde a respectiva recta tangente é paralela ao eixo das abcissas.

(v) Identifique os intervalos de monotonia de g. Será que g tem mínimo absoluto ou máximo absoluto? Justifique.

(vi) Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{g(e^x) - \frac{\pi}{4}}{e^x}.$$

(vii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função f.

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg}\left(x^2+1\right) = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4\,,$$

$$\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} \ln(e^x+1) - \ln(2) = 0\,.$$

Como $\lim_{x\to0^+} h(x) \neq \lim_{x\to0^-} h(x)$ não existe $\lim_{x\to0} h(x)$.

(ii)
$$f'(x) = (\ln(e^x+1) - \ln(2))' = \frac{e^x}{e^x+1},$$

Sendo $f'(x) > 0$, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

(iii) f é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}$ logo
$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to i\infty -} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\ln(2), +\infty[,$$

f é diferenciável e é injetiva, pois é estritamente monótona logo existe f^{-1} e é diferenciável no ponto $f(0)$. Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1/2$, tem-se
$$\left(f^{-1}\right)'(f(0)) = \left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 2$$

(iv)
$$g'(x) = \left(\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)\right)' = \frac{2x}{1+\left(x^2+1\right)^2}$$

Sendo $g'(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, o único ponto do gráfico de g onde a respectiva recta tangente é paralela ao eixo das abcissas é $(0, g(0)) = (0, \pi/4)$, pois $g'(0) = 0$.

(v) A função é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.
Para $x < 0$ tem-se $g'(x) < 0$ concluindo-se que g é uma função estritamente decrescente.
Para $x > 0$ tem-se $g'(x) > 0$ concluindo-se que g é uma função estritamente crescente.
Como $g'(0) = 0$, consequentemente $g(0)$ é minímo absoluto.

(vi)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+1) - \ln(2)}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

com o intuito de aplicar a regra de Cauchy, consideremos
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(e^x+1) - \ln(2))'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0,$$

concluimos assim que,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(e^x) - \frac{\pi}{4}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(e^{2x}+1\right) - \frac{\pi}{4}}{e^x} = \frac{0}{0}$$

obtendo uma indeterminação, consideremos agora
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\operatorname{arctg}\left(e^{2x}+1\right) - \frac{\pi}{4}\right)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{2x}}{1+(e^x+1)^2}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+(e^x+1)^2} = 0$$

da regra de Cauchy concluimos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(e^x)-\frac{\pi}{4}}{e^x} = 0$.

(vii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x-1$ associado à função f.
Sendo a função f pelo menos 2 vezes diferenciável numa vizinhança $V_\epsilon(1)$, o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x-1$ associado à função f,
$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!},$$

$$f'(x) = f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad f''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \frac{e^x}{(e^x+1)^2},$$

e os coeficientes de P_2, $f(1) = \ln\frac{e+1}{2}$, $f'(1) = \frac{e}{e+1}$ e $f''(1) = \frac{e}{(e+1)^2}$.

▪

2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no seu domínio. Mostre que se existir uma sucessão x_n tal que

$$x_n \in [0,1] \quad \text{e } f(x_n)\, f(1-x_n) < \frac{1}{n}, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N},$$

então a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz em $[0,1]$.

Sugestão: O teorema de Bolzano-Weierstrass garante que a sucessão x_n admite uma subsucessão convergente.

Resolução.

Como $x_n \in [0,1]$, a sucessão é limitada e o teorema de Bolzano-Weierstrass garante que a sucessão x_n admite uma subsucessão, x_{n_m}, convergente. Seja $y = \lim x_{n_m}$, tem-se que $y \in [0,1]$ e sendo f contínua em y, da definição de continuidade segundo Heine, tem-se em particular que $f(y) = \lim f(x_{n_m})$. Por outro lado, para a sucessão x_n, tem-se também que $f(x_n)\, f(1-x_n) < \frac{1}{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o que nos leva a concluir que $f(y)\, f(1-y) \leq 0$ A condição $f(y)\, f(1-y) = 0$ verifica de imediato a proposição.
Quando $f(y)\, f(1-y) < 0$, como $y, 1-y \in [0,1]$, sendo a função contínua em $[0,1]$ também o é no intervalo de extremos y e $1-y$ pelo teorema de Bolzano conclui-se que existe pelo menos um x entre y e $1-y$ tal que $f(x) = 0$.

∎