Funções Diferenciáveis. Derivadas Parciais

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ se existir a transformação LINEAR

$$Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Df(a)h \|_{\mathbb{R}^m}}{\| h \|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

—— " ——

Escrito de uma forma condensada:

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h = o(h).$$

—— " ——

A derivada $Df(a)$ é representada pela matriz das derivadas parciais

$$Df(a) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \\ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \\ \\ \end{array} \right]_{m\times n} \leftarrow \text{linha } j,\; j=1,2,\dots,m \\ \uparrow \\ \text{coluna } k=1,2,\dots,n \end{array}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t}.$$

Para que uma função $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seja diferenciável em $a\in\mathbb{R}^n$ são necessárias duas condições:

1 - As derivadas parciais $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$ devem existir.

$$2-\ \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)h\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

— " —

<u>Exemplo:</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

As derivadas parciais na origem existem:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t}$$

(x varia, $y=0$ fixo)

$$= \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

y varia, $x=0$ fixo

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Se f for diferenciável em (0,0) a sua

derivada será a matriz

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\underline{\text{Nota:}}}$ Neste caso tem-se

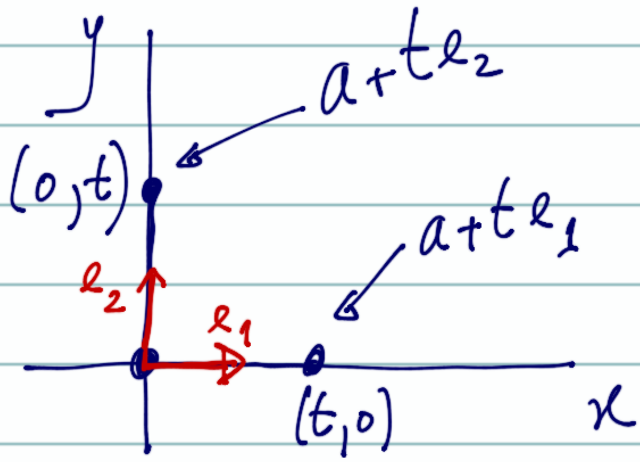
$$a = (0,0) \qquad e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$$

$$a + te_1 = (t,0)$$

$$a + te_2 = (0,t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_1)-f(a)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_2)-f(a)}{t}$$



— // —

Apesar de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,

a função f não é diferenciável em $(0,0)$.

De facto, fazendo $h = (x,y)$, tem-se

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h =$$

$$= f(x,y) - f(0,0) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= f(x,y)$$

Portanto,

$$\frac{|f(a+h)-f(a)-Df(a)h|_{\mathbb{R}}}{\|h\|_{\mathbb{R}^2}} = \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \frac{\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

e fazendo $y = x$, tem-se

$$\frac{x^2}{2\sqrt{2}\,x^2|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|x|}$$

que não tem limite quando $x \to 0$.

Nota: A função f não é contínua na origem e, portanto não é diferenciável na origem!

——— // ———

$\boxed{\text{Qualquer função } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ diferenciável em } a \in \mathbb{R}^n \text{ é necessariamente contínua em } a.}$

De facto, sendo diferenciável em a

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h = o(h),$$

ou seja, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|o(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$,

Notando que $o(h) = \dfrac{o(h)}{\|h\|} \|h\|$, tem-se

$$\lim_{h\to 0} o(h) = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{\|h\|}\|h\| = 0 \,!$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) = \lim_{h\to 0}\Big(Df(a)h + o(h)\Big)$$

$$= 0.$$

Se $h\to 0$ então $f(a+h)\to f(a)$.

A função f é contínua em a.

—— // ——

<u>Exemplo:</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Será diferenciável em $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)(x,y) = f(x,y)$$

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{\left|\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}|y|$$

$$\leq |y| \longrightarrow 0$$

Portanto, f é diferenciável em (0,0) e a respectiva derivada é a matriz

$$Df(0,0) = [0 \quad 0].$$

<u>Nota</u>: f também é contínua em (0,0)!!!