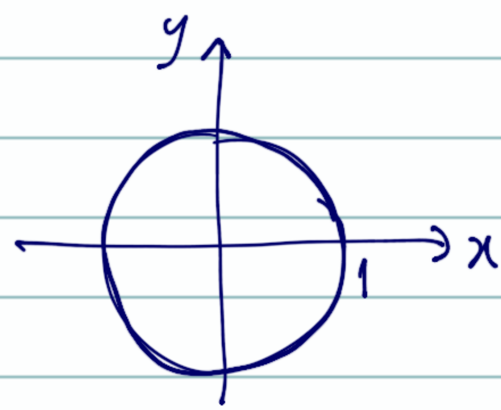
Funções Contínuas. Conjuntos compactos
Teorema de Weierstrass

Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é <u>COMPACTO</u> se for LIMITADO E FECHADO.

Exemplos:

1- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

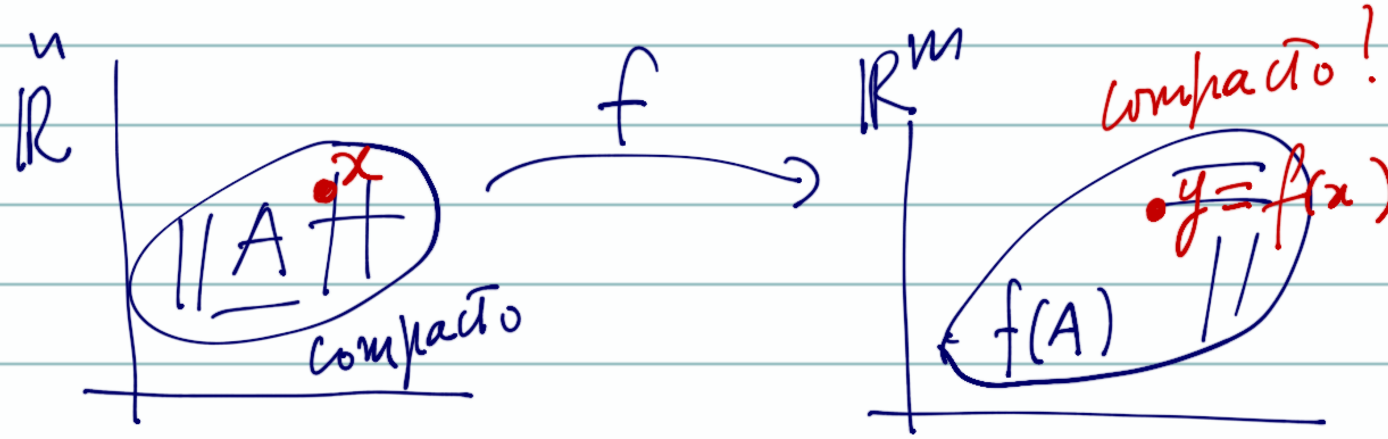


2- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

Bola fechada de raio 1 e centro $(0,0,0)$.

Teorema de Weierstrass.

Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua, $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto.
Então $f(A)$ é compacto em $\mathbb{R}^m$.



Relembre-se que um conjunto A é fechado se qualquer sucessão em A convergente tem limite em A.

É também possível caracterizar conjuntos limitados através de sucessões.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se estiver contido em alguma bola.

Dito de outro modo:

$$\exists_{R>0} : A \subset B_R(0)$$

$$\Leftrightarrow \exists_{R>0} : \|x\| < R, \forall x \in A.$$

Recorde-se que, em $\mathbb{R}$, uma sucessão limitada tem pelo menos uma subsucessão convergente. Em $\mathbb{R}^n$ acontece o mesmo.

Basta considerar o caso $\mathbb{R}^2$.

Seja (x_k, y_k) uma sucessão em $\mathbb{R}^2$ e limitada, ou seja, $\exists_{R>0} : \|(x_k, y_k)\| < R$. $\forall_{k \in \mathbb{N}}$.

Dado que $|x_k| \leq \|(x_k, y_k)\| < R$, então a sucessão (x_k) é limitada em $\mathbb{R}$.

Portanto, (x_k) tem uma subsucessão

convergente. Seja (x'_k) essa subsucessão e $\underline{a}$ o seu limite: $x'_k \to a$.

Considere-se a subsucessão (x'_k, y'_k) de (x_k, y_k).

Dado que $|y'_k| \leq \|(x'_k, y'_k)\| < R$ a sucessão (y'_k) tem uma subsucessão convergente. Seja (y''_k) essa subsucessão. e $\underline{b}$ o seu limite:

$$y''_k \to b.$$

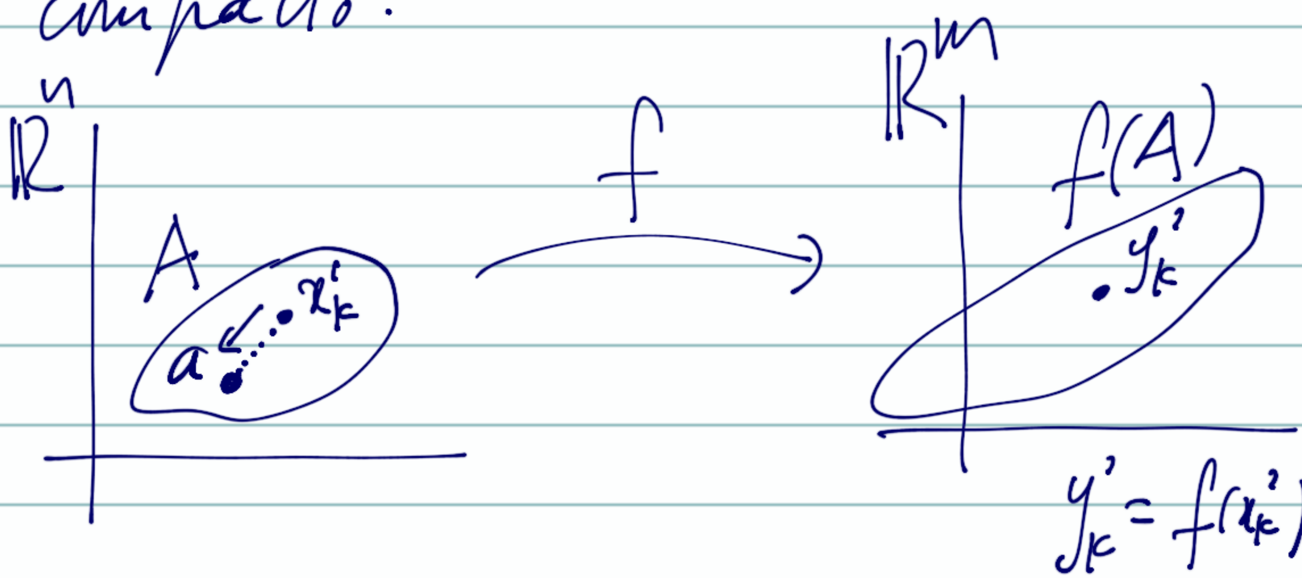
Assim (x''_k, y''_k) é uma subsucessão de (x_k, y_k) e $(x''_k, y''_k) \to (a, b)$!

— u —

Portanto, $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto desde que qualquer sucessão em A tenha uma subsucessão convergente com limite em A.

—— // ——

Seja então (y_k) uma sucessão em $f(A)$ em que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua e $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto.



Sendo $y_k \in f(A)$, existe $x_k \in A$ tal que $y_k = f(x_k)$.

Dado que A é compacto, então (x_k) tem uma subsucessão convergente:

$$x'_k \to a$$

Sendo A fechado, $a \in A$.

Como a função f é contínua, tem-se

$$f(x'_k) \longrightarrow f(a)$$
$$\|$$
$$y'_k \text{ (subsucessão de } (y_k))$$

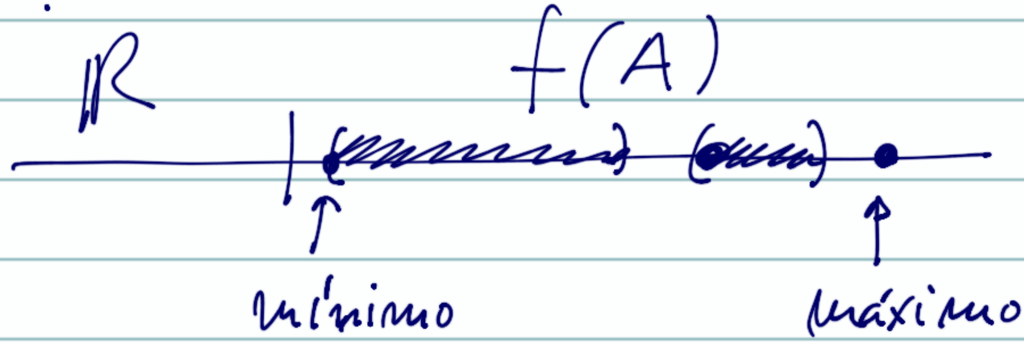
ou seja, a sucessão (y_k) em $f(A)$ tem uma subsucessão (y'_k) convergente para $f(a) \in f(A)$!!!

Portanto $f(A)$ também é compacto.

—— // ——

Para o caso $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f(A) \subset \mathbb{R}$ é compacto (limitado e fechado).



Em $\mathbb{R}$ um conjunto compacto tem máximo e mínimo.

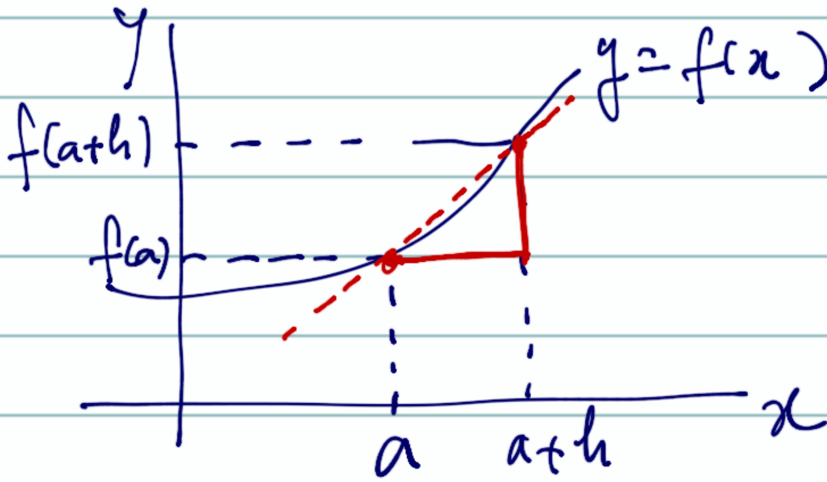
Portanto, uma função contínua definida num conjunto compacto tem máximo e mínimo absolutos.

Coloca-se agora o problema de determinar onde se encontram esses pontos.

Tal como em CDI-I, a noção de <u>derivada</u> vai permitir localizar esses pontos.

DERIVADAS

Recordar $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

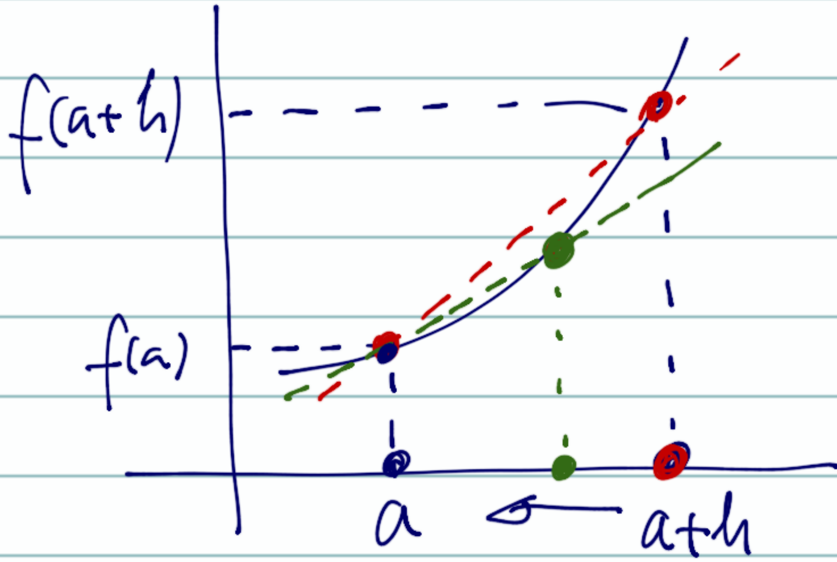


Diz-se que f é diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ se existir o limite seguinte.

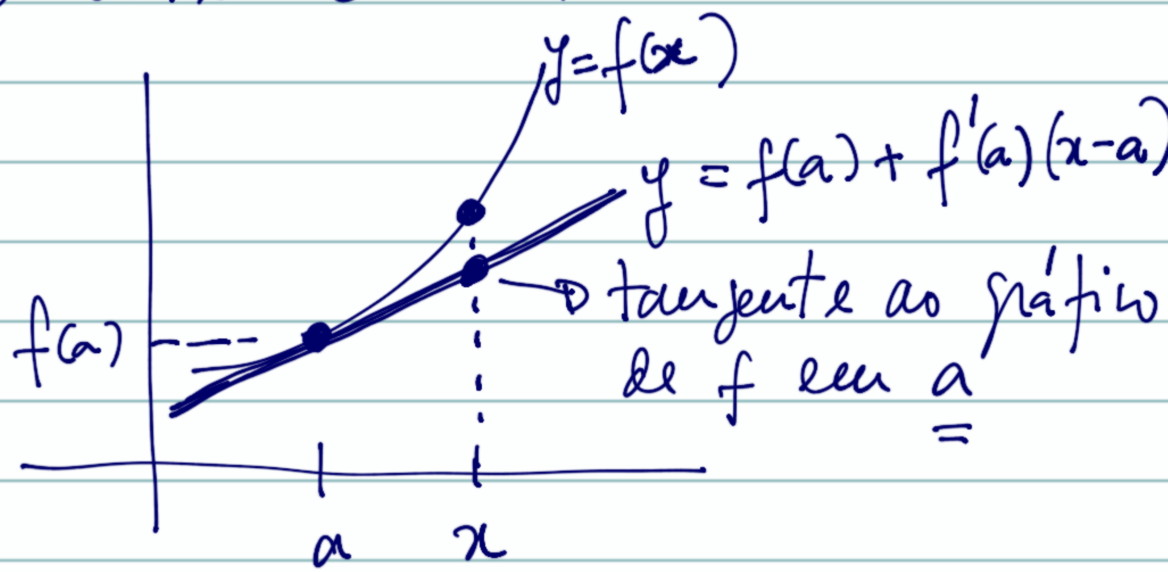
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que é a derivada de f em a, ou seja,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



No limite tem-se



$f'(a) \equiv$ declive da tangente ao gráfico de f em a.

— " —

Pretende-se adaptar esta definição a $\mathbb{R}^n$.

No entanto, o quociente $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ não faz sentido para uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Seria o quociente entre vectores em $\mathbb{R}^m$ no numerador e vectores em $\mathbb{R}^n$ no denominador.

Mas, em $\mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

quer dizer

$$\left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Esta expressão é o quociente de números reais e já faz sentido desde que o módulo seja substituído pela norma.

Note-se que a função

$$\mathbb{R} \ni h \longmapsto f'(a)h \in \mathbb{R}$$

é $\boxed{\text{LINEAR}}$!!!

As funções lineares $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são da forma $L(x) = mx, \quad m \in \mathbb{R}$.

— " —

__Definição__. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é __diferenciável__ (tem derivada) em $a \in \mathbb{R}^n$ se existir uma aplicação LINEAR

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-\overbrace{Df(a)h}^{\text{LINEAR}}\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\,!$$

A aplicação $Df(a)$ chama-se derivada de f no ponto $a \in \mathbb{R}^n$.

Sendo $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear deverá ser <u>representada por uma matriz</u> $(m \times n)$.

Cada coluna desta matriz deverá ser a imagem do correspondente vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$.

A k-ésima coluna da matriz $Df(a)$ é a imagem do k-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$$e_k = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, \dots 0)$$

$\mathbb{R}^2$: $\{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$

$\mathbb{R}^3$: $\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

etc.

—— u ——

Para simplificar a notação, em vez de

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

passará a escrever-se

$$f(a+h)-f(a)-Df(a) = o(h).$$

Seja, então $h = t\,e_k$, $t \in \mathbb{R}$.

$$a \longrightarrow a+te_k$$

$$f(a+te_k)-f(a) - \underset{\text{LINEAR}}{Df(a)}(te_k) = o(te_k)$$

Sendo $Df(a)$ linear, tem-se,

$$f(a+te_k)-f(a) - t\,Df(a)e_k = o(te_k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} - Df(a)e_k = \frac{o(te_k)}{t}$$

Fazendo $t \to 0$ $(h = te_k \to 0)$

obtem-se:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} = Df(a)e_k$$

porque, por definição,

$$\lim_{t\to 0} \frac{o(te_k)}{t} = 0 \; !$$

Sendo $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tem-se

$$f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_j(x), \dots, f_m(x)\right)$$

em que cada $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j=1,2,\dots,m$.

Assim, as entradas da matriz $Df(a)$ serão da seguinte forma:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_j(a+te_k)-f_j(a)}{t}$$

para a coluna k e linha j.

Note-se que

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$$
$$a + te_k = (a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n)$$

(de a para $a+te_k$ só varia a k-ésima componente, as outras estão fixas)

Portanto, o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_j(a+te_k) - f_j(a)}{t}$$

está a ser calculado apenas na k-ésima variável, estando as restantes fixas.

A este limite chama-se
<u>DERIVADA PARCIAL</u> de f_j

em ordem à variável x_k e denota-se pelo símbolo:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \equiv \lim_{t \to 0} \frac{f_j(a+te_k) - f_j(a)}{t}$$

Portanto, a matriz $Df(a)$ será

$$Df(a) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} & \leftarrow \text{linha } j \\ \uparrow \text{coluna } k & \end{array}$$

<u>Conclusão</u>: Basta saber derivar em apenas uma variável.

Exemplo:

$$f(x,y) = (x^2 y, \; x y^3, \; x+2y)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Se existir, a derivada de f em (x,y) deverá ser a matriz:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Derivar em x
y fixo

Derivar em y
x fixo

$$f_1(x,y) = x^2 y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2$$

$$f_2(x,y) = xy^3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y^3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 3xy^2$$

$$f_3(x,y) = x + 2y$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 2$$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^3 & 3xy^2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2 variáveis
→ 2 colunas

3 componentes
→ 3 linhas

A derivada é a matriz das $\boxed{\text{derivadas parciais}}$!!!